ISSN 2177-9309
em teia Revista de Educação Matemática e Tecnológica Iberoamericana
Universidade Federal de Pernambuco
Pós-Graduação em Educação Matemática e Tecnológica EDUMATEC

ALTERNATIVAS PARA DESENVOLVER FORMAS APROPRIADAS DE RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS DE PRODUTO CARTESIANO

Alina Galvão Spinillo
Doutorado, Professora Titular
Universidade Federal de Pernambuco, Brasil
alinaspinillo@hotmail.com

Juliana Ferreira Gomes da Silva
Doutorado, Professora Adjunto I
Universidade Federal de Alagoas, Brasil
julianafgs@yahoo.com.br

Resumo

O presente artigo, a partir de uma análise acerca de resultados de pesquisas realizadas com crianças, discute alternativas para desenvolver formas apropriadas de resolução de problemas que envolvem o raciocínio combinatório. Inicialmente são apresentadas as dificuldades que as crianças enfrentam ao resolver problemas desse tipo, especificamente, problemas de produto cartesiano. Em seguida são apontadas as possibilidades do raciocínio infantil para a progressão deste raciocínio em estudantes do Ensino Fundamental, sendo discutidas e ilustradas as estratégias que as crianças adotam ao resolver problemas de produto cartesiano. Analisando-se alguns estudos na área, ressalta-se a importância de explicitar para os alunos os princípios básicos envolvidos no raciocínio combinatório, em especial, as relações um para muitos que são essenciais para o raciocínio combinatório e que são difíceis de serem compreendidas pelas crianças. Os resultados das pesquisas discutidas neste artigo evidenciam que a explicitação dessas relações (por meio de diagramas ou por meio da linguagem) é capaz de promover formas de raciocinar mais adequadas na resolução de problemas de produto cartesiano. Ao final são apontadas implicações educacionais com vistas a promover o desenvolvimento deste tipo de raciocínio já nos anos iniciais do Ensino Fundamental.

Palavras-chave: Raciocínio Combinatório. Problemas de Produto Cartesiano. Ensino Fundamental.

Alternatives to develop appropriate ways of solving cartesian product problems

Abstract

This paper discusses alternatives to develop appropriate ways of solving problems involving combinatorial reasoning. The discussion is based on the analysis of the results of researches conducted with children. Firstly, we present the difficulties faced by children when solving mathematical problems of this type. Secondly, we consider the alternatives and describe how children's reasoning is developed. The strategies used by children to solve Cartesian product problems are also discussed. We draw attention to the importance of explaining to students the basic principles involved in combinatorial reasoning, in particular the one-to-many relations, which are considered difficult to understand. The research results discussed in this article show that through the explicit mention of these relationships (through diagrams or through language) we can arrive at more appropriate ways of solving Cartesian product problems. Finally, we consider the educational implications of these results. This is done with a view to promoting the development of combinatorial reasoning in the early years of elementary school.

Keywords: Combinatorial Reasoning. Cartesian Product Problems. Elementary School.

INTRODUÇÃO

Sem dúvida, a resolução de problemas que requerem o uso do raciocínio combinatório é um desafio para alunos do ensino fundamental devido à complexidade do raciocínio combinatório, como documentado por diversos estudiosos (BATANERO; GODINO; NAVARRO-PELAYO, 1997; EIZENBERG; ZASLAVSKY, 2003; HADAR; HADASS, 1981; INHELDER; PIAGET, 1976). Contudo, a relevância do raciocínio combinatório para o desenvolvimento do raciocínio lógico-matemático de maneira mais ampla tem levado um número expressivo de estudiosos a investigar a natureza das dificuldades que o aluno do Ensino Fundamental apresenta ao solucionar problemas de combinatória e a explorar situações que possam auxiliar a superar essas dificuldades. Compreender tais aspectos tem implicações educacionais importantes, sendo este o foco do presente artigo que, inserido no campo da Psicologia da Educação Matemática[1], lança um olhar otimista sobre a literatura da área, buscando evidências empíricas que ilustrem as situações em que crianças, alunas do Ensino Fundamental, resolvem de forma bem sucedida problemas de combinatória. Entretanto, mais do que apenas ilustrar tais situações, o artigo procura explicar a razão desse sucesso, teorizando acerca daquilo que tais situações propiciam que favorecem a superação das dificuldades, levando as crianças a adotarem formas apropriadas de resolução.

Assim, o presente artigo se caracteriza como uma reflexão de natureza teórica fortemente ancorada em evidências empíricas com vistas a fundamentar a proposição de que não é apenas desejável, mas, sobretudo, possível, inserir a resolução de problemas de combinatória no Ensino Fundamental, alinhando-se com o que se observa em algumas propostas curriculares (NCTM, 2000).

[1] Para maiores informações acerca deste campo do conhecimento, interdisciplinar por excelência, ver Falcão (2003) e Schliemann et al. (1997).

A partir da literatura observa-se que dentre os diferentes tipos de problemas de combinatória (produto cartesiano, permutação, arranjo e combinação), os problemas de produto cartesiano são considerados os menos complexos, como documentado por Pessoa e Borba (2007). Por esta razão, são esses os tipos de problemas tratados no presente artigo em que são ilustrados os procedimentos de resolução adotados por crianças com vistas a exemplificar formas de resolução bem-sucedidas.

Um segundo aspecto, também documentado na literatura, é que a principal dificuldade das crianças ao resolverem problemas de combinatória reside no estabelecimento de relações um para muitos que são cruciais na resolução desses tipos de problemas.

