REnCiMa
Revista de Ensino de Ciências e Matemática

eISSN 2179-426X
10.26843/rencima.v12n6a29

Situações didáticas na Olimpíada Internacional de Matemática

Paulo Vitor da Silva Santiago[1]

Francisco Régis Vieira Alves[2]

Resumo: Neste artigo, pretende-se discutir as situações didáticas de Guy Brousseau e a relação com a preparação das Olimpíadas Internacionais de Matemática, utilizando tecnologias digitais, mais especificamente o *software* GeoGebra. Assim, apresenta-se as duas fases iniciais sugeridas pela Engenharia Didática (ED), análises prévias e análise a *priori*. Evidencia-se dois Problemas Olímpicos (PO), que são descritos e estruturados com o auxílio do *software* GeoGebra, utilizando a vertente francófona da Didática da Matemática, conhecida como Teoria das Situações Didáticas (TSD), com suas fases de ação, formulação, validação e institucionalização. A abordagem da escrita pretende transcrever algumas noções e procedimentos imprescindíveis das fases dialéticas da TSD para o ensino de matemática, com o intuito de proporcionar um ambiente capaz de englobar e encantar estudantes não competidores. Desse modo, a inclusão das tecnologias digitais, são construídas e descritas com a finalidade de impulsionar a mobilização de raciocínios diferenciados e sustentados em heurísticas e métodos que, de forma geral, permanecem limitados aos contextos de preparação de olimpíadas de matemática para o estudo da geometria plana.

Palavras-chave: Engenharia Didática. Teoria das Situações Didáticas. GeoGebra. Olimpíadas de Matemática. Tecnologia.

Didactic situations in the International Mathematical Olympiad

Abstract: This article intends to discuss the didactical situations of Guy Brousseau and the relation with Mathematics International Olympiad preparation, using digital technologies, specifically GeoGebra software. Thus, we present the two initial phases suggested by Didactical Engineering (DE), preliminary analysis and a priori analysis. Two Olympic Problems (OP) are highlighted, which are described and structured with the help of the GeoGebra software using the Francophone strand of Didactics of Mathematics, known as Theory of Didactic Situations (TDS) with its dialectics of action, formulation, validation and institutionalization. The writing approach intends to transcribe some essential notions and procedures of the TSD dialectics for the teaching of mathematics, in order to provide an environment capable of encompassing and delighting non-competitive students. In this way, the inclusion of digital technologies are built and described with the purpose of promoting the mobilization of differentiated reasoning and supported by heuristics and methods that, in general, remain limited to the contexts of preparation of mathematics Olympiads for the study of geometry flat.

Keywords*:* Didactic Engineering. Theory of Didactical Situations. GeoGebra. Mathematical Olympiad. Technology.

[1] Mestre em Ensino de Ciências e Matemática. Professor da Secretaria Estadual de Educação do Ceará (SEDUC). Ceará, Brasil. pvitor60@hotmail.com http://orcid.org/0000-0002-6608-5452
[2] Doutor em Matemática. Professor do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará (IFCE). Ceará, Brasil. fregis@ifce.edu.br http://orcid.org/0000-0003-3710-1561

Recebido em 21/06/2021 | Aceito em 23/09/2021 | Publicado em 29/12/2021

Situaciones didácticas en la Olimpiada Matemática Internacional

***Resumen*:** Este artículo pretende discutir las situaciones didácticas de Guy Brousseau y la relación con la preparación de la Olimpiada Internacional de Matemáticas, utilizando tecnologías digitales, concretamente el software GeoGebra. Así, se presentan las dos fases iniciales sugeridas por la Ingeniería Didáctica (ID), el análisis preliminar y el análisis a priori. Se destacan dos Problemas Olímpicos (PO), que se describen y estructuran con la ayuda del software GeoGebra utilizando la vertiente francófona de la Didáctica de las Matemáticas, conocida como Teoría de las Situaciones Didácticas (TDS) con su dialéctica de acción, formulación, validación e institucionalización. El enfoque de la escritura pretende transcribir algunas nociones y procedimientos esenciales de la dialéctica de la TDS para la enseñanza de las matemáticas, con el fin de proporcionar un entorno capaz de abarcar y deleitar a los alumnos no competitivos. De esta manera, la inclusión de las tecnologías digitales se construyen y se describen con el fin de promover la movilización del razonamiento diferenciado y apoyado por la heurística y los métodos que, en general, siguen siendo limitados a los contextos de preparación de las olimpiadas de matemáticas para el estudio de la geometría plana.

