em teia
Revista de Educação Matemática e Tecnológica Iberoamericana
Universidade Federal de Pernambuco
ISSN 2177-9309
Pós-Graduação em Educação Matemática e Tecnológica
EDUMATEC

PROBLEMAS QUE ENVOLVEM RELAÇÃO ENTRE DOIS OU MAIS CONJUNTOS NO ÂMBITO DO RACIOCÍNIO COMBINATÓRIO

José Fernando Fernandes Pereira
Mestre em Ensino de Ciências e Matemática
Universidade Cruzeiro do Sul – São Paulo – Brasil
jnandopereira@gmail.com

Edda Curi
Doutora em Educação Matemática
Universidade Cruzeiro do Sul – São Paulo – Brasil
edda.curi@gmail.com

Resumo

É propósito deste artigo apresentar propostas de melhoria nas expectativas de aprendizagem de crianças de uma classe de quinto ano, de uma escola da rede pública estadual, quando transitam por situações-problema que envolvem o raciocínio combinatório. Para tanto, foram implementadas sequências de atividades que nos permitissem identificar como esses alunos desenvolvem esses problemas e, posteriormente, indicar propostas que poderiam possibilitar avanços na qualidade de suas resoluções. A metodologia utilizada é de análise documental, por meio de pesquisa nos protocolos dos alunos, buscando vestígios de seus encaminhamentos e categorizando essas resoluções com o propósito de inferir resultados que nos permitissem propor diferentes formas na abordagem do problema. O referencial teórico que sustenta o trabalho é a Teoria dos Campos Conceituais de Gérard Vergnaud. Foram utilizados, também como referência, trabalhos publicados por alguns pesquisadores da área. Além de contribuir para a melhoria da qualidade do ensino de matemática nessa turma, nossa proposta consolida o desenvolvimento profissional da professora envolvida. A pesquisa maior que encampa este trabalho tem financiamento da Coordenação de Aperfeiçoamento do Pessoal de Nível Superior – CAPES.

Palavras-Chave: Educação Matemática. Ensino Fundamental. Campo Multiplicativo. Raciocínio Combinatório. Princípio Fundamental da Contagem.

PROBLEMS INVOLVING RELATIONS BETWEEN TWO OR MORE SETS IN THE SCOPE OF COMBINATORIAL REASONING

Abstract

This article aims to present the improvement of learning expectations for fith grade children, from a public state school, when presented to problems involving combinatorial reasoning. For this goal, series of activities allowing the understanding of how these students solve these problems, and indicating ways to improve the quality of their resolutions were implemented. We used the documental analysis methodology, by ways of surveying the students protocols, finding out traces of their proceedings, and categorizing these solutions in order to infer results that allowed proposing different approaches to the problem. Our theoretical reference is the Theory of Conceptual Fields, by Gérard Vergnaud. Published works from some researchers of the field were also used as reference. Not only our proposal contributed to the advance of Mathematics teaching in the presented class, but also consolidates the professional development of their teacher. This project is part of a greater research, which is financed by Coordenação de Aperfeiçoamento do Pessoal de Nível Superior – CAPES.

Keywords: Mathematics Education, Elementary Education, Multiplicative Field, Combinatorial Reasoning, Fundamental Principle of Counting.

INTRODUÇÃO

Este texto é parte de uma ampla pesquisa que vai originar uma tese de doutorado[1] e apresenta resultados preliminares de apenas uma das ideias do raciocínio combinatório; aquela que envolve a relação entre dois ou mais conjuntos distintos, determinando todos os possíveis casos de agrupamento que representam essa situação. Os problemas que envolvem as idéias de combinatória, arranjo e permutação não serão analisadas aqui.

Como o raciocínio combinatório é uma das ideias do campo conceitual das estruturas multiplicativas, apoiamo-nos na Teoria dos Campos Conceituais do psicólogo Gérard Vergnaud para fundamentar nosso trabalho.

Um projeto criado pela Profª. Drª. Edda Curi, com propósito de contribuir para a melhoria da qualidade de ensino de matemática nos anos iniciais do Ensino Fundamental e para o desenvolvimento profissional de seus professores, envolveu quinze escolas da Diretoria Regional de Ensino – DRE LESTE 1. Cada escola inscreveu cinco professores de cada ano escolar para, participando de reuniões quinzenais, discutir situações que, no decorrer da aula, invariavelmente ocorrem. Cada grupo de professores foi coordenado por um professor especialista de Matemática, cursando o Doutorado em Ensino de Ciências e Matemática da Universidade Cruzeiro do Sul.

O projeto teve aprovação do Comitê de Ética da universidade, sob o número 018/2015.

A classe envolvida neste trabalho é de alunos de 5º ano e pertence a uma escola pública estadual da cidade de São Paulo, região da DRE – LESTE 1, com 29 alunos regularmente matriculados. A professora da turma cursou Magistério, no nível médio e Pedagogia no nível superior, tem seis anos de atuação, dos quais, quatro, na Secretaria Estadual de Educação. Teve como motivação para engajar-se ao projeto “aprofundar meus conhecimentos metodológicos em matemática”.

[1] Desenvolvida pelo primeiro autor deste texto sob a orientação do segundo autor.

Todas as atividades, envolvendo resolução de sequência de problemas, ou discussão com os alunos sobre suas propostas de resolução, ou intervenções (da professora da classe ou do professor pesquisador), ou aula expositiva sobre o tema a ser desenvolvido na aula, tiveram a participação do professor-pesquisador. Estas serão analisadas na tese de doutorado.

