

ANTES QUE SEJA TARDE: aprendendo Combinatória desde o início da escolarização

Rute Elizabete de Souza Rosa Borba
Universidade Federal de Pernambuco
resrborba@gmail.com

Resumo

O principal argumento desse texto – que a Combinatória pode ser trabalhada desde os anos iniciais do Ensino Fundamental – baseia-se na observação de situações combinatórias no cotidiano das crianças; em recomendações curriculares; na verificação de que materiais didáticos já incluem diferentes tipos de situações combinatórias; em referenciais que defendem o longo processo de desenvolvimento de conceitos; e na constatação, em estudos anteriores, de que as crianças novas já são possuidoras de algumas noções combinatórias. Também são apresentados estudos que tiveram como objetivo analisar recursos para a aprendizagem da Combinatória no início da escolarização. Observou-se a eficácia do uso de material manipulativo, tais como figuras dos elementos de conjuntos dados, para o trabalho com crianças, desde a Educação Infantil e, também, material amparado no olfato e tato, para uma proposta inclusiva, junto a crianças com deficiência visual e crianças videntes. Verificou-se, também, que a construção de árvores de possibilidades – em lápis e papel ou no computador – é outro recurso que pode contribuir para a aprendizagem da Combinatória por crianças nos anos iniciais do Ensino Fundamental, lançando, desse modo, bases para aprendizados posteriores.

Palavras-Chave: Combinatória. Anos iniciais. Recursos. Ensino. Aprendizagem.

BEFORE IT'S TOO LATE: learning Combinatorics since early schooling

Abstract

The main argument of this text – that Combinatorics can be worked from the early years of Elementary School – is based on the observation of combinatorial situations in children's daily lives; in curriculum recommendations; the discovery that instructional materials include different kinds of combinatorial situations; in texts that advocate the long process of concept development; and findings, in previous studies, that young children already possess some combinatorial notions. Here are also presented studies that aimed to analyse resources for learning Combinatorics at the beginning of schooling. The efficacy of manipulative material was observed, such as pictures of the elements of data sets, to work with children from Kindergarten and also material supported in smell and touch, for an inclusive proposal, along with children visually impaired and sighted children. It was also observed that building tree diagrams – in pencil and paper or on the computer – is another resource that can contribute to the learning of Combinatorics for children in the early years of Elementary School, launching, thereby, basis for future learning.

Keywords: Combinatorics, Elementary School, resources, teaching, learning.

INTRODUÇÃO

ANTES CEDO DO QUE TARDE

As crianças estão em constante contato com muitas informações, as quais, por vezes, envolvem conceitos matemáticos não muito simples. Essas informações e conceitos se fazem presentes nas conversas cotidianas, em alguns jogos e brincadeiras e, também, na mídia. Nesse contexto, as crianças se deparam, desde cedo, com situações que envolvem conceitos da Matemática mais complexos, tais como os presentes na Estatística, na Probabilidade e na Combinatória. Em particular, as crianças no dia a dia fazem escolhas baseadas em ideias combinatórias, tais como as referentes ao que escolher na hora de lanches e refeições; como se organizarem em equipes; como guardarem materiais e brinquedos etc.

Recomenda-se, para enfrentamento das demandas sociais atuais, que, desde os anos iniciais do Ensino Fundamental as crianças sejam estimuladas no desenvolvimento de seus raciocínios estatístico, probabilístico e combinatório (BRASIL, 1997). Por serem formas mais complexas de pensamento, que envolvem raciocínios hipotético-dedutivos, defende-se que quanto mais cedo os conceitos envolvidos nessas formas de pensamento forem abordados na escola, mais oportunidades as crianças terão de refletir sobre os mesmos, pensarem e repensarem as ideias intuitivas que possuem e de avançarem em seus modos de raciocinar.

Nos anos finais do Ensino Fundamental e no Ensino Médio, conceitos matemáticos mais elaborados são trabalhados de modo mais formal, mas desde o início da escolarização, inclusive na Educação Infantil, é possível abordar noções e subconstrutos mais simples de alguns conceitos, a partir de situações práticas e lúdicas. Assim, as crianças, desde novas, podem ser estimuladas a pensarem em questões interessantes de investigação e como informações podem ser levantadas, organizadas, classificadas e interpretadas, bem como podem ser incentivadas a refletirem sobre como eventos ocorrem – de modo aleatório, previsível ou determinístico. Também, desde cedo, podem ser incentivadas a levantarem possibilidades de eventos ocorrerem e a enumerarem modos de elementos constituintes de uma situação serem combinados entre si.

Serão apresentadas, mais adiante nesse texto, evidências de que crianças novas possuem noções de Combinatória, a partir das quais seus raciocínios combinatórios podem ser desenvolvidos. Serão discutidas pesquisas realizadas junto a crianças da Educação Infantil e de anos iniciais do Ensino Fundamental que mostram conhecimentos possuídos por crianças novas e dificuldades que elas enfrentam frente a situações combinatórias.