Palabras clave: Ingeniería Didáctica. Teoría de las Situaciones Didácticas. GeoGebra. Olimpiada Matemática. Tecnología.

Introdução

O contexto de desenvolvimento e do aumento de participação dos estudantes na Olimpíada Internacional de Matemática (IMO) teve um grande avanço nos últimos anos e os professores responsáveis por essas competições estão se envolvendo cada vez mais na preparação desses alunos. Para isso, esses docentes proporcionam aulas olímpicas de matemática, cursos preparatórios, clubes de matemática, além de materiais de apoio *on-line* (*pdf*) e presencial (impresso). O objetivo dessas atividades é contribuir na preparação dos alunos para essas competições e melhorar o ensino e a aprendizagem da matemática.

Porém, não há indícios do uso de tecnologia no material e nem há preocupação no debate sobre os métodos de ensino que podem ser aplicados em aulas preparatórias de olimpíadas internacionais de Matemática. Assim, o objetivo deste artigo é “discutir as situações didáticas de Guy Brousseau (2008) e a relação com a preparação das Olimpíadas Internacionais de Matemática, utilizando tecnologias digitais, mais especificamente o *software* GeoGebra”.

Neste trabalho, foi utilizada a metodologia da Engenharia Didática (ED) de Michèle Artigue (1988) em suas duas primeiras fases (preliminar e *a priori*) e as quatro etapas (ação, formulação, validação e institucionalização) da Teoria das Situações Didáticas (TSD). Brousseau (2006) expõe a ideia básica de aproximar o trabalho do aluno da forma como se desenvolve a atividade científica real, ou seja, torná-lo investigador, testando pressupostos, provando métodos, construindo modelos matemáticos e socializando os resultados.

Acredita-se que no processo educacional é importante que os alunos sejam estimulados a fazer suas próprias descobertas e formular estratégias, pois outros saberes, inclusive os prévios, são explorados na construção de uma solução. A resolução de uma atividade proposta pode ser apenas um processo do ensino, mas a produção realizada permite a construção do conhecimento.

Portanto, é importante que as aulas sejam organizadas com antecedência a partir de meios e ferramentas que possam estimular o raciocínio matemático do aluno. Graças a esse privilégio, desenvolveu-se uma situação didática, norteada pela metodologia de resolução de Problemas Olímpicos (PO) de acordo com as fases dialéticas da TSD. Essa estrutura chamada de situação olímpica de ensino ou Situação Olímpica Didática (SDO), trabalhada por Alves (2021), servirá para apoiar as atividades olímpicas ministradas por professores de matemática.

Serão apresentados e discutidos ao longo do artigo: (i) dois problemas olímpicos internacionais da Olimpíada Internacional de Matemática (IMO), com a utilização do *software* GeoGebra, que é entendido como um recurso educacional para o desenvolvimento e verificação de suposições e hipóteses por parte dos alunos; (ii) a estruturação de situações didáticas relacionadas aos problemas olímpicos internacionais. (iii) a elaboração da resolução das atividades olímpicas como objeto de pesquisa e exploração por alunos e professores utilizando o GeoGebra.

Acredita-se que “uma cultura oriunda das Olimpíadas de Matemática envolve a disseminação de ideias matemáticas” visando melhor qualidade no ensino da Matemática “por intermédio da proposição de solução de problemas competitivos ou, até mesmo, saudáveis provocações entre pares” (ALVES, 2021, p. 117). Na verdade, a competição olímpica internacional gera uma cultura entre os participantes, aprofunda as pesquisas referentes aos conteúdos não previstos em sala de aula e atrai atenção dos alunos nas premiações, motivando-os a estudar e buscar novos conhecimentos.

Ademais, percebe-se que há escolas que se sentem motivadas pelos reconhecimentos acompanhados das premiações, por isso estão cada vez mais desenvolvendo atividades de preparação para tais competições de matemática. Considera-se, portanto, que tais atividades, oriundas dos Olimpíadas de Matemática e da prática do ensino de matemática, contribuem para a discussão da educação matemática e merecem ser discutidas neste manuscrito.