OS LIMITES DO PENSAMENTO INFANTIL: AS DIFICULDADES EM ESTABELECER AS RELAÇÕES UM PARA MUITOS

A relação um para muitos é um princípio básico do raciocínio combinatório que se configura a partir do esquema de correspondência. Piaget e Szeminska (1971) definem o esquema de correspondência como um recurso que auxilia na decomposição de quantidades a serem comparadas entre si. O esquema de correspondência não surge de maneira abrupta no pensamento das crianças, mas é gradativamente construído. Inicialmente, há o desenvolvimento da correspondência termo-a-termo (também denominada um para um), geralmente utilizada ao se comparar objetos, quantidades ou conjuntos. Por exemplo, no decorrer de uma brincadeira a criança observa que para cada boneca deve haver um vestido, ou que para cada copo que coloca na mesa deve haver um prato; nestas situações a criança é levada a perceber que cada objeto corresponde unicamente a outro. A correspondência termo-a-termo traz consigo o entendimento do princípio de equivalência: ao compreender a relação de um copo por prato pode-se inferir que se existirem seis copos, para que haja correspondência termo-a-termo, o número de pratos deve ser o mesmo, ou seja, seis pratos.

Além do esquema de correspondência termo-a-termo, há outro esquema associado ao raciocínio multiplicativo: a correspondência um-para-muitos que se caracteriza pela relação de um elemento com um conjunto de elementos. Seu desenvolvimento está intimamente relacionado às primeiras ideias multiplicativas, pois é preciso que se compreenda que um objeto pode se relacionar com vários e não apenas com um, como na correspondência termo-a-termo. Por exemplo, estabelecer uma relação entre um jarro e três flores, compreendendo que se para cada jarro há três flores, no caso de haver cinco jarros haverá 15 flores.

De acordo com Nunes e Bryant (1997), a correspondência um-para-muitos envolve ainda a compreensão de dois conceitos: proporção e fator escalar. A proporção pode ser expressa por um par numérico que se mantém constante mesmo quando a quantidade de elementos do conjunto varia, por exemplo, na correspondência 1 ano para 12 meses, ao se acrescentar um elemento ao conjunto “ano” deverão ser acrescentados doze elementos ao conjunto “meses”, mantendo a relação entre os dois conjuntos constante. O fator escalar refere-se ao número de replicações aplicadas em cada conjunto. Assim, na relação 1 ano para 12 meses e 5 anos para 60 meses a proporção (aqui representada em termos de razão) permanece constante, pois o mesmo fator escalar foi aplicado em cada conjunto.

A partir dessa breve descrição, fica vidente que a relação um para muitos é bem mais complexa que a relação termo-a-termo, sendo, como mencionado, um princípio básico do raciocínio combinatório. A aquisição deste esquema de correspondência é gradual. Por exemplo, Magina, Spinillo e Melo (no prelo), tomando por base a progressão originalmente proposta por Moro e Soares (2006) e posteriormente adotada por Spinillo e Silva (2010), identificaram quatro estratégias de resolução de problemas de produto cartesiano, das quais duas expressam as dificuldades com as relações um para muitos: a estratégia de combinações fixas e a estratégia de combinações flexíveis.

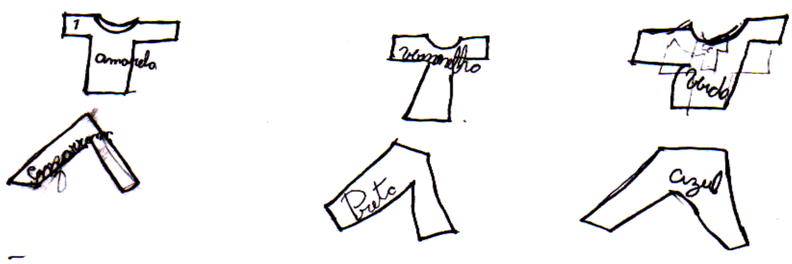
<u>Combinações fixas:</u> A criança estabelece combinações fixas que se configuram por relações um para um, combinando um elemento de um subconjunto com um elemento do outro subconjunto, como nos exemplos que se seguem:

Exemplo 1 (SPINILLO et al., 2014, p. 4):

Problema: Pedro tem três calças (preta, marrom e azul) e cinco camisas (amarela, vermelha, verde, laranja e cinza). Ele pode combinar as calças com as camisas para formar conjuntos. Quantos conjuntos diferentes Pedro pode formar?

Procedimento de resolução:

Figura 1: Procedimento adotado na resolução do problema das calças e camisas por meio de combinações fixas (relações um para um).



Ao explicar como havia resolvido o problema, a criança afirma: “Pedro só tem três calças, as camisas laranja e cinza vão sobrar; se ele tivesse cinco calças dava pra fazer cinco conjuntos, mas ele só tem três”.

Note-se que foram estabelecidas combinações fixas que não podiam ser desfeitas (uma dada calça e uma dada camisa), desconsiderando-se o princípio de que cada elemento dos conjuntos ou medidas elementares está presente em todas as combinações formadas (correspondência um para muitos) e o princípio de que cada elemento de um conjunto se combina com todos os elementos do outro conjunto elementar (uma camisa com todas as calças). A criança não percebe que todos os elementos precisam estar envolvidos e que nenhum deles pode ser excluído das combinações. Essas combinações fixas se baseiam na correspondência um para um.