Ressalta-se, também, que conceitos mais complexos – tais como os da Combinatória – estão presentes em recursos didáticos dos anos iniciais do Ensino Fundamental, como foi comprovado no estudo de Barreto e Borba (2010). Essas autoras realizaram um levantamento em livros didáticos aprovados no Plano Nacional do Livro Didático (PNLD) 2007, da 1ª a 4ª série (atuais 2º e 5º anos da Educação Básica). Observaram, nas cinco coleções (20 volumes) analisadas, problemas de Combinatória variados (de *combinação*, *produto cartesiano*, *permutação* e *arranjo*¹), embora apenas os *produtos cartesianos*² fossem explicitamente ressaltados como problemas de levantamento de possibilidades – portanto, situações combinatórias. Verificou-se, desse modo, que problemas de Combinatória estão presentes em livros destinados a estudantes em início de escolarização, mas é preciso que os professores tenham consciência de sua presença e saibam como tratar situações combinatórias variadas de modo adequado. Para isso, recomenda-se que os manuais de professores apontem a presença de diferentes tipos de problemas combinatórios nas atividades propostas aos estudantes, bem como orientem os professores sobre as semelhanças e diferenças entre esses problemas e como tratá-los adequadamente junto às crianças de anos iniciais de escolarização.

Vergnaud (1986) defende que o processo de aquisição de conceitos é longo, uma vez que para cada conceito há um conjunto de situações que dão significado ao mesmo, há distintas relações e propriedades associadas a cada conceito e há formas diversificadas de representá-los. Assim, para que a variedade de aspectos associados a um conceito seja vivenciada pelas pessoas, um longo período de tempo se faz necessário. Dessa forma, conceitos mais complexos – como os associados à Combinatória – podem ser trabalhados desde o início da escolarização para que, ao se tratar da Análise Combinatória no Ensino Médio, ideias anteriormente desenvolvidas possam ser ampliadas e consolidadas.

Na introdução a esse texto, argumentou-se que a Combinatória, assim como a Estatística e a Probabilidade, pode ser trabalhada desde os anos iniciais do Ensino

¹ Segundo Borba (2010, 2013), os problemas combinatórios variam de acordo com o modo de *escolha de elementos* – sejam de um conjunto único, sejam de dois ou mais conjuntos – e também se diferenciam quanto à *ordenação dos elementos*, ou seja, se a ordem dos elementos indica, ou não, possibilidades distintas. Para maiores detalhes do que caracteriza os diferentes tipos de problemas combinatórios (*arranjos*, *combinações*, *permutações* e *produtos cartesianos*), pode-se consultar diversos textos que se encontram em <http://geracaoufpe.blogspot.com.br/>

² Vergnaud (1991) denomina alguns problemas multiplicativos de *produtos de medida*, ou seja, problemas de relação ternária entre medidas e, baseado em estudos piagetianos (tais com Inhelder e Piaget, 1976), esse autor também utiliza a nomenclatura *produtos cartesianos*, uma vez que a tabela cartesiana é uma das formas mais usuais de representar o conjunto de pares ordenados, cujo primeiro termo pertence a um conjunto e o segundo termo pertence a outro conjunto.

Fundamental e esse argumento baseia-se na observação de ideias combinatórias no cotidiano das crianças; em recomendações curriculares que se fundamentam, primordialmente, na necessidade de inserção social dos estudantes; na verificação de que alguns materiais didáticos – tais como livros didáticos de início de escolarização – já incluem problemas de diferentes tipos de situações combinatórias; em referenciais que defendem o longo processo de desenvolvimento de conceitos – que justifica iniciar seu estudo mais cedo; e na constatação de que as crianças já são possuidoras de algumas noções combinatórias, a partir das quais novos aprendizados podem ocorrer.

Serão apresentados, a seguir, resultados de pesquisas que apontam noções que as crianças já possuem antes de estudarem formalmente a Combinatória e também serão assinaladas dificuldades que os estudantes de anos iniciais do Ensino Fundamental possuem. Na seção posterior, outros estudos serão discutidos que mostram momentos de aprendizado de crianças novas – sem e com necessidades especiais – em início de escolarização, em contato com recursos apropriados para o desenvolvimento de seus raciocínios combinatórios.

O QUE DIZEM AS PESQUISAS SOBRE O RACIOCÍNIO COMBINATÓRIO DE CRIANÇAS NOVAS

Estudos diversos têm investigado o conhecimento de crianças diante de situações combinatórias e essas pesquisas têm apontado noções intuitivas anteriores ao aprendizado de Combinatória e também as dificuldades que as crianças em início de escolarização apresentam quando são solicitadas a resolverem problemas combinatórios. Nessa seção serão discutidas algumas dessas investigações e na seção seguinte serão debatidos estudos que buscaram realizar processos de ensino e de aprendizagem da Combinatória voltados para estudantes em início de escolarização.