Olimpíadas Internacionais de Matemática

A descrição de "Olimpíada" vem da antiga tradição grega dos Jogos Olímpicos. No entanto, essa palavra só começou a ser usada em 776 a.C., após uma promessa selada entre importantes governadores gregos de cidades-estados de oficializar a existência das Olimpíadas e registrar os nomes dos vencedores. Por sua vez, Kenderov *et al*. (2009, p. 59), discutem que as

> Olimpíadas Internacionais de Matemática (OIM) estão sujeitas e restritas a determinadas regras formais, que regulam cada aspecto da competição: participação, seleção minuciosa de problemas, acesso ao conteúdo das soluções, distribuição de medalhas e muitos outros detalhes essenciais.

Nessa perspectiva, as primeiras olimpíadas de matemática foram realizadas na cidade de Bucareste, na Romênia. Em meados do século XIX, foi realizada uma dessas competições, na qual participaram 70 alunos do ensino básico da região. Em 1894, a primeira Olimpíada de Matemática para alunos do último ano do ensino médio foi realizada na Hungria. Kenderov (2009, p. 14) descreve as etapas dessa olimpíada:

> Os concorrentes receberam quatro horas para resolver três problemas (sem interação com outros alunos ou professores foi permitido). Os problemas na competição Eötvös foram projetados para verificar a criatividade e o pensamento matemático, não apenas habilidades técnicas adquiridas a priori. Em particular, os alunos foram convidados a fornecer uma prova de uma declaração. O modelo da competição Eötvös agora está amplamente difundido e ainda domina uma grande parte do cenário da competição.

A participação na IMO é ampla, chegando a 100 países participantes ou mais, contando com o Conselho da Olimpíada Internacional de Matemática, o qual assegura que a competição seja realizada anualmente e que cada país anfitrião siga as regras e tradições da IMO. As Olimpíadas Internacionais de Matemática têm como objetivo descobrir, estimular e desafiar os estudantes que conhecem matemática. Dessa forma, garantindo laços internacionais de amizade entre matemáticos de todos os países participantes, criando oportunidades para programas de intercâmbio e a divulgação universal da matemática.

Diante disso, o professor de matemática desenvolve sua prática de embasamento teórico de sua transposição didática, declarando o tipo de abordagem das Olimpíadas de Matemática. Dito isso, destacam-se alguns aspectos metodológicos da ED e TSD, que têm o potencial de avançar para uma perspectiva de melhoria na ação, mediação e eficácia do professor em seu cenário de atuação, buscando uma mediação pedagógica para o ensino e aprendizagem de matemática.

Suporte metodológico no ensino matemático

O artigo aborda duas fases da ED: análise preliminar e análise *a priori*. Buscou-se identificar e mostrar problemas que poderiam ser melhorados com o *software* GeoGebra e com os quais pudessem ser feitas construções, de forma que as resoluções se correlacionassem com a Teoria das Situações Didáticas (TSD).

Sob a perspectiva de Almouloud (2007), a Engenharia Didática é visualizada como metodologia de pesquisa sendo caracterizada por uma estrutura experimental que garante a construção, execução e análise de aulas didáticas. Para Alves (2016a), ED apresenta dois níveis de pesquisa (*microengenharia* e *macroengenharia*). Assim, as seguintes especificações foram estabelecidas no primeiro nível de pesquisa: a *microengenharia* apropria-se nas dependências ocorridas pelos fenômenos em sala de aula, então esse nível de investigação tem uma visão mais restrita.

Já no segundo nível, encontra-se obstáculos e dificuldades em manter a ordem metodológica e/ou institucional e conta-se com uma visão mais ampla. Dessa maneira, percebe-se que o planejamento de uma aula, especialmente na elaboração para Olimpíada de Matemática na escola, não deve ser apenas a construção e resolução de situações-problema olímpicos, mas um momento interativo de fazer o aluno entender-se como promotor de seus conhecimentos.

Engenharia Didática

A Engenharia Didática consiste em fases separadas, a saber: análise prévia ou preliminar, concepção e análise *a priori*, experimentação, análise *a posteriori* e validação. Descreve-se a seguir as características das duas análises iniciais da ED, conforme o que se busca trabalhar neste manuscrito.