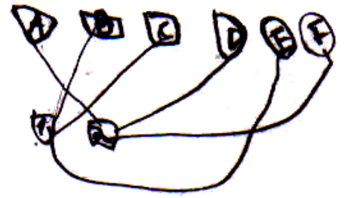
<u>Combinações flexíveis:</u> A criança estabelece combinações com certo grau de flexibilidade, aceitando a ideia de que um dado elemento de um conjunto pode combinar com mais de um elemento do outro conjunto, como ilustrado a seguir:

Exemplo 2 (SPINILLO et al., 2014, p. 5):

Problema: Um parque de diversão tem seis entradas (A, B, C, D, E, F) e duas saídas (1, 2). Combinando as entradas e saídas Daniela pode fazer caminhos para entrar e sair do parque. De quantas maneiras diferentes ela pode entrar e sair desse parque?

Procedimento de resolução:

Figura 2: Procedimento adotado na resolução do problema de entradas e saídas do parque de diversão por meio de combinações flexíveis (relações um para alguns).



O exemplo na Figura 2 ilustra os primórdios da correspondência um para muitos, que em estudo anterior foi denominada correspondência um para alguns, pois um elemento de um conjunto se combina com alguns elementos do outro conjunto, mas não com todos. Embora esta estratégia seja um avanço em relação à estratégia anterior, devido à flexibilidade das combinações, ainda consiste em uma forma de raciocinar insuficiente para resolver problemas de produto cartesiano.

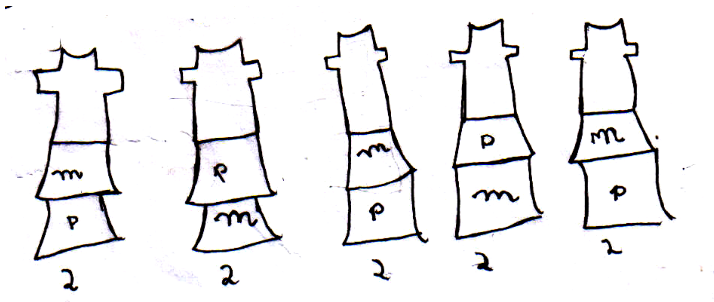
Formas apropriadas de resolução requerem outras maneiras de estabelecer as relações entre os elementos dos conjuntos elementares[2], como descrito e ilustrado a seguir.

<u>Solução Combinatória</u>*:* verifica-se o estabelecimento da correspondência um para muitos em que todos os elementos de um conjunto se combinam com todos os elementos do outro conjunto, como neste exemplo:

Exemplo 3 (SILVA, 2010, p. 83):

Ana tem 2 saias (marrom e preta) e 5 blusas (rosa, laranja, azul, verde e vermelha). Ela quer combinar as saias e as blusas para formar conjuntos. Quantos conjuntos diferentes ela pode formar? A solução dada foi:

Figura 3: Procedimento adotado na resolução do problema saias e blusas por meio de combinações sistemáticas (relações um para muitos).



Após responder que seriam 10 conjuntos, a criança explica:

C[3]: Eu desenhei as cinco blusas. Depois coloquei uma saia para cada blusa e depois coloquei a outra saia que faltava.

E: Por que você colocou o número 2 aqui embaixo?

C: Porque cada blusa pode combinar com a saia marrom e com a saia preta, são dois conjuntos.

E: Entendo. Mas como descobriu que eram 10 conjuntos?

C: Eu contei. Ficou 2 + 2 + 2 + 2 + 2. Eu somei tudo e deu 10. 10 conjuntos.

[2] Conjunto elementar se refere aos elementos de determinado conjunto, por exemplo, o conjunto de saias ou de blusas.

[3] Foram adotadas as convenções: C – para designar a criança, E - para designar o experimentador.

O exemplo da Figura 3 ilustra a correspondência um para muitos, pois um elemento de um conjunto se combina com todos os elementos do outro conjunto. A criança encontra todas as possíveis combinações entre os elementos, aceitando que um item de um conjunto elementar pode ser combinado com todos os itens do outro conjunto elementar.

Como levar as crianças a raciocinar de modo a estabelecer as relações um para muitos ao resolverem problemas de combinatória?

AS POSSIBILIDADES DO PENSAMENTO INFANTIL: AS EVIDÊNCIAS EMPÍRICAS

Apesar das dificuldades em estabelecer as relações um para muitos, algumas pesquisas na literatura indicam que as crianças conseguem estabelecer tais relações quando em determinadas situações. De acordo com alguns autores, esta dificuldade decorre do fato de que nos problemas de produto cartesiano essas relações estão implícitas (NUNES; BRYANT, 1997; TEIXEIRA; VASCONCELLOS; GUIMARÃES, 2009). Como tornar essas relações explícitas para as crianças? Resposta a esta pergunta pode ser encontrada ao se analisar pesquisas cujos resultados apontam para as possibilidades do raciocínio da criança. Esses estudos, com diferenças metodológicas marcantes, têm em comum o fato de proporem situações que tinham por objetivo promover o raciocínio combinatório. Outro ponto em comum, segundo nossa análise, é o fato de tornarem explícitas as relações um para muitos. Como essas pesquisas tornaram explícitas essas relações? Teorizando acerca dos recursos metodológicos adotados nessas investigações, verifica-se que dois aspectos desempenharam papel crucial: sendo uma de natureza diagramática e outro de natureza linguística.