Para este texto, o objetivo é apresentar dados de problemas que envolvem dois ou mais conjuntos e ressaltar a importância dos princípios que regem a busca de todos os agrupamentos que estabelecem a relação entre esses conjuntos.

FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

A Teoria dos Campos Conceituais é uma teoria cognitivista que visa ajudar a entender como as crianças constroem os conhecimentos matemáticos e, para isso, propõe uma estrutura que permita compreender as filiações e rupturas entre conhecimentos, em crianças e adolescentes, entendendo por conhecimento, tanto a informação expressa como as habilidades no tratamento dessa informação (VERGNAUD, 1996, p. 155).

Vergnaud (2009) classifica duas categorias distintas para o campo conceitual das estruturas multiplicativas, quais sejam: isomorfismo de medidas e produto de medidas.

O isomorfismo de medidas é representado por uma relação quaternária que envolve situações de correspondência (um a muitos ou muitos a muitos) ou de proporcionalidade (como o dobro, a metade, o triplo ou a terça parte).

O produto de medidas é representado por uma relação ternária e envolve situações de configuração retangular ou de raciocínio combinatório.

É importante ressaltar que o produto de medidas permite distinguir duas classes de problemas:

- Multiplicação: encontrar a medida-produto, conhecendo-se as medidas elementares;
- Divisão: encontrar uma das medidas elementares, conhecendo-se a outra e a medida-produto (VERGNAUD, 2009, p. 264).

Os problemas de raciocínio combinatório são expressos por uma relação ternária que envolve três quantidades das quais uma (criada para dar solução ao problema) é o produto das outras duas (as enunciadas no problema).

Borba e Azevedo (2012) organizam os problemas referentes a esse raciocínio em quatro situações distintas no que tange à ideia e à solução do problema, assim denominadas: produto cartesiano, permutação, arranjo e combinação. Classificam produto cartesiano por uma coleção de agrupamentos que esgotam todas as possibilidades de relacionar elementos diferentes de dois ou mais conjuntos distintos. As permutações, os arranjos e as combinações são formações estabelecidas com elementos de um mesmo conjunto, o que torna o produto cartesiano uma associação diferenciada das demais.

Neste artigo, não usaremos a nomenclatura produto cartesiano, por entendermos ser ela específica da multiplicação de conjuntos, onde o produto cartesiano de dois conjuntos é formado por pares ordenados, em que o primeiro elemento do par pertence ao primeiro conjunto e o segundo elemento do par pertence ao segundo conjunto. Nesse sentido, as respostas (pares ordenados) não representam, exatamente, as situações referentes ao tipo de problema em questão, uma vez que os agrupamentos formados nesses problemas podem ou não ser do tipo em que a ordem dos elementos não altera a resposta, ou seja, numa dança a ordem da formação de casais não altera a resposta, em situações em que os elementos forem números a ordem vai influenciar.

É esse tipo de agrupamento, que estabelece a correspondência entre elementos de dois ou mais conjuntos, que apresentamos neste texto. A representação dos problemas que têm essa natureza pode ser feita por meio de uma tabela cartesiana ou por diagrama de árvore (também identificado por árvore das possibilidades) ou por outros tipos de esquema menos trabalhado pelos professores.

METODOLOGIA

Para este artigo realizamos uma pesquisa do tipo documental, pois buscamos os resultados nos protocolos dos alunos, documentos sem qualquer outro tratamento científico anterior à nossa imersão (OLIVEIRA, 2012), além de ser de cunho qualitativo, pois nossa investigação tem caráter de pesquisa arqueológica, cuja preocupação é detectar vestígios deixados pelos alunos que possam conduzir-nos a relevantes resultados. Para a tese de doutorado, a pesquisa envolverá uma pesquisa empírica, com atuação do pesquisador em campo, com intervenção do pesquisador, além de entrevistas com os alunos e professora.

Procuramos identificar qual a familiaridade que os alunos possuíam com o tema, realizando uma sondagem em relação ao uso do material do EMAI[2]. Constatamos a existência

[2] Educação Matemática nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental – material utilizado nas escolas públicas do Estado de São Paulo, elaborado por professores da rede pública em conjunto com professores de universidades, com sequências de tarefas organizadas em oito unidades, uma para cada mês do ano letivo. Cada unidade tem em média quatro sequências. Essas sequências, de 1 a 33, são compostas por várias atividades. Na rede estadual de São Paulo, esse é o material usado como livro didático, substituindo o livro-texto.

de treze problemas referentes ao tema (um deles apresentado em duas formas), distribuídos na Tabela 1, com a numeração que consta do material (Sequência. Atividade). Para melhor compreensão das rubricas indicadas no referido quadro, definimos por ação a escolha de um dos elementos de cada um dos conjuntos envolvidos no problema. Assim, o problema que enunciar dois conjuntos implicará a formação de agrupamentos formados por duas ações; aquele que envolver três conjuntos demandará agrupamentos formados por três ações (indicado por triplo). Essas ações são classificadas por Vega (2014) por etapas de escolha. Essas etapas fazem referência ao quantitativo das escolhas que precisam ser executadas. Denominamos problema direto aquele em que são conhecidos os elementos dos conjuntos enunciados no problema (ou suas quantidades). Problema inverso representa aquele que o enunciado oferece as possibilidades (ou sua quantidade) de um dos conjuntos e dos agrupamentos formados, solicitando as possibilidades (ou a quantidade) do outro conjunto envolvido no problema. Problema em forma de tabela foi a designação dada àqueles cujos dados aparecem nesse formato.