Análises preliminares ou prévias: é necessário realizar um levantamento sobre as três vertentes relacionadas ao conteúdo a ser visto em sala de aula: epistemologia, didática e cognição. No estudo aqui apresentado, pretendeu-se analisar os livros e materiais auxiliares disponibilizados pelos organizadores da IMO (provas anteriores, bancos de questões e outros). A análise teve como foco verificar como os materiais estão tentando preparar os alunos que pretendem realizar a Olimpíada Internacional de Matemática, qual metodologia é utilizada, quais ferramentas computacionais são recomendadas ou não. Entretanto, o pesquisador deve prestar atenção nos seguintes detalhes: estudar a gênese histórica do objeto de ensino, analisar a estrutura matemática do conhecimento pesquisado, investigar o ensino atual e seus impactos, comprovar o conhecimento prévio do aluno relacionado ao conhecimento alvo; examinar o contexto que depende do design e execução de cada sessão didática (ALMOULOUD, 2007).

Análise *a priori*: nessa etapa, o pesquisador irá desenvolver, construir e analisar uma sequência de situações didáticas para responder aos questionamentos e validar as hipóteses levantadas nas análises preliminares. Sua principal função é utilizar novos objetos matemáticos por meio de perguntas feitas pelos alunos durante a resolução de uma situação olímpica (ALMOULOUD, 2007). É por isso que a situação olímpica internacional está sendo construída nessa fase. É necessário ter conhecimento das seleções a nível global e local, juntamente com uma descrição da ação que será realizada. O objetivo é criar uma situação controlável que antecipe quais desconfortos e dificuldades os alunos podem apresentar para ter um estudo planejado. É nessa fase que o planejamento das aulas é feito da maneira certa, como será ao descrever todas elas.

Na análise preliminar, é realizada a descrição das duas situações-problema com suporte do *software* GeoGebra. Segundo Artigue (1995), cada uma dessas etapas pode ser retomada de acordo com a necessidade do pesquisador. Esse detalhe permite ao pesquisador realizar um trabalho em paralelo com as outras etapas da pesquisa.

Teoria das Situações Didáticas

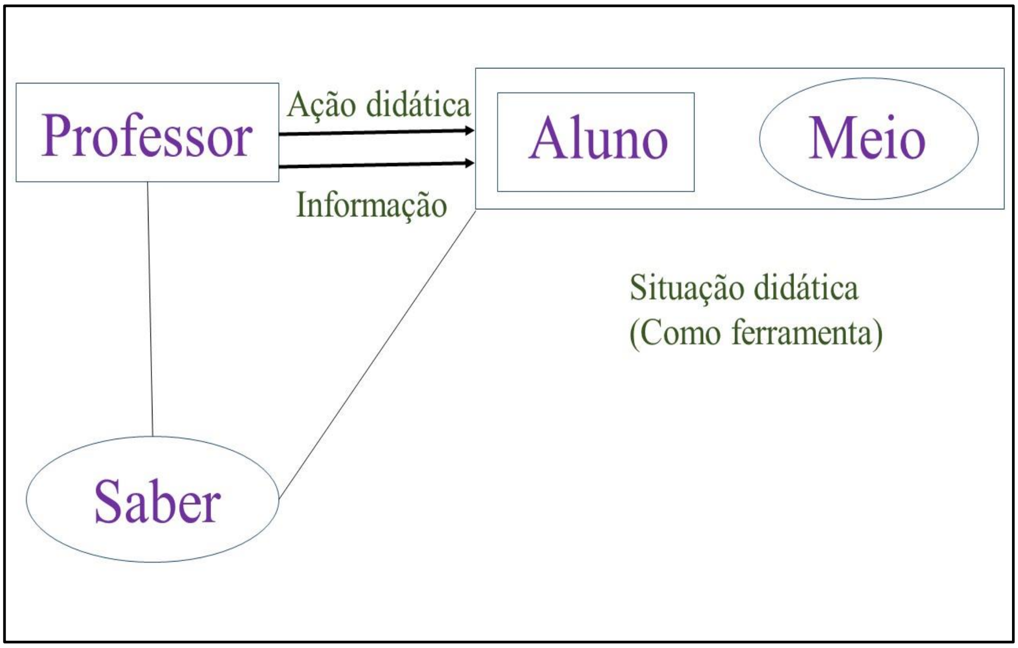
A TSD descreve um estudo de discussão de teorias matemáticas, tomando como ponto inicial as referências fundamentais e finalidades de dois pontos significativos, a saber: o professor de matemática e o profissional de matemática. Nessa perspectiva, a tríade entre o professor, aluno e saber tem espaço mais amplo nas formações de professores, no propósito de levar aos docentes modelos de ensino com diferentes maneiras de apresentar um conteúdo matemático ao estudante. De acordo com Alves (2016b, p. 137):