A árvore de possibilidades: o papel dos diagramas

Amplamente conhecida por pesquisadores e educadores, a árvore de possibilidades consiste em uma representação gráfica que tem facilitado a resolução de problemas de combinatória, como documentado por diversos pesquisadores (AZEVEDO; BORBA, 2013a, 2013b; FISCHBEIN; GROSSMAN, 1997; FISCHBEIN; PAMPU; MÎNZAT, 1970).

Borba e Pessoa (2013), em um extenso levantamento de estudos realizados pelo Grupo Geração[4], documentam resultados positivos obtidos por meio do uso de árvores de possibilidades elaboradas com o uso de lápis e papel e com o uso de um *software*. Uma das

[4] Grupo de Estudos em Raciocínio Combinatório do Centro de Educação da UFPE.

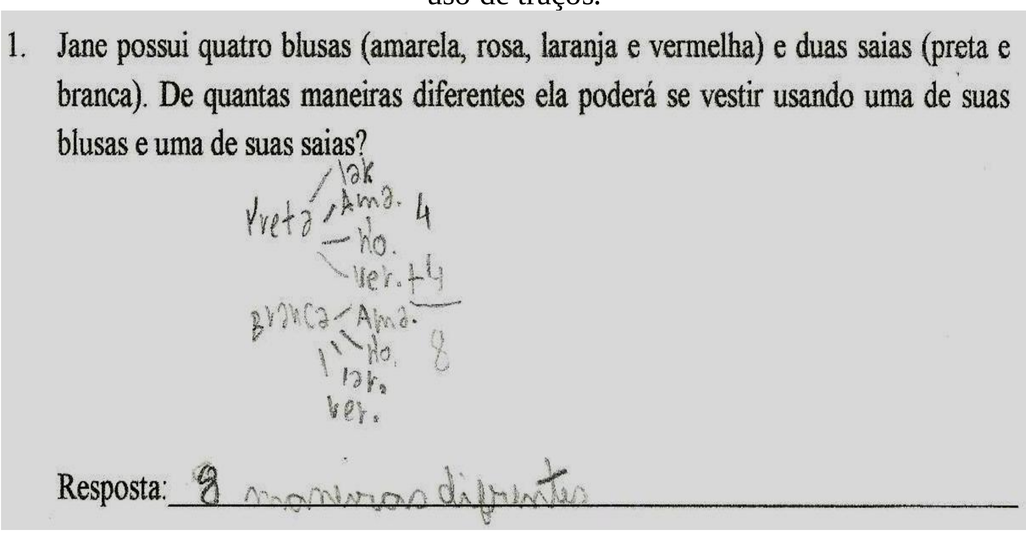
pesquisas mencionadas nesta obra é o estudo realizado por Borba e Azevedo (2012), com crianças do 5º ano do Ensino Fundamental, como brevemente descrito a seguir.

O estudo teve por objetivo analisar a influência da construção de árvores de possibilidades com lápis e papel e com o uso do *software Diagramas de Arbol* no desempenho de problemas de raciocínio combinatório. As crianças foram divididas em quatro grupos, sendo dois grupos experimentais e dois grupos controle. O primeiro grupo experimental (Grupo 1) trabalhou em duplas com o software de construção de árvores de possibilidades. O segundo grupo experimental (Grupo 2) construiu em duplas árvores de possibilidades com lápis e papel. O terceiro grupo (Grupo 3), caracterizado como grupo controle, trabalhou em duplas com problemas assistidos por meio de desenhos; e o quarto grupo (Grupo 4) se qualificou como grupo controle desassistido. Foi realizado um pré-teste, seguido das distintas formas de intervenção, e um pós-teste, que avaliou os avanços obtidos através das intervenções realizadas. Segundo as autoras, no momento da construção das árvores de possibilidades dos grupos experimentais foi chamada atenção para as relações (propriedades invariantes) de cada tipo de problema. As autoras (BORBA; AZEVEDO, 2012) concluíram que a construção de árvores de possibilidades (com e sem o uso do *software Diagramas de Arbol*) é um recurso capaz de promover um melhor desempenho na resolução dos problemas, sobretudo dos problemas de produto cartesiano.

Os procedimentos de resolução apresentados a seguir ilustram algumas das formas de raciocinar adotadas pelas crianças que se baseiam na árvore de possibilidades.

Exemplo 4 (PESSOA; BORBA, 2010):

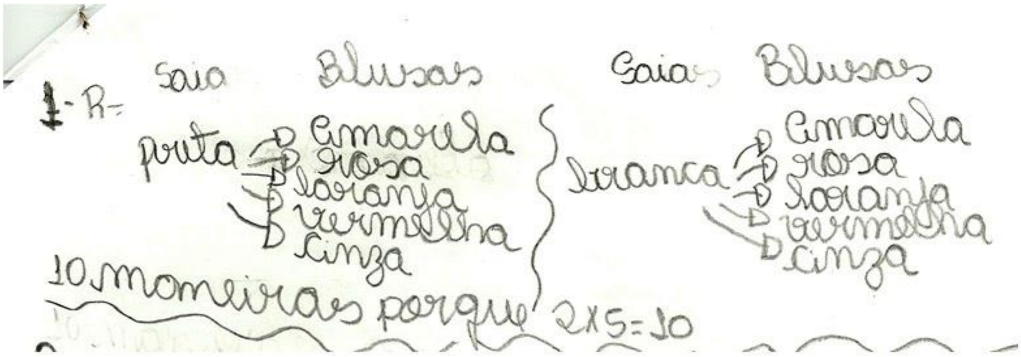
Figura 4: Procedimento de resolução que ilustra a construção de árvore de possibilidades com uso de traços.