Pessoa e Borba (2009) observaram que crianças de anos iniciais do Ensino Fundamental são capazes de resolverem alguns problemas combinatórios, antes mesmo de terem iniciado na escola o aprendizado de Combinatória. Participaram do estudo 99 estudantes de anos iniciais do Ensino Fundamental, com idades variando de 6 a 12 anos, de duas escolas (Escola A – ensino público; Escola B – ensino particular). Cada participante resolveu individualmente, e do modo que preferisse, oito problemas combinatórios (dois de cada tipo de problema: *arranjo*, *combinação*, *permutação* e *produto cartesiano*).

As autoras sugerem que os raciocínios combinatórios evidenciados pelas crianças podem ser fruto de experiências extraescolares – de escolha e combinação de objetos no cotidiano – e também argumentam que vivências escolares, não necessariamente relacionadas à Combinatória, podem ter influência no modo como as crianças pensam e como desenvolvem seus pensamentos combinatórios. Essas conclusões são derivadas da observação de que na 1ª série (atual 2º ano) o desempenho das crianças era muito baixo, mas, com o passar do tempo, seus desempenhos melhoraram, mesmo tendo tido pouco contato na escola com problemas combinatórios – em particular tendo resolvido explicitamente em sala de aula poucos problemas de um único tipo de problema combinatório – os *produtos cartesianos*. Argumenta-se, assim, que já que algumas melhoras de desempenho não podem ser creditadas ao ensino direto da Combinatória, podem, pelo menos em parte, ser explicadas pela influência de modos de pensamento desenvolvidos na escola, em conjunto com vivências cotidianas que exigem, de modo implícito, raciocínio combinatório.

À primeira vista, os desempenhos dos estudantes do estudo de Pessoa e Borba (2009) aparentam ser baixos (0% de acerto da 1ª série – atual 2º ano – tanto na Escola A, quanto na Escola B; 16% e 17% de média de acerto na 2ª série – atual 3º ano – na Escola A e na Escola B, respectivamente; 5% na Escola A, na 3ª série – atual 4º ano – e 23% nessa mesma série na Escola B; 17% e 27%, na Escola A e na Escola B, respectivamente, na 4ª série – atual 5º ano). Uma análise mais detalhada, entretanto, aponta que as crianças dos anos iniciais já diferenciam distintos tipos de problemas combinatórios e iniciam soluções combinatórias adequadas para os diferentes problemas apresentados. Observou-se que a dificuldade maior das crianças está em listar todas as possibilidades solicitadas, ou seja, muitas vezes elas iniciam corretamente suas soluções, mas, por falta de sistematização em suas resoluções, não conseguem chegar ao número total de possibilidades requeridas.

Salienta-se que as crianças investigadas por Pessoa e Borba (2009) não haviam aprendido na escola a lidar com distintos tipos de problemas combinatórios, mas, intuitivamente, criaram estratégias válidas para a resolução das situações postas. Para isso, utilizavam desenhos, diagramas, listagens, quadros e operações aritméticas simples. Esse estudo, portanto, traz evidências empíricas de que é possível trabalhar Combinatória desde os anos iniciais de escolarização, pois mesmo antes de serem ensinadas, as crianças se mostram capazes de compreender o que se solicita diante de situações combinatórias, embora nem sempre sejam plenamente capazes de chegarem ao número total de possibilidades dos problemas postos.

Vega e Borba (2014) apontam que diversos autores investigaram fatores que podem influenciar o desempenho de crianças em problemas combinatórios. Inhelder e Piaget (1976), bem como Moro e Soares (2006), apontaram em seus estudos o impacto do desenvolvimento cognitivo na resolução de problemas combinatórios. Por outro lado, Fischbein (1975) trouxe evidências de que o desenvolvimento cognitivo por si só não é suficiente, havendo forte influência também do aprendizado escolar. Confirmação de impacto da escolarização também foi evidenciado por Schliemann (1988). Pessoa e Borba (2009) apontaram a influência dos tipos de problemas combinatórios, e suas relações e propriedades características – observando os *produtos cartesianos* como os problemas de mais fácil resolução por parte das crianças e os de *permutação* como os problemas mais difíceis³. Essas autoras e outras, tais como Teixeira, Campos, Vasconcellos e Guimarães (2011), observaram a influência da ordem de grandeza do número de possibilidades – pois em problemas que esse número é menor, as crianças têm desempenho superior, uma vez que conseguem enumerar todas as possibilidades da situação posta. Correa e Oliveira (2011) apontaram que a descrição dos elementos das variáveis pode ser um facilitador da resolução de problemas combinatórios (tais como *combinações* e *arranjos*), mas essa facilitação não foi observada em problemas considerados muito fáceis (como *produtos cartesianos*) ou muito difíceis (tais como *permutações*). Silva e Spinillo (2011) observaram que a explicitação das possibilidades em enunciados de *produtos cartesianos* pode também ser um elemento que favoreça um melhor desempenho por parte de crianças. Assim, uma das dificuldades das crianças pode ser em não interpretar corretamente o que se deseja em situações combinatórias, ou seja, que se deseja todas as possíveis combinações de elementos e não apenas algumas das possibilidades.