Um dos problemas foi apresentado tanto na forma inversa quanto em formato de tabela, indicado dos dois modos na tabela a seguir e apenas dois problemas foram contemplados com três ações envolvidas, assim distribuídos:

Tabela 1 – Quantidade de atividades por unidade, no material do EMAI.

Atividade	**Problema direto**	**Problema inverso**	**Problema em tabela**
7.6	2	1	0
9.7	1	0	0
10.1	0	1	0
18.3	1	0	0
28.4	2 (1 triplo)	0	1
28.5	1	1	2
29.5	1 (triplo)	0	0

Fonte: Dados coletados pelos autores.

SONDAGEM DO CONHECIMENTO SOBRE COMBINATÓRIA

Quando fomos à escola, as Atividades 28 e 29, no material do EMAI, ainda não haviam sido desenvolvidas, portanto, durante esse ano, os alunos só haviam tido contato com seis problemas e todos envolvendo apenas duas ações. Nenhum em forma de tabela.

Para realizar a sondagem, criamos e implementamos uma sequência de problemas que abrangia todos os tipos de situação: problema direto com duas ações, problema inverso com duas ações, problema direto com três ações e problema em forma de tabela. Estavam presentes 22 alunos.

Os problemas propostos foram:

Problema 1 (problema direto com duas ações): Uma sorveteria oferece para os sorvetes de Nata, Morango, Limão e Flocos as seguintes coberturas: baunilha, chocolate e maracujá. Quais são as possibilidades de escolha de sorvete com um sabor e uma cobertura? Quantas são?

Encontramos os seguintes percentuais para o primeiro problema: 9 alunos (40,9%) acertaram quantas são as possibilidades, mas apenas 3 desses indicaram quais eram as possibilidades; 13 alunos (59,1%) erraram quantas são as possibilidades e, desses, nenhum indicou quais seriam elas.

Problema 2 (problema inverso): Uma lanchonete oferece 15 tipos diferentes de sanduíche. Cada sanduíche é feito com um tipo de pão e uma espécie de recheio. Sabendo que há cinco espécies de recheio, quantos são os tipos de pão?

No segundo problema, apenas 2 alunos (9,1%) indicaram que o produto entre o número de possibilidades para os pães e o número de possibilidades para os recheios produziria o número de possibilidades de sanduíches; 9 alunos (40,9%) representaram a subtração como inversa da multiplicação e indicaram 15-5=10 sanduíches; os demais, 11 (50,0%), não ofereceram possibilidade de identificar o raciocínio desenvolvido.

Problema 3 (problema direto com três ações): Um rapaz dispõe de três calças, cinco camisas e dois pares de sapatos. Quais são as possíveis maneiras que ele poderá se vestir, usando uma peça de cada tipo? Quantas são as possibilidades?

Apesar do terceiro problema, por envolver três ações, apresentar mais dificuldade para representar a árvore das possibilidades, mesmo que erradas, 6 alunos (27,3%) assim resolveram; 5 alunos (22,7%) acertaram o problema ao identificar que o produto das três possibilidades para cada uma das ações produziria o número de possibilidades do vestuário completo.

Problema 4 (problema em forma de tabela): Em uma cafeteria são servidos diversos tipos de bebidas e de biscoitos, conforme o quadro a seguir:

Bebidas	*Biscoito de*
Cafezinho	*Baunilha*
Mate gelado	*Chocolate*
Chocolate quente	*Maçã*
Café com leite	*Morango*
Limonada	*Nata*

Quantas são as possibilidades de combinar um tipo de bebida com um tipo de biscoito?

O quarto problema pareceu-nos ser de melhor identificação para os alunos, uma vez que 10 alunos (45,5%) acertaram a resposta, apesar de, até aquele momento, no caderno do EMAI, ainda não terem resolvido problema desse tipo.

Uma vez diagnosticadas as dificuldades nas resoluções dos problemas propostos, voltamos à escola, num segundo momento, com o propósito de investigar com os alunos, individualmente, arguindo-os sobre como entenderam o enunciado, esquematizaram uma solução e representaram no papel. Após essa prática, resolvemos cada um dos problemas, apresentando algumas variações na resolução de cada um deles.

Retornamos, novamente, à escola com o propósito de verificar se nossa prática de diagnosticar as dificuldades, questionar os encaminhamentos e propor caminhos diversos para resolver os problemas apresentaria resultados positivos na construção do conhecimento dessa ideia do raciocínio combinatório. Para tanto, aplicamos uma nova sequência de problemas, envolvendo as mesmas características dos problemas selecionados para a sequência anterior. Estavam presentes 26 alunos, nesse dia.