1. Jane possui quatro blusas (amarela, rosa, laranja e vermelha) e duas saias (preta e branca). De quantas maneiras diferentes ela poderá se vestir usando uma de suas blusas e uma de suas saias?

Resposta: 8 maneiras diferentes

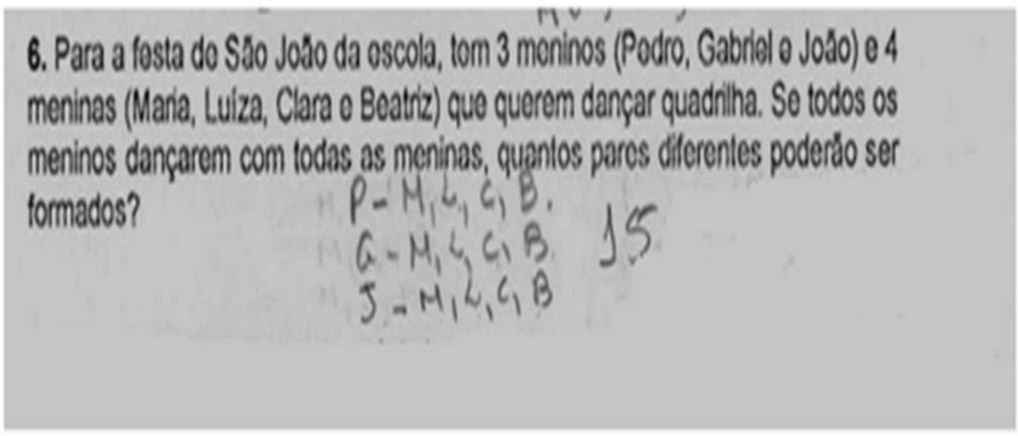
Exemplo 5 (AZEVEDO; BORBA, 2011):

Figura 5: Procedimento de resolução que ilustra a construção de árvore de possibilidades com uso de setas.



Exemplo 6 (AZEVEDO; BORBA, 2011):

Figura 6: Procedimento de resolução que ilustra a construção de árvore de possibilidades por meio de agrupamentos.



O diagrama deixa explícitas as relações um para muitos, seja com o uso de setas e traços que ligam um elemento de um conjunto a outros de outro conjunto (ver Figura 4 e Figura 5) seja por meio de agrupamentos (ver Figura 6). Ao que parece, a construção das árvores permite pensar sobre as relações envolvidas neste tipo de problema, como também manter certa sistematicidade na formação das combinações e evitar a repetição de pares já formados.

Por meio da árvore de possibilidades as autoras (BORBA; PESSOA, 2013; BORBA; AZEVEDO, 2012) verificaram que avanços foram identificados nos procedimentos de resolução. De modo geral, considerando os referidos estudos de forma conjunta, os principais avanços identificados foram em relação ao controle e gerenciamento das combinações estabelecidas, de modo que os alunos listavam as combinações já estabelecidas monitorando as combinações feitas entre os elementos dos conjuntos, sobretudo quando as quantidades envolvidas eram pequenas, evitando a repetição de combinações. Outro avanço observado foi em relação ao fato de que faziam combinações de forma exaustiva, de modo que nenhum elemento sobrava, fazendo todas as combinações possíveis.

A partir dos estudos mencionados, evidencia-se que esta estratégia é um suporte de representação capaz de promover formas de raciocinar apropriadas em relação à resolução de problemas de combinatória por alunos do Ensino Fundamental. Acredita-se que o papel facilitador da árvore de possibilidades reside no fato de que este diagrama permite que as relações um para muitos sejam graficamente explicitadas, assim como outros princípios básicos do raciocínio combinatório.

A explicitação dos princípios invariantes: o papel da linguagem

Spinillo e Silva (2010) e Spinillo, Ferreira e Lautert (2016) testaram a possibilidade de que a explicitação verbal dos princípios invariantes imbricados na resolução de problemas de produto cartesiano[5], se dada verbalmente, a partir de informações contidas no enunciado dos problemas, poderia gerar formas de resolução mais apropriadas. Para isso, Spinillo e Silva (2010) compararam o desempenho de quarenta estudantes do 3º ano do Ensino Fundamental em duas situações: uma em que estes princípios estavam implícitos e outra em que estes princípios estavam claramente mencionados no enunciado dos problemas. Nesta pesquisa, os problemas foram apresentados em duas sessões. Metade dos participantes (Grupo 1) resolvia os problemas implícitos na primeira sessão e os explícitos na segunda; e a outra metade (Grupo 2) resolvia da forma inversa. Exemplos dos problemas são dados a seguir:

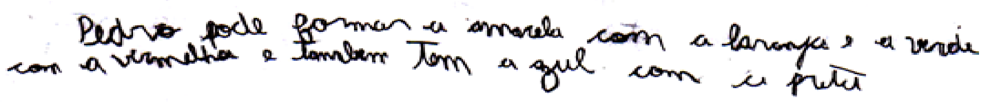
Problema sem explicitação

Pedro tem 3 camisetas (azul, amarela e verde) e 5 bermudas (vermelha, laranja, preta, marrom e branca). Ele quer combinar as camisetas e as bermudas para formar conjuntos. Quantos conjuntos diferentes ele pode formar?

[5] Para maiores detalhes a respeito dos princípios básicos do raciocínio combinatório envolvidos na resolução de problemas de produto cartesiano remeter a Mekhmadarov (2000).