Diante da constatação de que crianças novas já possuem alguns conhecimentos referentes a situações combinatórias, e perante indicação de dificuldades que estudos anteriores apontaram, sobre os diferentes tipos de problemas combinatórios, na seção que segue são apresentados estudos que tinham como objetivo a superação de obstáculos ao desenvolvimento do raciocínio combinatório por parte de crianças. São, portanto, descritas pesquisas que buscaram recursos variados para a aprendizagem da Combinatória no início da escolarização.

³ Vega e Borba (2014) apresentam evidências de que os desempenhos melhores em alguns *produtos cartesianos*, e piores em algumas *permutações*, podem ser explicados em função do número de etapas de escolha dos problemas. Maiores detalhes em <http://pgsskroton.com.br/seer/index.php/jieem/article/view/70/61>

RECURSOS PARA O APRENDIZADO DA COMBINATÓRIA NO INÍCIO DA ESCOLARIZAÇÃO

Pessoa e Borba (2012) observaram que crianças da Educação Infantil, com idades de 5 e 6 anos, estavam prontas a aprender como resolver problemas combinatórios simples, por intermédio do manuseio de material manipulativo, no caso fichas com desenhos dos elementos a serem combinados entre si. Diante de situações combinatórias simples – de *arranjos*, *combinações*, *permutações* e *produtos cartesianos* com baixo número total de possibilidades – as crianças percebiam que em *produtos cartesianos* precisavam escolher elementos de conjuntos distintos (como saias, de cores diferentes, de um conjunto; e blusas, também de cores variadas, de outro conjunto); que em *arranjos* e *combinações* deveriam escolher elementos de um conjunto único (como, por exemplo, posicionar em um álbum duas dentre três figurinhas de super-heróis; ou escolher três dentre quatro animais numa loja de bichinhos de estimação); e que em *permutações* necessitavam utilizar todos os elementos dos conjuntos (como colocar três crianças em posições variadas em uma fila).

Na Figura 1 tem-se um exemplo de uso de fichas com desenhos por uma das crianças investigadas por Pessoa e Borba (2012). Embora não completamente correta, a solução da criança evidencia algumas noções combinatórias importantes, em particular referente à escolha dos elementos a serem combinados.

Figura 1 – Solução de um problema de *combinação* por uma criança de cinco anos



Fonte: Pessoa e Borba (2012).

No problema, afirmava-se que na loja de bichinhos de estimação havia quatro animais: um cão, um gato, uma tartaruga e um papagaio, e perguntou-se, às crianças, de quantas

maneiras diferentes seria possível escolher três desses animais. Embora a criança não tenha levantado corretamente as quatro possibilidades (cão, gato e tartaruga; cão, gato e papagaio; cão, tartaruga e papagaio; gato, tartaruga e papagaio), ela mostrou compreensão quanto à escolha de elementos que deveria efetuar, ou seja, que deveria escolher três dentre os quatro animais listados. Entretanto, a criança não percebeu haver casos repetidos (cão, gato e papagaio repetido três vezes, embora em ordens diferentes) e que faltava um caso (gato, tartaruga e papagaio). Procedimentos semelhantes foram observados em soluções apresentadas por outras crianças de 5 e 6 anos de idade.

Assim, a relação de *escolha de elementos* foi mais facilmente percebida pelas crianças. Já a relação de *ordem* e a de *esgotamento de possibilidades* foi de mais difícil compreensão. Entender que a ordem dos elementos em *arranjos* indica possibilidades distintas e que em *combinações* a ordem não indica diferentes possibilidades, foi de mais difícil entendimento. Outros estudos, tais como Esteves e Magina (2001) e Pessoa e Borba (2010), indicam que essa é uma grande dificuldade, uma vez que estudantes de anos finais do Ensino Fundamental e do Ensino Médio ainda a possuem. Compreender que em problemas combinatórios escolares é preciso esgotar todas as possibilidades foi, ainda, de mais difícil apreensão pelas crianças da Educação Infantil, o que também foi observado por Pessoa e Borba (2010) com estudantes de todos os níveis de ensino (dos anos iniciais do Ensino Fundamental até o Ensino Médio).

Embora o estudo de Pessoa e Borba (2012) não tenha tido como objetivo o ensino de Combinatória, observou-se que o uso de material manipulativo possibilita que crianças desde a Educação Infantil sejam levadas a pensar sobre como é possível combinar elementos de distintas maneiras. Assim, as noções inicialmente evidenciadas podem ser aproveitadas para promover o desenvolvimento de seus raciocínios combinatórios – ressaltando-se a necessidade de considerar corretamente *escolha e ordenação* de elementos e *esgotamento* de todas as possibilidades.