> (a) tendo em vista sua natureza crifrada, sincopada e de estilo monossêmico, a Matemática exige uma ação de modificação e transformação, levando em consideração o público de interesse; (b) a natureza dos objetos e processos matemáticos, de per si, podem proporcionar entraves e bloqueios ao ensino; (b) a natureza dos objetos e processos matemáticos, de per si, podem proporcionar entraves e bloqueios ao aprendizado dos estudantes.

Nesse contexto, apresenta-se a Teoria das Situações Didáticas (TSD), um modelo desenvolvido pelo matemático francês, Brousseau (2008), que permite a compreensão dos relevantes fenômenos trabalhados na aprendizagem matemática em sala de aula e a atuação da tríade, nesse método, ocasionando um significado maior para o discente acerca da importância dessa disciplina. Para Brousseau (2008, p. 53), a "interação torna-se didática se, e somente se, um dos sujeitos demonstra a intenção de modificar o sistema de conhecimentos do outro (os meios de decisão, o vocabulário, as formas de argumentação, as referências culturais)".

Nesse sentido, o professor utiliza o meio como instrumento para facilitar a construção do conhecimento pelo aluno. Segundo Brousseau (2008), a estrutura ideal para melhor representar a situação didática como ferramenta é o esquema mostrado (Figura 1).

Figura 1: Situação didática como ferramenta



Fonte: Tríade da situação didática por Brousseau (2008)

Nessa estrutura, Brousseau (2008, p. 54) retrata a intervenção do docente:

> Necessariamente, em relação aos conhecimentos que ensina, um funcionamento possível em outras circunstâncias, não apenas nas "situações com fins didáticos" (exercícios ou problemas) que ele propõe. Cria, então, fictícia ou efetivamente, um outro "meio", em que o aluno atua de forma autônoma.

As análises dos diálogos do aluno com o *milieu* (meio) são de grande relevância para o desenvolvimento do ensino e aprendizagem, então, o *milieu* produz dúvidas, contradições, atuações e emoções que levam à aprendizagem matemática.

A posição de Brousseau (2008) para o processo de desenvolvimento do saber referente ao papel do professor diante das situações didáticas é de que são necessários meios que orientem o ensino de matemática e que consigam encontrar situações-problemas que proporcionem essa interação (Figura 1), mesmo que longe, direcionado ao interesse do aluno.

Essa busca deve se alongar aos sujeitos como ponto fundamental para intervenção do docente, a vinculação ideal para que aconteçam as situações estabelecidas pela TSD. Segundo Almouloud (2007, p. 33), a teoria das situações didáticas fundamenta-se em três circunstâncias:

> (i) O aluno aprende adaptando-se a um milieu que é fator de dificuldade, de contradições, de desequilíbrio, um pouco como acontece na sociedade humana. (ii) O professor precisa desenvolver o milieu não munido de intenções didáticas é insuficiente para permitir a aquisição de conhecimentos matemáticos pelo aprendiz. (iii) A terceira hipótese postula que esse milieu e essas situações devem engajar fortemente os saberes matemáticos envolvidos no processo de ensino e aprendizagem.

Embasado nessas circunstâncias, o docente deve preparar um ambiente com o objetivo de lecionar os conteúdos matemáticos, incentivando o aprendizado e promovendo as atitudes dos alunos, diante da situação-problema.

Essa preparação de situações adidáticas, definida por Brousseau (1986), apresenta momentos em que os estudantes atuam de maneira independente, ou seja, sem a menor interferência do professor no processo de construção da aprendizagem.

De fato, Brousseau (1986) estabelece que a organização da situação de ensino deve incluir momentos em que o aluno se encontre sozinho com um problema a ser resolvido, sem a intervenção do professor. Esse momento é considerado didático porque o aluno deve se referir ao problema com base apenas no seu próprio conhecimento, sentindo o desafio e não um algoritmo pronto fornecido pelo professor. Nesse sentido, o docente não deve interferir diretamente nas opções de resolução, ou seja, as situações de ensino representam momentos de grande potencial e precisamente podem quebrar a repetição excessiva do modelo tradicional e as práticas padronizadas na aprendizagem.