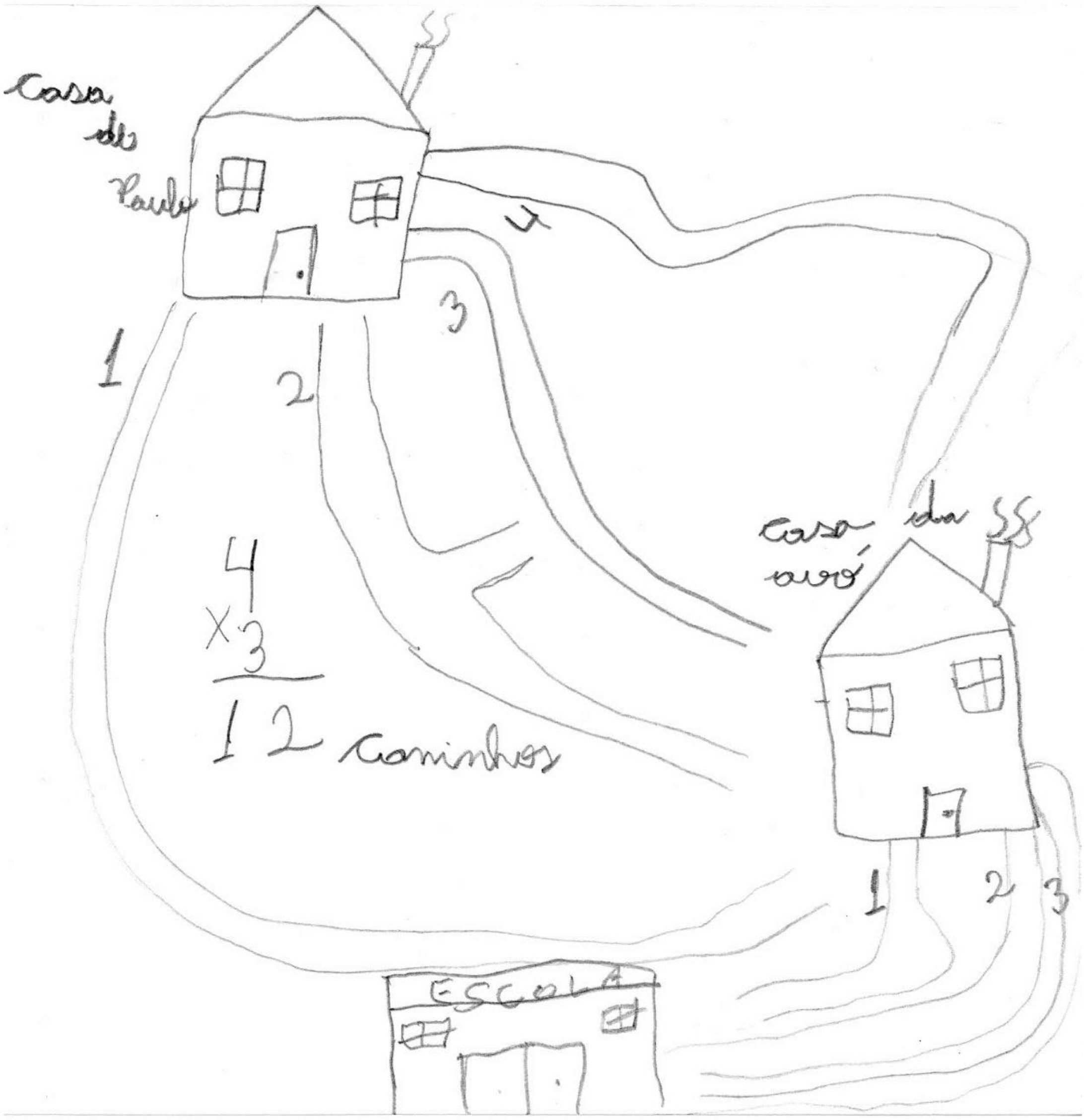
Os problemas propostos foram:

Problema 5 (problema direto com duas ações): Existem quatro caminhos que ligam a casa de Paulo à casa de sua avó e três caminhos ligando a casa de sua avó até a escola. Quantas são as possibilidades de Paulo ir para a escola, passando pela casa da avó?

Notamos uma sensível melhora na resolução deste tipo de problema, pois 18 alunos (69,2%) acertaram quantas são as possibilidades, quer pela indicação por meio de representação, quer pela apropriação do Princípio Fundamental da Contagem. Além desses, 4 alunos (15,4%) indicaram corretamente, mas erraram o resultado.

A seguir apresentamos o protocolo de um aluno que encaminhou sua solução, usando uma representação e, também, a aplicação do Princípio Fundamental da Contagem.

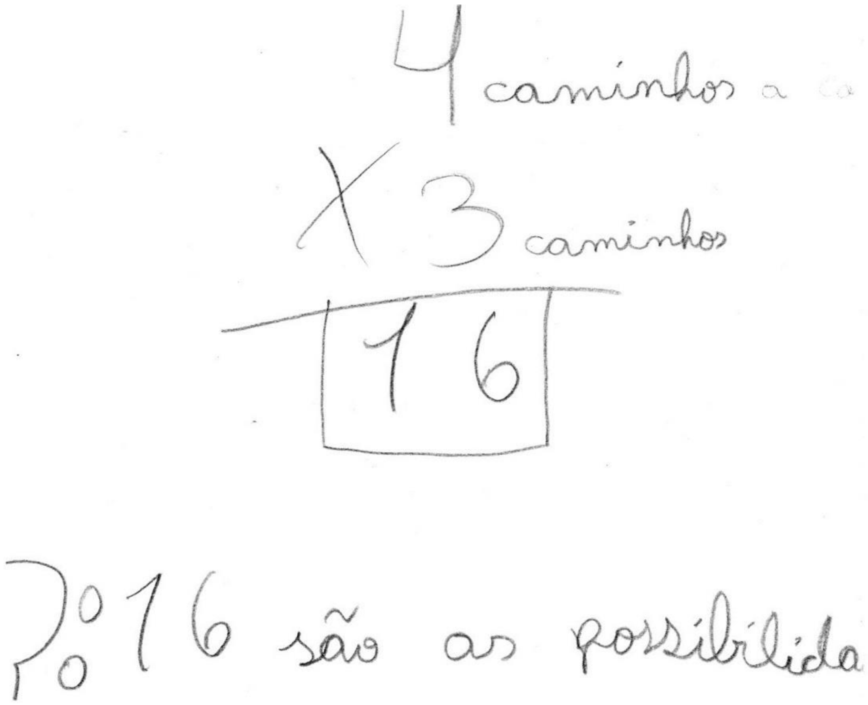
Figura 1 - Encaminhamento proposto por um aluno sobre o problema 5.