Outro estudo que mostrou a eficácia do uso de material manipulativo no aprendizado da Combinatória foi o de Braz, Braz e Borba (2014), numa proposta voltada para a educação inclusiva. O objetivo da pesquisa foi o de desenvolver materiais que professores podem utilizar com crianças com deficiência visual, bem como com crianças videntes. Os materiais foram testados com uma criança deficiente visual e, por não poderem se basear na visão, os materiais se apoiavam em outros sentidos – como o olfato e o tato.

Para a resolução de um problema de *permutação*, por exemplo, solicitava-se que a criança deficiente visual, por meio do tato, distinguísse um carrinho, um caminhão e uma moto, como se pode observar na Figura 2. O problema mencionava que era para posicionar os três brinquedos em três vagas de estacionamento e a criança buscou, com o uso do material, os seis distintos modos de permutar os brinquedos: carrinho, caminhão e moto; carrinho, moto e caminhão; caminhão, carrinho e moto; caminhão, moto e carrinho; moto, carrinho e caminhão; e moto, caminhão e carrinho.

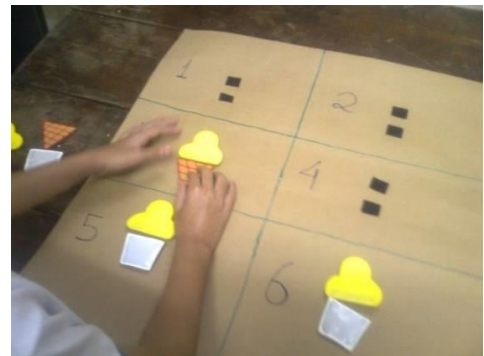
Figura 2 - Material disponibilizado para um problema de *permutação* de três brinquedos



Fonte: Braz, Braz e Borba (2014).

Para um dos problemas de *produto cartesiano*, a criança foi levada a distinguir entre casquinha ou copinho e entre essências de baunilha e de abacaxi para a montagem de opções de sorvete com um sabor e um recipiente, como se pode observar na Figura 3.

Figura 3 - Material utilizado para um problema de *produto cartesiano* de montagem de sorvetes



Fonte: Braz, Braz e Borba (2014).

As casquinhas disponibilizadas eram recortes de papelão com detalhes em cola colorida e os copinhos foram recortados de copos descartáveis – os quais facilitavam a distinção das duas opções de recipiente, por meio do tato. Já os dois sabores de sorvete eram indicados por recortes de pano nos quais foram colocadas essências de baunilha e de abacaxi, possibilitando sua distinção pelo olfato. Em um cartaz com velcro a criança pôde posicionar as quatro formas de combinar dois tipos de recipiente com dois sabores de sorvete: casquinha de sabor baunilha; casquinha de sabor abacaxi; copinho de sabor baunilha; e copinho de sabor abacaxi. Ressalta-se que havia mais material (casquinhas, copinhos e dois tipos de sabores) do que o necessário para se encontrar as quatro formas de os combinar, bem como no cartaz havia mais do que quatro posições – o que possibilitava que a criança continuasse a levantar mais possibilidades, caso achasse necessário.

Para um dos problemas de *combinação*, a criança foi estimulada a levantar as distintas maneiras de selecionar duas dentre três frutas – laranja, goiaba e maçã. Em pratos descartáveis a criança colocava as frutas duas a duas, distinguindo-as por meio do tato e do olfato, como se pode observar na Figura 4. O material, assim como em todos os problemas propostos, permitia que a criança levantasse todas as possibilidades – que nessa situação eram três: laranja com goiaba; laranja com maçã; e goiaba com maçã.

Figura 4 - Material utilizado para um problema de *combinação* de seleção de frutas



Fonte: Braz, Braz e Borba (2014).

De modo semelhante, problemas de *arranjo* foram trabalhados com a criança deficiente visual, bem como outros problemas dos outros tipos de situações combinatórias. Em todos os problemas a criança contou com o apoio de material manipulativo que era por ela distinguido pelo tato e/ou olfato.

Concluiu-se que a utilização desses recursos auxiliou a criança com deficiência visual no desenvolvimento de seu raciocínio combinatório, possibilitando o uso de variados

sentidos, motivando-a a pensar nas distintas possibilidades de cada situação e que materiais como os propostos podem ser utilizados também junto a crianças videntes. A proposta, portanto, mostrou-se eficiente para um trabalho inclusivo – possibilitando que deficientes visuais resolvam, por uso de material manipulativo baseado no tato e/ou no olfato, situações combinatórias variadas e que podem, ainda, interagir com crianças videntes na resolução de problemas de Combinatória.

Um terceiro estudo, que visou testar recursos para o ensino e a aprendizagem de Combinatória nos anos iniciais do Ensino Fundamental, foi realizado por Azevedo e Borba (2013), o qual baseava-se na construção de árvores de possibilidades – com e sem uso de um software educativo *Diagramas de Árbol* (AGUIRRE, 2005). A escolha por esse recurso – construção de árvores de possibilidades – se deu por acreditar-se que as mesmas são formas eficientes de solução de problemas combinatórios, uma vez que estruturam as situações de modo a possibilitar o levantamento sistemático dos elementos sendo combinados.