Para que ocorra a fluidez do conhecimento específico e controle sobre o que se conduz, é necessário utilizar um dispositivo que signifique o *milieu* material, neste caso, a aplicação de problemas olímpicos internacionais, cujas soluções são implementadas com o auxílio do GeoGebra. As relações entre as atividades de ensino com o do saber matemático na TSD são classificadas em quatro fases para situações didáticas, divididas em ação, formulação, validação e institucionalização, descritas por Pais (2015).

Situação de ação: essa fase "deve permitir ao aluno julgar o resultado de sua ação e ajustá-lo, se necessário, sem a intervenção do mestre" (ALMOULOUD, 2007, p. 37-38). Sendo desenvolvida para o aluno realizar os procedimentos mais próximos para resolução de um problema, ocasionando na construção de um conhecimento de natureza mais empírica e instintiva do que teórica.

Situação de Formulação: acontece de forma que o aluno passa a empregar, na resolução de uma situação-problema, alguma ideia de natureza teórica, ocasionando um raciocínio matemático mais dinâmico do que um procedimento empírico e, com isso, faz-se necessário aplicar informações para se chegar na resposta no GeoGebra. Assim, "consiste em proporcionar ao aluno condições para que este construa, progressivamente, uma linguagem compreensível por todos" (ALMOULOUD, 2007, p. 38).

Situação de Validação: desenvolvida para os estudantes utilizarem no instrumento de prova, sendo que nessa fase o saber já estruturado passa a ser utilizado como um propósito de natureza teórica. Essa situação está relacionada ao plano de argumentação racional e, por isso, está guiada para a questão da autenticidade do conhecimento. Com essa etapa, "o aprendiz deve mostrar a validade do modelo por ele criado, submetendo a mensagem matemática (modelo da situação) ao julgamento de um interlocutor" (ALMOULOUD, 2007, p. 39).

Situação de Institucionalização: nessa última fase, "o professor fixa convencionalmente e explicitamente o estatuto cognitivo do saber" (ALMOULOUD, 2007, p. 39-40). Sua utilidade acontece na busca do caráter objetivo e coletivo do conhecimento estudado pelo aluno. Perante a interação do professor, é o momento no qual se realiza o caminho para o conhecimento, do plano individual e particular, à proporção histórica e cultural do saber científico.

Assim, a partir da leitura da TSD, procura-se descrever situações didáticas de ensino, específicas para um aluno participante de Olimpíadas Internacionais de

Matemática, incentivos ao raciocínio, bem como a atitude do professor diante do problema. Graças a isso, será possível determinar quais comportamentos e conhecimentos os alunos terão ao se deparar com cada problema, quais conhecimentos devem ser adquiridos com antecedência e como realizar.

No tópico seguinte, a partir da escolha de dois Problemas Olímpicos (PO) internacionais da Olimpíada Internacional de Matemática, estruturou-se um caminho de abordagem metodológica nas duas primeiras etapas previstas pela Engenharia Didática (ED) e as fases dialéticas da Teoria das Situações Didáticas (TSD).

Resultados e Discussões dos Problemas Olímpicos Internacionais

Nesse cenário, considera-se que os materiais de apoio, livros pesquisados e o recurso educacional digital, mobilizam as categorias de raciocínio matemático, para assim estimular estratégias de resolução pelos professores na preparação olímpica dos alunos, buscando procedimentos que permitam o surgimento de estratégias e argumentos matemáticos, necessários na construção de um problema de olimpíada internacional de matemática.

Análise preliminar ou prévia no aporte olímpico

Um dos objetivos da análise preliminar consiste no desenvolvimento de um quadro teórico de uma pesquisa fundamentada pela ED. Nessa etapa, deve-se fazer uma análise do material didático utilizado em turmas de preparação para as olimpíadas internacionais de matemática e uma análise praxeológica de tipos de atividades propostas e seus possíveis resultados do contrato didático e transposição didática. Além disso, deve-se efetivar um estudo das principais dificuldades relacionadas com o processo de ensino e aprendizagem no ensino de geometria.