Resposta da criança (SILVA, 2010, p. 77-78):

Figura 7: Procedimento de resolução adotado no problema sem explicitação.



E: Ele pode formar quantos conjuntos?

C: Três conjuntos.

E: Quais são?

C: Pedro pode formar a amarela com a laranja e a verde com a vermelha e também tem a azul com a preta. (a criança lê o que escreveu no papel).

E: Ok. Pedro pode formar mais algum conjunto?

C: Não. Porque ele só tem três camisas.

E: E a bermuda marrom e a branca?

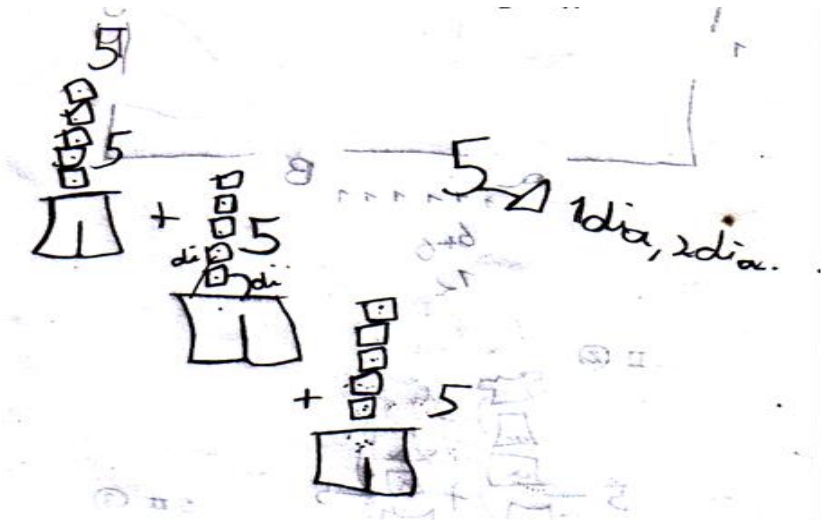
C: Sobrou.

Problema com explicitação

Pedro vai viajar para casa do seu avô. Na mala ele colocou 3 calças (preta, marrom e azul) e 5 camisas (amarela, vermelha, verde, laranja e cinza). Ele pode combinar as calças e as camisas para formar conjuntos. Mas ninguém veste todas as calças e todas as camisas de uma só vez; só usa uma calça e uma camisa de cada vez. Combinando as camisas com as calças, ele pode formar conjuntos diferentes. Nesta viagem, Pedro quer usar uma roupa diferente a cada dia, ele não quer repetir os conjuntos. Por exemplo, um dia ele pode usar a calça preta com a camisa laranja. No outro dia ele pode usar a mesma calça preta com a camisa cinza, já seria um conjunto diferente. Combinando todas as calças com todas as camisas, quantos conjuntos diferentes ele pode formar?

Resposta da criança (SILVA, 2010, p. 84):

Figura 8: Procedimento de resolução adotado no problema com explicitação.



C: Ele pode formar quinze conjuntos.

E: Mostra para mim como foi que você fez.

C: Eu fiz as três calças com as camisas. Deu cinco.

E: O que é isso aqui (experimentador aponta para os quadrados do desenho)?

C: São as camisas. Cada calça tem cinco camisas, olha o cinco aqui (a criança aponta para o número 5 no desenho). São 5 dias né?

E: Como assim? Não entendi.

C: Ele usa essa calça com essa camisa em um dia (a criança escreve "di" no desenho e liga o quadrado à calça), aí no outro dia ele usa essa calça com outra camisa (a criança escreve "di" no próximo quadrado), então são cinco dias porque são cinco conjuntos (a criança escreve 5 - 1 dia, 2 dia...).

E: E como você descobriu que eram quinze conjuntos no total?

C: Eu fiz 5 + 5 + 5 (a criança escreve o sinal de mais "+" em seu desenho, ligando os conjuntos de camisas e bermudas formados).

Como observado, no exemplo da situação sem explicitação, o problema é apresentado de maneira prototípica, como usualmente aparece nos livros didáticos e nas situações de pesquisa, enquanto que o problema da situação com explicitação oferece em seu enunciado os princípios e as relações que regem o raciocínio combinatório em problemas de produto cartesiano. Nota-se, na Figura 7, que a criança estabelece combinações fixas (uma dada bermuda e uma dada camiseta) que se baseiam na correspondência um para um. Na Figura 8, entretanto, a explicitação da correspondência um para muitos no enunciado do problema parece ter favorecido a compreensão de que cada elemento de um conjunto pode ser combinado com todos os elementos do outro conjunto.

As autoras analisaram os dados em função do número de acertos (desempenho) e das estratégias de resolução adotadas pelas crianças. Os principais resultados relativos ao desempenho são apresentados na Tabela 1.