Participaram do estudo 40 crianças de 5º ano, separadas em quatro grupos. O primeiro grupo construiu árvores de possibilidades com o uso do software; o segundo realizou construções em lápis e papel; o terceiro grupo trabalhou, por meio de desenhos em lápis e papel, problemas multiplicativos, mas não combinatórios; e o quarto grupo não passou por nenhum processo específico de ensino, participando apenas das atividades usuais de sua sala de aula. A construção de árvores – sejam virtuais, sejam em lápis e papel – mostrou-se um recurso muito eficiente, pois os dois primeiros grupos tiveram melhoras significativas em seus desempenhos, comparando-se os resultados de um teste anterior ao aprendizado aos de dois testes realizados após o ensino: um logo após o ensino e outro nove semanas depois. Já os dois últimos grupos não tiveram melhoras, mostrando que não é suficiente esperar o amadurecimento cognitivo, nem trabalhar problemas multiplicativos de modo geral, sem discutir especificamente situações combinatórias.

O software trabalhado – *Diagramas de Árbol* – foi disponibilizado para pesquisa pelos autores Sandoval, Trigueiros e Lozano (2007). A partir da inserção dos dados de variáveis (como indicado na Figura 5), o software gera árvores de possibilidades (tal como se pode observar na Figura 6). Nesse caso, tem-se um problema de *produto cartesiano*, no qual podem ser observados os seis modos distintos de escolha dentre três sabores de suco e dois tamanhos de copo.

As crianças resolveram, com uso do software, problemas também de *arranjo*, *combinação* e *permutação*. Após a determinação das variáveis e dos elementos envolvidos, o

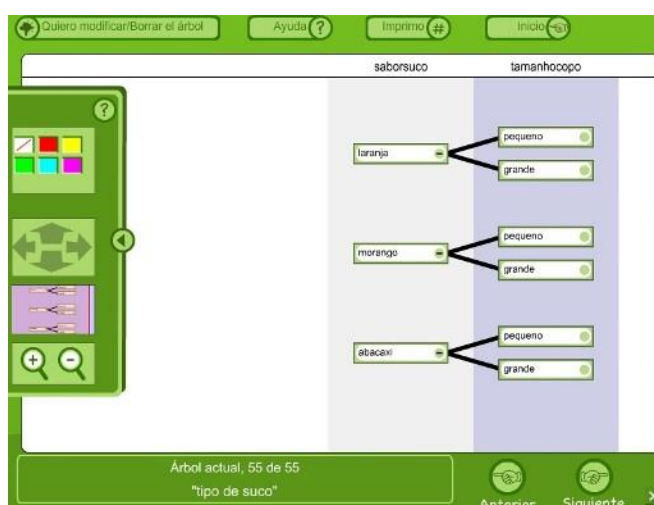
software gerava a árvore correspondente e as crianças eram levadas a interpretar o diagrama produzido.

Figura 5 - Escolha dos níveis para definição de uma árvore de possibilidades no *Árbol*



Fonte: Aguirre (2005).

Figura 6 - Árvore de possibilidades criada pelo software para uma situação de *produto cartesiano*



Fonte: Aguirre (2005).

O segundo grupo de crianças construiu árvores de possibilidades em lápis e papel, dos mesmos problemas trabalhados pelo primeiro grupo. Tanto em um grupo quanto no outro, as crianças eram estimuladas a perceberem a importância da escolha dos elementos, bem como a refletirem se a ordem desses elementos gerava, ou não, novas possibilidades.

Na Figura 7 pode-se observar a resolução de uma criança do segundo grupo – que foi estimulada a construir árvores de possibilidades em lápis e papel – após o período de ensino. Ressalta-se que se trata de um problema de *combinação* no qual a criança corretamente

percebeu que os elementos repetidos não constituíam possibilidades distintas, ou seja, uma vez que a escolha dos professores Ricardo e Tânia, por exemplo, havia sido feita, não se deveria considerar a combinação Tânia e Ricardo – pois representa a mesma possibilidade anteriormente listada. Por intermédio da construção da árvore de possibilidades, a criança percebeu serem seis as possibilidades totais.

Figura 7 – Representação de um problema de *combinação* por criança do grupo que foi estimulada a construir árvores de possibilidades com o uso do lápis e papel

3. Uma escola tem quatro professores (Ricardo, Tânia, Luiza e Sérgio). Para o passeio da escola serão escolhidos dois professores para acompanhar os alunos. De quantas maneiras diferentes podem ser escolhidos esses dois professores?

Resposta: 5 6

Fonte: Azevedo (2013).

Observou-se, assim, que as crianças que tiveram a experiência de construir árvores – virtualmente ou no lápis e papel – aprenderam a organizar melhor as suas soluções. Puderam, dessa forma, superar dificuldades iniciais no esgotamento de todas as possibilidades.