Nesse contexto, analisou-se o material disponível no site da IMO, livros nacionais e internacionais e banco de questões de outras competições internacionais. Com essa análise, buscou-se compreender a interpretação dos conteúdos relacionados à Geometria Plana no contexto da matemática olímpica internacional, bem como reconhecer as situações-problema que possam desenvolver habilidades na aprendizagem, com o auxílio do *software* GeoGebra.

Expõe-se no Quadro 1, o resultado da análise de cinco livros que regularmente são utilizados durante as aulas preparatórias de estudantes para olimpíadas internacionais de matemática.

Quadro 1: Análise de livros centralizados nas olimpíadas internacionais de matemática

Livros	Editora/Autor(es)/Ano	Resultado da análise dos livros
The IMO Compendium	Springer Dusan Djukic, Vladimir Jankovic, Ivan Matic e Nikola Petrovic (2011)	Nesse livro, todos os manuscritos foram coletados em um único compêndio de problemas internacionais de matemática do tipo que geralmente aparecem nas OMI.
21 Aulas de Matemática Olímpica	Sociedade Brasileira de Matemática (SBM) Carlos Yuzo Shine (2009)	O livro do professor Carlos Yuzo Shine foi disponibilizado a partir de suas anotações olímpicas e é interessante para estudantes, professores e todos que desejam participar das olimpíadas matemáticas.
Iniciação à Matemática: um curso com problemas e soluções	Sociedade Brasileira de Matemática (SBM) Krerley Oliveira e Adan Jose Corcho Fernandez (2012)	Diversos métodos de resolução de problemas matemáticos, todos acompanhados de exemplos. Essa é uma das vantagens para estudantes do ensino médio e de graduação neste livro que introduz a matemática elementar.
Treinamento Olímpico	Sociedade Brasileira de Matemática (SBM) Bruno Holanda, Carlos A. Ribeiro, Cícero T. Magalhães, Samuel Barbosa e Yuri Lima (2020)	Treinamento Olímpico é um livro que visa divulgar alguns problemas utilizados durante os processos seletivos das delegações brasileiras para diversas competições internacionais de matemática. O livro se divide em: os problemas usados nas listas de treinamento e nos testes de seleção; as soluções, muitas das quais elaboradas pelos alunos que participaram do processo seletivo, e os materiais teóricos escritos para auxiliar os estudos dos aspirantes a membros das equipes brasileiras em competições internacionais.
Círculos Matemáticos: A Experiência Russa	Instituto de Matemática Pura e Aplicada (IMPA) Dimitri Fomin, Sergey Genkin, Ilia Itenberg (-)	Este livro foi originalmente publicado em inglês pela *American Mathematical Society* com o título *Mathematical Circles* em 1996. A presente tradução foi feita e publicada pelo Instituto de Matemática Pura e Aplicada (IMPA) com a autorização da *Studies in Advanced Mathematics* (MAS). Essa obra foi produzida nas culturas que fomentaram a criação de grupos formados por alunos, professores e matemáticos da União soviética, chamados círculos matemáticos.

Fonte: Elaborado pelos Autores

Nessa investigação dos livros selecionados para a análise, destaca-se a relação entre os conteúdos matemáticos abordados, o estudo da ED e TSD com a teoria e a exploração das questões olímpicas. Portanto, prioriza-se o raciocínio matemático, a construção e realização de estratégias com o propósito de desenvolver habilidades e aptidões que permitam que os alunos construam o conhecimento matemático; a análise das questões, a reflexão dos conteúdos vistos e o descobrimento de novas ações, e para isso, utiliza-se a TSD na organização do ensino.

Análise a *priori* das situações olímpicas

Nessa etapa, o pesquisador desenvolveu, construiu e analisou uma sequência de situações didáticas para responder aos questionamentos e validar as hipóteses levantadas nas análises preliminares. Sua principal função é utilizar novos objetos matemáticos por meio de perguntas feitas pelos alunos no momento de resolver a situação olímpica (ALMOULOUD, 2007).

Dessa forma, é nesta etapa que PO é construído, e valendo notar que a situação-problema deve ser projetada com a aprendizagem dos alunos em relação a ação, reflexão, suposição e autonomia. Segundo Artigue (1995), a situação didática deve ser projetada de forma que o comportamento dos alunos possa ser previsto.