Fonte: Arquivo do pesquisador.

O protocolo a seguir evidencia que a dificuldade encontrada pelo aluno não se referiu à interpretação nem à representação do enunciado do problema. Sua dificuldade está caracterizada pela resposta inadequada, mostrando não identificar os fatos fundamentais (tabuada do 3).

Figura 2 - Encaminhamento proposto por um aluno sobre o problema 5.

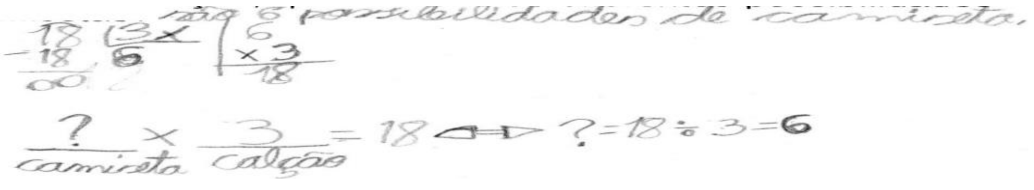


Fonte: Arquivo do pesquisador.

Problema 6 (problema inverso): Um menino tem 18 modos diferentes de apresentar-se para jogar bola no seu clube de futebol, usando um calção e uma camiseta. Sabendo que são três tipos diferentes de calção, quantas são as diferentes possibilidades de camisetas?

Assim como no problema anterior, também para esta situação que envolve a operação inversa da multiplicação, os alunos apresentaram progresso na resolução. Foram 10 alunos (38,5%) que obtiveram êxito no encaminhamento, representando de várias formas diferentes; dois deles com requintada perfeição, como mostra o protocolo a seguir:

Figura 3 - Encaminhamento proposto por um aluno sobre o problema 6 .



Fonte: Arquivo do pesquisador.

Mesmo representando corretamente a divisão como inversa da multiplicação, 2 alunos (7,7%) não obtiveram sucesso na execução do algoritmo.

Ainda representaram a subtração como inversa da multiplicação 4 alunos (15,4%), porém, índice menor que o registrado anteriormente.

Problema 7 (problema direto com três ações): No almoço de um restaurante são oferecidos quatro tipos de legumes (cenoura, abobrinha, pimentão e pepino), três tipos de carne (frango, peixe e linguiça) e dois tipos de verdura (alface e espinafre). De quantas formas diferentes é possível fazer um prato com esses três tipos de alimentos? Quais são essas formas?

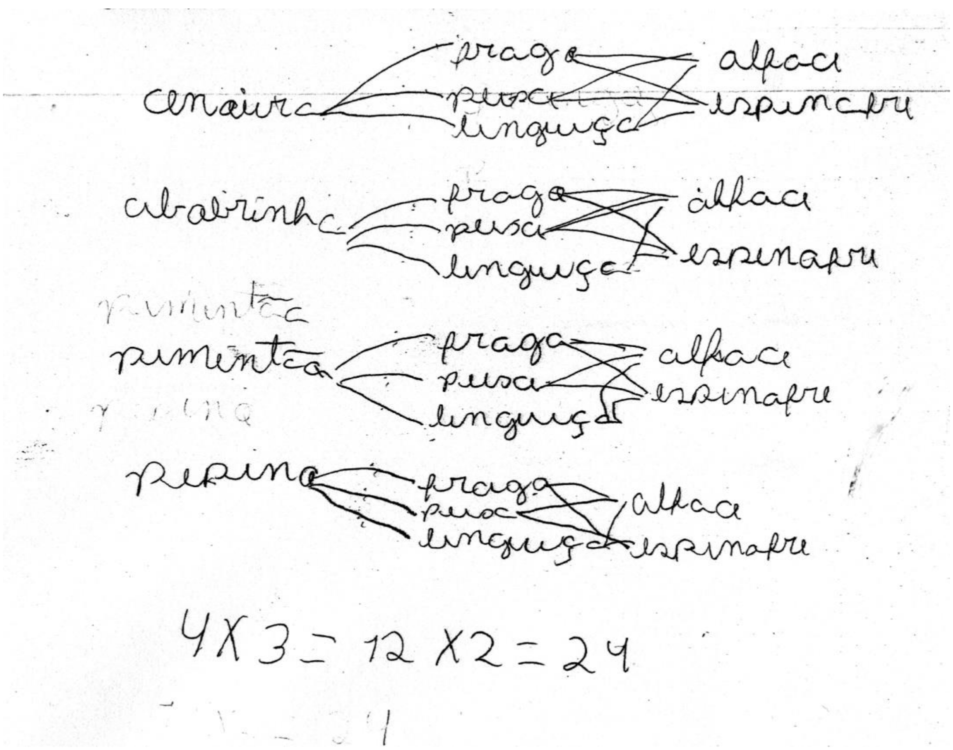
Este problema envolve duas perguntas (quantas e quais) que serão analisadas separadamente.