Nos testes após a instrução, as crianças utilizavam, geralmente, árvores ou listagens. As listagens, que eram uma preferência das crianças, passaram a ser efetuadas de modo sistematizado, com cuidado para não deixar nenhuma possibilidade não listada ou a não repetir possibilidades já listadas, como se pode observar na Figura 8.

Figura 8 – Listagem utilizada por criança do grupo que aprendeu com o *Árbol* nove semanas após a realização da atividade com o *software*

2. Na festa de São João da Escola Saber o 5º ano irá dançar quadrilha. Na turma tem seis meninos (Gabriel, Thiago, Matheus, Renato, Otávio e Felipe) e quatro meninas (Taciana, Eduarda, Letícia e Rayssa). A professora quer que todos os meninos dançam com todas as meninas. Quantos casais diferentes podem ser formados?

Resposta: 24 casais diferentes.

Fonte: Azevedo (2013).

Desse modo, constatou-se que a construção de árvores de possibilidades – seja em lápis e papel, seja no computador – é um recurso que pode auxiliar crianças numa melhor compreensão de situações combinatórias – por intermédio de uma maior sistematização – e, dessa forma, contribuir para o desenvolvimento do raciocínio combinatório de crianças em início de escolarização.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

ANTES QUE SEJA TARDE

Buscou-se, no presente texto, defender e apresentar evidências de que é possível iniciar o ensino de Combinatória desde os anos iniciais do Ensino Fundamental, ou mesmo na Educação Infantil. Argumenta-se que o trabalho com situações combinatórias simples desde o início da escolarização pode fundamentar um melhor desenvolvimento do raciocínio necessário para o estudo da Combinatória no Ensino Médio.

Questiona-se, aqui, o que falta para que o estudo de conceitos mais complexos – como os da Combinatória – se inicie antes e como estimular esse trabalho desde cedo, para que mais tarde se tenham sólidas bases para o maior aprofundamento na compreensão de situações combinatórias mais elaboradas. São, assim, sugeridos, nesse texto, caminhos para o ensino e a aprendizagem da Combinatória desde os primeiros anos na escola, inclusive com incentivo à inclusão de alunos com deficiência visual.

Um primeiro passo é a conscientização de que as crianças novas já possuem algumas noções intuitivas e conhecimentos iniciais referentes à Combinatória. Essas noções e conhecimentos iniciais, acredita-se, são resultantes de experiências cotidianas – de dentro e de fora da escola. Um segundo passo para o incentivo do trabalho com Combinatória no início da escolarização é o de que estudos já delinearam bem as dificuldades a serem superadas e o ensino deve ser voltado para a superação das mesmas. As mais fortes dificuldades são a compreensão de que todas as possibilidades de combinação são solicitadas e não apenas algumas delas e a necessidade de uma busca sistematizada de todas as possibilidades requeridas. Um terceiro passo é o reconhecimento de que há recursos de ensino apropriados para trabalhar situações combinatórias com crianças em início de escolarização, recursos esses acessíveis às crianças e já anteriormente testados em investigações junto a estudantes em início de escolarização.

Defende-se a necessidade de conscientização de que as recomendações curriculares podem se basear em evidências empíricas de conhecimentos intuitivos por parte das crianças; que as pesquisas apontam boa base de conhecimento que as crianças podem desenvolver ainda na infância, bem como obstáculos aos seus desenvolvimentos; e que há recursos – livros didáticos, materiais manipulativos e recursos tecnológicos – a partir dos quais situações combinatórias podem ser trabalhadas de modo mais simples com crianças.

Para que se torne uma realidade o trabalho com Combinatória, bem como Estatística e Probabilidade, nos anos iniciais do Ensino Fundamental, é preciso mais espaços de debate de como incluir esses focos na sala de aula de início de escolarização; é necessário preparar o professor – em processos de formação inicial e continuada – para que esse se sinta seguro em iniciar o estudo de conceitos matemáticos mais complexos; e, também, é recomendado o desenvolvimento de materiais de apoio a esse trabalho em sala de aula.

Desse modo, não será tarde demais para os estudantes apreenderem conceitos da Combinatória, nem tarde demais para desenvolverem mais seus raciocínios combinatórios quando da introdução formal da Análise Combinatória no Ensino Médio.

Começando cedo, se poderá ir bem mais longe...

REFERÊNCIAS

AGUIRRE, C. **Diagrama de Árbol**. Multimídea. [s.l.]: [s.n.], 2005.

AZEVEDO, Juliana. **Alunos de anos iniciais construindo árvores de possibilidades: É melhor no papel ou no computador?** 2013. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática e Tecnológica) - Programa de Pós-graduação em Educação Matemática e Tecnológica, UFPE, Recife, 2013. Disponível em: <http://www.gente.eti.br/edumatec/>

AZEVEDO, Juliana; BORBA, Rute. Combinatória: A construção de árvores de possibilidades por alunos dos anos iniciais com e sem uso de software. **Alexandria - Revista de Educação em Ciência e Tecnologia**, Florianópolis, v. 6, n. 2, p. 113-140, junho 2013.