Tabela 1: Porcentagem (com arredondamento) de acertos no estudo de Spinillo e Silva (2010)

	Grupo 1 (implícito – explícito)	Grupo 2 (explícito – implícito)
Problemas implícitos	26	75
Problemas explícitos	56	71

Os dados mostram uma diferença expressiva entre os grupos. No Grupo 1, apenas 26% dos participantes foram capazes de solucionar os problemas quando estes apresentavam a correspondência um para muitos de maneira implícita. No entanto, quando os problemas foram apresentados com a explicitação das relações, observou-se que 56% dos participantes foram capazes de gerar procedimentos de solução combinatória. O resultado indica que a explicitação verbal das relações subjacentes ao raciocínio combinatório parece facilitar a compreensão e resolução dos problemas. Esta afirmação pode ser confirmada quando se compara o desempenho do Grupo 1 com o desempenho do Grupo 2. Neste último grupo, as crianças resolveram na primeira sessão os problemas explícitos e na segunda sessão os problemas implícitos. Observou-se bom desempenho tantos nos problemas explícitos (71%) como nos problemas implícitos (75%). Parece que ao compreender as relações necessárias à resolução do problema na situação explícita, as crianças transferiram esta compreensão para os problemas nos quais as relações não estavam explicitadas. Quando se compara o desempenho entre os grupos é possível notar que a compreensão das relações um para muitos tem efeito direto no desempenho e na adoção de estratégias de resolução mais apropriadas, uma vez que o número de acertos do Grupo 2 (75%) nos problemas implícitos é praticamente três vezes maior que o número de acertos do Grupo 1 (26%).

Sendo assim, acredita-se que no estudo de Spinillo e Silva (2010) a apresentação da correspondência um para muitos no enunciado dos problemas favoreceu a compreensão das crianças, tendo um efeito positivo sobre o desempenho.

CONSIDERAÇÕES FINAIS E IMPLICAÇÕES EDUCACIONAIS

Considerando de forma conjunta e articulada os dois grupos de estudos apresentados, nota-se que tanto a explicitação verbal nos enunciados como a representação diagramática propiciada pela árvore de possibilidades são recursos capazes de tornar evidentes para as crianças a correspondência um para muitos que são essenciais ao raciocínio combinatório. Esses dois recursos, adotados pelos pesquisadores da área, tornam possível desmembrar as propriedades e as relações que constituem um conceito, no caso as relações um para muitos. Os recursos diagramáticos e verbais são eficazes, ao explicitá-los, para a apropriação dos princípios que regem os problemas de produto cartesiano.

Na realidade, o suporte de representação utilizado afeta o *status* da ação e do raciocínio. Embora nem todo suporte de representação seja igual (BATISTA; SPINILLO, 2008), há aqueles que auxiliam o raciocínio na medida em que oferecem uma visão mais clara das relações imbricadas em um conceito e em uma forma de pensar, como é o caso da explicitação verbal dos princípios básicos do raciocínio combinatório e da árvore de possibilidades que permite, ainda, organizar o raciocínio de maneira sistemática.

Com base nas discussões levantadas, algumas situações didáticas podem ser propostas com o objetivo de desenvolver o raciocínio combinatório nos anos iniciais do Ensino Fundamental. Uma sequência didática poderia ser oportunizada, iniciando-se pela apresentação de problemas nos quais as relações um para muitos fossem explicitadas a partir de representações gráficas, como a árvore de possibilidades, e também a partir de explicitações verbais presentes nos enunciados dos problemas. O que se propõe é que as situações de investigação que demonstraram serem capazes de promover formas de raciocinar apropriadas sejam transformadas, com os devidos ajustes didáticos, em situações de ensino.

Ao teorizar sobre a árvore de possibilidades e a explicitação das relações contidas nos enunciados verbais cabe mencionar que tais recursos, como prevê a teoria de Vergnaud (1990, 2009), são, em última instância, suportes de representação. Na realidade, são complexas as relações entre suportes de representação e a capacidade cognitiva do indivíduo. Os suportes de representação podem ser entendidos como ferramentas que auxiliam na expressão de formas de raciocinar, mas que também as influenciam, uma vez que a forma como a criança interpreta e representa o problema tem repercussões sobre as estratégias que adota para resolvê-lo. Em problemas de raciocínio combinatório seria desejável, inclusive, que esses dois suportes de representação fossem apresentados de forma articulada e complementar. Ademais, seria interessante apresentar inicialmente os problemas de produto cartesiano para em seguida, de forma gradual, apresentar os problemas de combinação, permutação e arranjo.

REFERÊNCIAS

AZEVEDO, J.; BORBA, R. O impacto do software Árbol no raciocínio combinatório. In: XIII Conferência Interamericana de Educação Matemática, Recife. **Anais da XIII Conferência Interamericana de Educação Matemática**, 2011.

AZEVEDO, J.; BORBA, R. Construindo árvores de possibilidades virtuais: o que os alunos podem aprender discutindo relações combinatórias? **Revista Eletrônica de Educação**, v. 7, n. 2, p. 39-62, 2013a.

AZEVEDO, J.; BORBA, R. Combinatória: a construção de árvores de possibilidades por alunos dos anos iniciais com e sem uso de softwares. **Alexandria** (UFSC), v. 6, p. 113- 140, 2013b.

BATANERO, C.; GODINO, J.; NAVARRO-PELAYO, V. Combinatorial reasoning and its assessment. In: GAL, I.; GARFIELD, J. B. (Ed.). **The assessment challenge in statistics education.** Amsterdam: ISSO Press, 1997, p. 239-252.

BATISTA, A.; SPINILLO, A. G. Nem todo material concreto é igual: a importância dos referentes na resolução de problemas. **Estudos de Psicologia**, UFRN, Natal v. 13, n. 1, p. 13-21, 2008.

BORBA, R.; AZEVEDO, J. A construção de árvores de possibilidades com recurso computacional: o desenvolvimento do raciocínio combinatório de Karine e Vitória. In: SPINILLO, A. G.; LAUTERT, S. L. (Eds.). **A pesquisa em psicologia e suas implicações para a educação matemática**. Recife: Editora Universitária da UFPE, 2012, p. 89-138.