Sobre quais eram as maneiras possíveis, apesar de haverem tentado, por meio de árvore de possibilidades, chegar ao resultado em problema semelhante, nenhum aluno (0,0%) havia logrado êxito na especificação de todas elas.

Após a intervenção, ainda que fossem 24 formas diferentes de organizar o prato, 7 alunos (26,9%) indicaram corretamente todas as possibilidades, representadas de variadas maneiras.

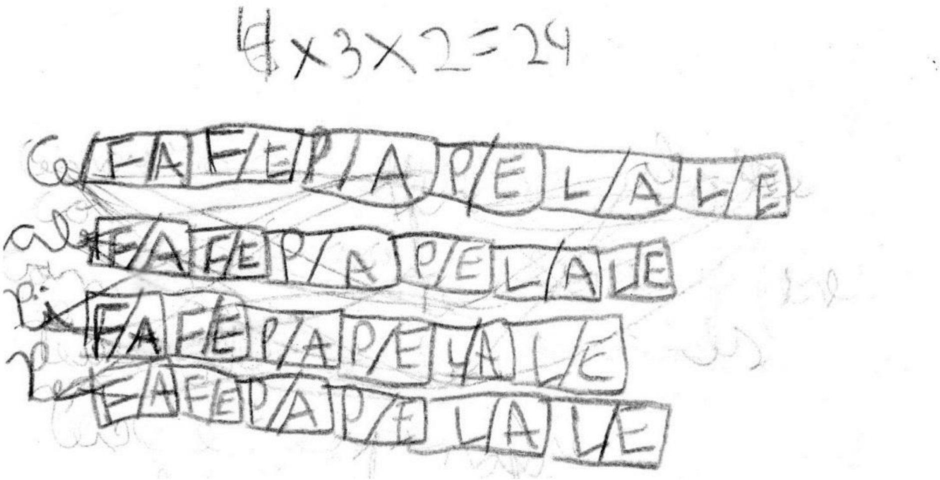
Apresentamos a seguir, dois protocolos que simbolizam formas distintas de expor como pensaram.

Figura 4 - Encaminhamento proposto por um aluno sobre o problema 7.



Fonte: Arquivo do pesquisador.

Figura 5 - Encaminhamento proposto por um aluno sobre o problema 7.



Fonte: Arquivo do pesquisador.

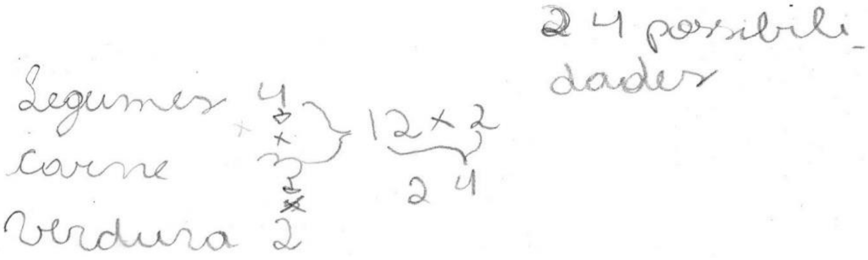
Em relação a quantas eram as maneiras possíveis, enquanto apenas 5 alunos (22,7%) lograram êxito durante a primeira investigação, no segundo momento, 15 alunos (57,7%) – numericamente ou em diagrama de árvore – indicaram corretamente o total de formas diferentes de constituir os pratos.

A seguir, apresentamos como dois alunos representaram seus esquemas, na tentativa de resolver o problema.

Figura 6 - Encaminhamento proposto por um aluno sobre o problema 7.

Fonte: Arquivo do pesquisador.

Figura 7 - Encaminhamento proposto por um aluno sobre o problema 7.



Fonte: Arquivo do pesquisador.

Problema 8 (problema em forma de tabela): Há brinquedos de um Parque de diversões que oferecem brindes. No quadro abaixo estão apresentados os brinquedos que dão essa vantagem e os brindes oferecidos:

Brinquedo	***Brinde***
Roda gigante	*Sorvete*
Trem fantasma	*Pipoca*
Carrossel	*Urso de pelúcia*
	Maçã do amor

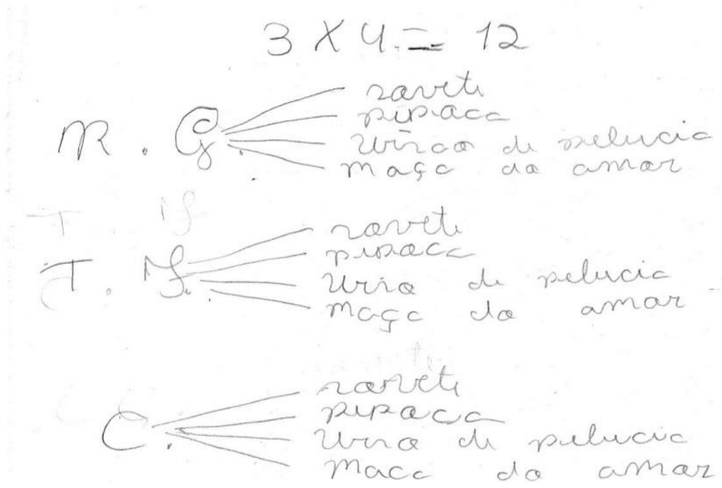
Quantas são as possibilidades de combinar um tipo de brinquedo utilizado com um brinde oferecido?