BARRETO, Fernanda; BORBA, Rute. Como o raciocínio combinatório tem sido apresentado em livros didáticos de anos iniciais. In: 10º Encontro Nacional de Educação Matemática – X ENEM. **Anais...** Salvador, 2010.

BORBA, Rute. O raciocínio combinatório na Educação Básica. In: 10º Encontro Nacional de Educação Matemática – X ENEM. **Anais...** Salvador, 2010.

- BORBA, Rute. Vamos combinar, arranjar e permutar: Aprendendo Combinatória desde os anos iniciais de escolarização. In: 11º Encontro Nacional de Educação Matemática – XI ENEM. **Anais...** Curitiba, 2013.
- BRASIL. Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica. **Parâmetros Curriculares Nacionais. Matemática. 1º e 2º ciclos.** Brasília, DF, 1997.
- BRAZ, Flávia; BRAZ, Ana; BORBA, Rute. **Educação inclusiva de alunos com deficiência visual:** desenvolvimento de materiais manipulativos para o ensino de Combinatória. Trabalho de Conclusão de Curso. Pedagogia, Centro de Educação, UFPE, 2014.
- CORREA, Jane; OLIVEIRA, Gisele. A escrita do problema e sua resolução: o entendimento intuitivo acerca da combinatória. **Educar em Revista**, Curitiba, n. especial 1, p. 77-91, 2011.
- ESTEVES, Inez; MAGINA, Sandra. Investigando os fatores que influenciam o raciocínio combinatório em adolescente de 14 anos – 8ª série do Ensino Fundamental. In: 7º Encontro Nacional de Educação Matemática – VII ENEM. **Anais...** Rio de Janeiro, 2001.
- FISCHBEIN, Efraim. **The intuitive sources of probabilistic thinking in children.** Dordrecht: Reidel, 1975.
- INHELDER, Barbel; PIAGET, Jean. **Da lógica da criança à lógica do adolescente.** São Paulo: Livraria Pioneira Editora, 1976.
- MORO, Maria Lúcia; SOARES, Maria Tereza. Níveis de raciocínio combinatório e produto cartesiano na escola fundamental. **Revista Educação Matemática Pesquisa**, São Paulo, v. 8, n. 1, p. 99-124, 2006.
- PESSOA, Cristiane; BORBA, Rute. Quem dança com quem: o desenvolvimento do raciocínio combinatório de crianças de 1ª a 4ª série. **Zetetiké**, Campinas, v. 17, jan-jun. 2009.
- PESSOA, Cristiane; BORBA, Rute. Desenvolvimento do Raciocínio Combinatório na Escolarização Básica. **Em Teia: Revista de Educação Matemática e Tecnológica Iberoamericana**, Recife, v. 1, n. 1, 2010.
- PESSOA, Cristiane; BORBA, Rute. Do young children notice what combinatorial situations require? In: 36th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education – PME 36. **Proceedings...** Taiwan, 2012.
- SANDOVAL, Ivone; TRIGUEIROS, Maria; LOZANO, Dolores. Uso de un interactivo para el aprendizaje de algunas ideas sobre combinatoria en primaria. In: 12ª Conferência Interamericana de Educação Matemática – XII CIAEM. **Anais...** Querétaro, México, 2007.
- SCHLIEMANN, Analúcia. A compreensão da análise combinatória: desenvolvimento, aprendizagem escolar e experiência diária. In: CARRAHER, T. N.; CARRAHER, D.; SCHLIEMANN, A. **Na vida dez, na escola zero.** São Paulo: Cortez, 1988.

SILVA, Juliana; SPINILLO, Alina. Como auxiliar crianças na resolução de problemas de raciocínio combinatório: a explicitação dos princípios invariantes. In: 13ª Conferência Interamericana de Educação Matemática – XIII CIAEM. **Anais...** Recife, 2011.

TEIXEIRA, Leny; CAMPOS, Edileni; VASCONCELLOS, Mônica; GUIMARÃES, Sheila. Problemas multiplicativos envolvendo combinatória: estratégias de resolução empregadas por alunos do Ensino Fundamental público. **Educar em Revista**, Curitiba, n. 1, 2011.

VEGA, Danielle; BORBA, Rute. Etapas de escolha na resolução de produtos cartesianos, arranjos, combinações e permutações. **JIEEM – Jornal Internacional de Estudos em Educação Matemática**, São Paulo, v. 7, n. 3, p. 27 a 73, 2014.

VERGNAUD, G. Psicologia do desenvolvimento cognitivo e didática das matemáticas. Um exemplo: as estruturas aditivas. **Análise Psicológica**, Lisboa, n. 1, p. 75-90, 1986.

VERGNAUD, G. **El niño, las matemáticas y la realidad** - Problemas de la enseñanza de las matemáticas en la escuela primaria. Mexico: Trillas, 1991.