BORBA, R.; PESSOA, C. A. Estudos em raciocínio combinatório. In: BORBA, R.; MONTEIRO, C. E. (Eds.). **Processos de ensino e aprendizagem em educação matemática**. Recife: Editora Universitária da UFPE, 2013, p. 11-54.

EIZENBERG, M. M.; ZASLAVSKY, O. Cooperative problem solving in combinatorics: the inter-relations between control processes and successful solutions. **Journal of Mathematical Behavior**, Amsterdam v. 22, p. 389-403, 2003.

FALCÃO, J. T. da R. **Psicologia da educação matemática**: uma introdução. Belo Horizonte: Autêntica, 2003.

FISCHBEIN, E.; GROSSMAN, A. Schemata and intuitions in combinatorial reasoning. **Educational Studies in Mathematics**, Alemanha, v. 34, p. 27-47, 1997.

FISCHBEIN, E.; PAMPU, I.; MÎNZAT, I. Effects of age and instruction on combinatory ability in children. In: FISCHEIN, E. (Ed.). **The intuitive sources of probabilistic thinking in children**. Dordrecht: Reidel, Appendix IV, pp. 189-201, 1970.

HADAR, N.; HADASS, R. The road to solving a combinatorial problem is strewn with pitfalls. **Educational studies in mathematics**, Alemanha, v. 12, p. 435-443, 1981.

INHELDER, B.; PIAGET, J. **Da lógica da criança à lógica do adolescente**. São Paulo: Pioneira, 1976.

MAGINA, S. P.; SPINILLO, A. G.; MELO, L. M. de S. A resolução de problemas de produto cartesiano diretos e inversos por alunos do ensino fundamental: limites e possibilidades. **Revista Pro-Posições,** Campinas (no prelo).

MEKHMADAROV, I. Analysis and synthesis of the Cartesian product by kindergarten children. In: **Proceedings of the 24th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education**. Hiroshima: Hiroshima University, 2000, v. 3, p. 295-301.

MORO, M. L. F.; SOARES, M. T. C. Níveis de raciocínio combinatório e produto cartesiano na escola fundamental. **Revista Educação Matemática Pesquisa**, São Paulo, v. 8, n. 1, p. 99-124, 2006.

NCTM - CONSELHO NACIONAL DE PROFESSORES DE MATEMÁTICA. **Principles and Standards for School Mathematics**. Reston VA: NCTM, 2000.

NUNES, T.; BRYANT, P. **Crianças fazendo matemática**. Porto Alegre: Artes Médicas, 1997.

PESSOA, C. A. S.; BORBA, R. Estratégias de resolução de problemas de raciocínio combinatório por alunos de 1ª a 4ª série. **Anais do IX Encontro Nacional de Educação Matemática**, 2007.

PESSOA, C. A. S.; BORBA, R. O raciocínio combinatório do início do Ensino Fundamental ao término do Ensino Médio. In: X Encontro Nacional de Educação Matemática, Salvador: **Anais do X ENEM**, p. 1-12, 2010.

PIAGET, J.; SZEMINSKA, A. **A gênese do número na criança**. Rio de Janeiro: Zahar, 1971.

SCHLIEMANN, A. D. et al. **Estudos em Psicologia da Educação Matemática**. Recife: Editora da Universidade Federal de Pernambuco, Série: Estudos Universitários, 1997.

SILVA, J. F. G. **O efeito da explicitação da correspondência um-para-muitos na resolução de problemas de produto cartesiano por crianças**. 2010. Dissertação (Mestrado em Psicologia Cognitiva) – Programa de Pós-Graduação em Psicologia Cognitiva, UFPE, 2010.

SPINILLO, A. G.; FERREIRA, J.; LAUTERT, S. L. Ensino e aprendizagem de conceitos matemáticos a partir da explicitação dos princípios invariantes. In: CASTRO FILHO, J. A. de; MAIA, D. L. (Orgs.). **Matemática, cultura e tecnologia**: perspectivas internacionais. Curitiba: Editora CRV, 2016, p. 35-48.

SPINILLO, A. G.; SILVA, J. F. G. Making explicit the principles governing combinatorial reasoning: does it help children to solve Cartesian product problems? In: **XXXIV Proceedings of the Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education** (PME), Belo Horizonte, 2010, v. 4, p. 216-224.

SPINILLO, A. G.; PACHECO, A. B.; GOMES, J. F.; CAVALCANTI, L. O erro no processo de ensino-aprendizagem da matemática: errar é preciso? **Boletim GEPEM (Online**), v. 64, p. 1-12, 2014.

TEIXEIRA, L. R. M.; VASCONCELLOS, M.; GUIMARÃES, S. D. A resolução de problemas multiplicativos de produto de medidas: um caso exemplar. In: BITTAR, M.; MUNIZ, C. A. (Orgs.). **A aprendizagem matemática na perspectiva da Teoria dos Campos Conceituais**. Curitiba: CRV, 2009.

VERGNAUD, G. La théorie des champs conceptuels. **Récherches en Didactique des Mathématiques**, Paris, v. 10, n. 23, p. 133-170, 1990.

VERGNAUD, G. **A criança, a matemática e a realidade**: problemas do ensino da matemática na escolar elementar. Tradução de Maria Lucia Faria Moro; Revisão técnica Maria Tereza Carneiro Soares. Curitiba: Editora da UFPR, 2009.