Já no primeiro momento, este foi o tipo de problema que apresentou o maior percentual (45,5%) de acerto. Agora, na segunda apresentação desse modelo, 21 alunos (80,8%) indicaram a quantidade correta. Enquanto um aluno descreveu os doze agrupamentos, mas não quantificou o resultado, dois alunos registraram o resultado correto, mas não apresentaram qualquer esquema de resolução. Apenas dois alunos, sem qualquer registro de resolução, apresentaram resposta inadequada.

Dos 21 alunos que acertaram o problema, ainda que não fosse solicitado, cinco deles indicaram as duas formas de resolver o problema – árvore das possibilidades e princípio fundamental da contagem.

Apresentamos, na sequência, dois protocolos que evidenciam o fato.

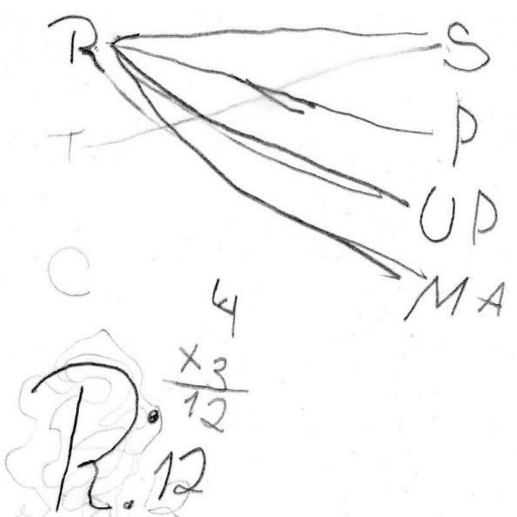
Figura 8 - Encaminhamento proposto por um aluno sobre o problema 8.



Fonte: Arquivo do pesquisador.

O protocolo a seguir apresenta a clara compreensão, pelo aluno, do significado de multiplicação, em que, se uma ação (andar de roda gigante) possibilita quatro tipos diferentes de brinde, então três ações distintas oferecerão 3 X 4 = 12 possibilidades de acontecer o uso de um brinquedo com o ganho de um brinde.

Figura 9 - Encaminhamento proposto por um aluno sobre o problema 8.



Fonte: Arquivo do pesquisador.

ALGUMAS CONSIDERAÇÕES SOBRE A CONSTITUIÇÃO DOS AGRUPAMENTOS

O único problema que, após nossas intervenções, solicita a constituição dos agrupamentos é o problema 7 e, por esse motivo, será analisado a seguir.

Há quatro princípios que devem reger o raciocínio daqueles que se dispõem a resolver um problema que busque encontrar um conjunto formado por todos os agrupamentos que esgotam todas as possibilidades de relacionar os elementos dos conjuntos envolvidos (sejam dois ou três conjuntos).

O produto das medidas é uma resposta numérica. Há situações em que o solicitado é mais do que uma resposta numérica, ou seja, também é pedida a formação de todos os agrupamentos que dão solução ao problema.

Os princípios propostos por Mekhmandarov (2000 apud SPINILLO, 2016), descritos a seguir, podem auxiliar na formação dos agrupamentos:

- Cada agrupamento é formado com apenas um item de cada um dos conjuntos ou medidas elementares;
- Cada agrupamento formado se constitui em um elemento do conjunto ou medida-produto;
- Cada elemento dos conjuntos ou medidas elementares está presente em todos os agrupamentos formados;
- Cada agrupamento formado deve aparecer apenas uma vez no conjunto ou medida produto

Spinillo (2016) associa esses princípios enunciados por Mekhmandarov ao conjunto das invariantes nas quais se assenta a operacionalidade do conceito (neste caso, a multiplicação) como integrante do tripleto (S, I, R) que, segundo Vergnaud, dá sustentação a um campo conceitual.

Para este texto vamos nos ater a algumas considerações, a partir dos princípios supracitados, no problema que solicita “quais” as formas, especificamente o problema 7.

Passamos a apresentar a análise de alguns protocolos de alunos que, a nosso ver, se utilizam desses princípios.

A figura 4 mostra a perfeita compreensão do aluno ao primeiro princípio, uma vez que, ao utilizar o diagrama da árvore, fica explícita a formação do agrupamento com apenas um item de cada um dos conjuntos, tornando essa ferramenta um veículo importante para a correta execução do problema.

Tanto a figura 4 como as demais figuras (5, 6 e 7) que tipificam protocolos relacionados ao problema 7 dão indícios da compreensão do segundo princípio, considerando que esses alunos representaram ou indicaram que o total dos agrupamentos formados determina a medida-produto.

Na figura 5, o aluno representa, primeiramente, que cada um dos legumes deve estar presente em todos os agrupamentos formados e, a seguir, determina a formação de todos os pares formados por um tipo de carne e um tipo de verdura, demonstrando seu entendimento do terceiro princípio, pois, dessa forma, propicia que cada elemento dos conjuntos envolvidos esteja presente em todos os agrupamentos.

Notamos que nas figuras 4 e 5, que representam o problema 7, os alunos demonstraram o entendimento do quarto princípio, pois não houve repetição de agrupamento.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Por entendermos que o desenvolvimento da competência matemática dos alunos só se dá por meio de atividades que lhes sejam significativas, nossa proposta, para as sequências de atividades, foi a de elaborar situações-problema diversificadas e compatíveis com suas realidades, mesmo sabendo que, em situações da realidade, as crianças não esgotam todas as possibilidades de combinação e que os problemas escolares solicitam que as crianças pensem em todos os tipos de combinações possíveis.

Acreditamos, ainda, que para o desenvolvimento dessa competência matemática e consequente melhora no desempenho das atividades escolares é necessário melhorar o conhecimento matemático dos professores que trabalham com os anos iniciais do Ensino Fundamental.

O Projeto do qual participamos – autores deste texto, escola, classe público-alvo, professora da turma – dá vez e voz a todos os envolvidos no que tange às discussões sobre os temas trabalhados. Relação direta do professor-pesquisador com sua orientadora, com a professora da turma e seus alunos tornaram muito próximo o suporte do professor-pesquisador à professora da classe pesquisada, agindo como um parceiro mais experiente.

Esse acompanhamento permitiu-nos dosar adequadamente as sequências de atividades que tinham como propósito identificar como as crianças transitam por situações de natureza combinatória.

Nesse sentido, pudemos observar que para o problema direto com duas ações, que interpretávamos ser o de maior facilidade para as crianças, não identificamos a simplicidade esperada, entretanto, após a intervenção, pudemos constatar considerável melhora nos resultados, embora não tivéssemos intenção de fazer estudos estatísticos pois nossa pesquisa é qualitativa.

Para o problema inverso, que já antevíamos apresentar dificuldade na resolução durante o primeiro momento, foi-nos possível observar que, no segundo momento, apesar de toda dificuldade que, habitualmente, os alunos têm nos problemas que envolvem a operação inversa, 46,2% (38,5% + 7,7%) dos alunos se apropriaram da compreensão dessa ideia.

Para o problema direto com três ações, ainda não trabalhado com eles no caderno do EMAI, entendíamos ser possível que tivessem maior dificuldade, tanto que nenhum aluno identificou quais eram as maneiras, apesar de 22,7% dos alunos terem registrado quantas eram. No segundo momento, após a intervenção, esses índices subiram para 26,9% em relação a quais eram as maneiras e 57,7% em relação a quantas eram.

Para o problema em forma de tabela, também não trabalhado no caderno do EMAI, até aquele momento, os alunos não apresentaram a dificuldade que era esperada, pois 10 alunos (45,5%) acertaram a resposta, ainda que apenas 8 deles tenham feito a indicação do produto. Já no segundo momento, o índice de acerto atingiu a marca de 80,8%.

Esses resultados apresentados refletem a importância da integração Universidade-Escola num trabalho conjunto, no qual a universidade participa com o apoio na formação do professor e a escola, com a possibilidade na melhoria da qualidade de ensino. Neste caso em especial, a segunda autora deste texto, orientadora da tese de doutorado do primeiro, é uma das autoras do material do EMAI e tem larga experiência em termos de pesquisa e atuação com formação de professores dos anos iniciais para ensinar Matemática, o que torna essa parceria muito bem sucedida.

Com relação ao problema que envolve a constituição de agrupamentos, pudemos observar que os alunos fazem uso dos princípios citados por Mekhmandarov.

Cabe destacar que é necessário que o professor se aproprie desses princípios para fazer as intervenções adequadas na resolução desse tipo de problema. Como este tema não é explorado na formação inicial, na maioria dos cursos, a formação continuada, como a vivenciada neste projeto de parceria, foi fundamental para a apropriação de fundamentos teóricos por parte dos professores do 5º ano.

REFERÊNCIAS

BORBA, R. E. S.; AZEVEDO, J. A construção de árvores de possibilidades com recurso computacional: o desenvolvimento do raciocínio combinatório de Karine e Vitória. In: SPINILLO, A. G.; LAUTERT, S. L. (Orgs.). **A pesquisa em psicologia e suas implicações para a educação matemática**. Recife: Ed. Universitária da UFPE, 2012, p. 89-1238.

OLIVEIRA, M. M. **Como fazer pesquisa qualitativa**. 4. ed. Petrópolis, RJ: Vozes, 2012.

SPINILLO, A. G. Raciocínio Combinatório em crianças: limites e possibilidades na resolução de problemas de produto cartesiano. In: ENCONTRO de Combinatória, Estatística e Probabilidade dos Anos Iniciais (Encepai), Recife, 2016. Raciocínio Combinatório em crianças: limites e possibilidades na resolução de problemas de produto cartesiano. **Anais Eletrônicos**, 2016.

VEGA, D. A. **Qual mais fácil resolver com 2, 3 ou 4 etapas de escolha**: produto cartesiano, arranjo, combinação ou permutação? 2014. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática e Tecnológica) – Programa de Pós-graduação em Educação Matemática e Tecnológica, UFPE, 2014.

VERGNAUD, G. A teoria dos campos conceptuais. In: BRUN, J. (Dir.). **Didáctica das Matemáticas**. Lisboa: Instituto Piaget, 1996.

______. **A criança, a matemática e a realidade**: problemas do ensino da matemática na escola elementar. Trad. Maria Lúcia Faria Moro. Curitiba: Ed. da UFPR, 2009.