Na análise realizada na primeira etapa da ED, denominada de preliminar ou prévia, foram selecionados PO internacionais pertinentes ao GeoGebra para a construção de hipóteses sobre possíveis soluções, que despertassem o interesse dos alunos e que selecionassem previamente o conhecimento matemático. Em outras palavras, os PO propostos são relacionados para a estruturação de novos e antigos conhecimentos, esse processo possibilita a mobilização de conhecimentos matemáticos relacionados à Geometria. Desse modo, “o aluno aprende ajustando-se ao meio que é fator de contradições, obstáculos e desequilíbrios. Esse conhecimento da adaptação do aprendiz é revelado por meio de novas respostas que representam aprendizagem” (BROUSSEAU, 1986, p. 296). Portanto, Alves (2016b, p. 137) declara que:

> Diante do movimento ou um conjunto de modificações necessárias que devem ser efetivadas para que uma ação de ensino aconteça, não podemos desconsiderar a natureza intrínseca dos conteúdos, dos objetos matemáticos e dos processos matemáticos que buscamos tornar evidentes numa determinada proposta de abordagem.

A partir dessas escolhas globais, partiu-se para uma proposta que trata do estudo da geometria plana, explorando diversos termos (circunferência, triângulo, reta e ponto), que frequentemente está vigente em provas de olimpíadas de matemática internacional, procurando desenvolver uma transposição didática através da utilização do *software* GeoGebra.

Neste estudo, serão abordadas duas situações olímpicas internacionais relacionadas à geometria plana, formulando as seguintes hipóteses de trabalho com a TSD que serão objeto de investigação empírica neste artigo. Entretanto, também pode ser foco de interesse em outros trabalhos empíricos que tratam de olimpíada de matemática, envolvendo a mesma temática ou outro assunto no ensino da geometria.

Dois Problemas Olímpicos Internacionais

Neste tópico, ocorre a delineação de vários elementos provenientes dos tópicos anteriores e são descritos dois Problemas Olímpicos Internacionais na forma em que acontece a aceitação à nova noção relacionada da SDO. Contudo, a partir dos enunciados das situações-problemas presentes na ferramenta oficial aplicada ao decurso das etapas da IMO, mostra-se e discute-se formas diversas de exploração e alteração desse conteúdo e, assim, compreender a mediação prevista e inserida à ideia de SDO como uma orientação de método para o ensino que possa induzir, integrar e mostrar uma quantidade maior de estudantes participantes nas olimpíadas internacionais, como tem-se discutido aqui neste trabalho, de alunos não competidores.

Mostra-se que o avanço da tecnologia está presente no ensino desempenhando um papel imprescindível na transformação da transposição do professor (ARTIGUE, 2013). Em seguida, apresenta-se os procedimentos necessários e os possíveis métodos que podem ser executadas por meio da construção geométrica visualizada no *software* GeoGebra.

Conteúdos Prévios das Situações:

Triângulo acutângulo, circuncírculo, arcos e mediatrizes. Situação do Problema Olímpico (Problema da IMO 2018 - Geometria - 1º Dia - Questão 01). Seja Γ o circuncírculo do triângulo acutângulo ABC. Os pontos D e E estão sobre os segmentos AB e AC, respectivamente, de modo que AD = AE. As mediatrizes de BD e CE intersectam os arcos menores AB e AC de Γ nos pontos F e G, respectivamente. Prove que as retas DE e FG são paralelas (ou são a mesma reta).

Dialética da ação:

Nessa fase, os alunos se encontram com um problema olímpico cuja solução é o conhecimento a ser ensinado; os estudantes procederam sobre essa situação, buscando *feedback* sobre sua ação. Isto significa que uma situação olímpica internacional deve possibilitar que os alunos vejam o julgamento do “resultado de sua ação e ajustá-lo, se necessário, sem a intervenção do professor, devido à retroação do milieu" (ALMOULOUD, 2007 p. 37).

Entretanto, essa etapa é determinada pela ação inicial dos praticantes que, ao se debruçarem sobre o enunciado da questão olímpica proposta, leram atentamente para compreender, e assim observaram e transcreveram as informações contidas do problema e posteriormente, efetivaram as suas conjecturas. Na Figura 2, observa-se o enunciado extraído da prova da IMO 2018.

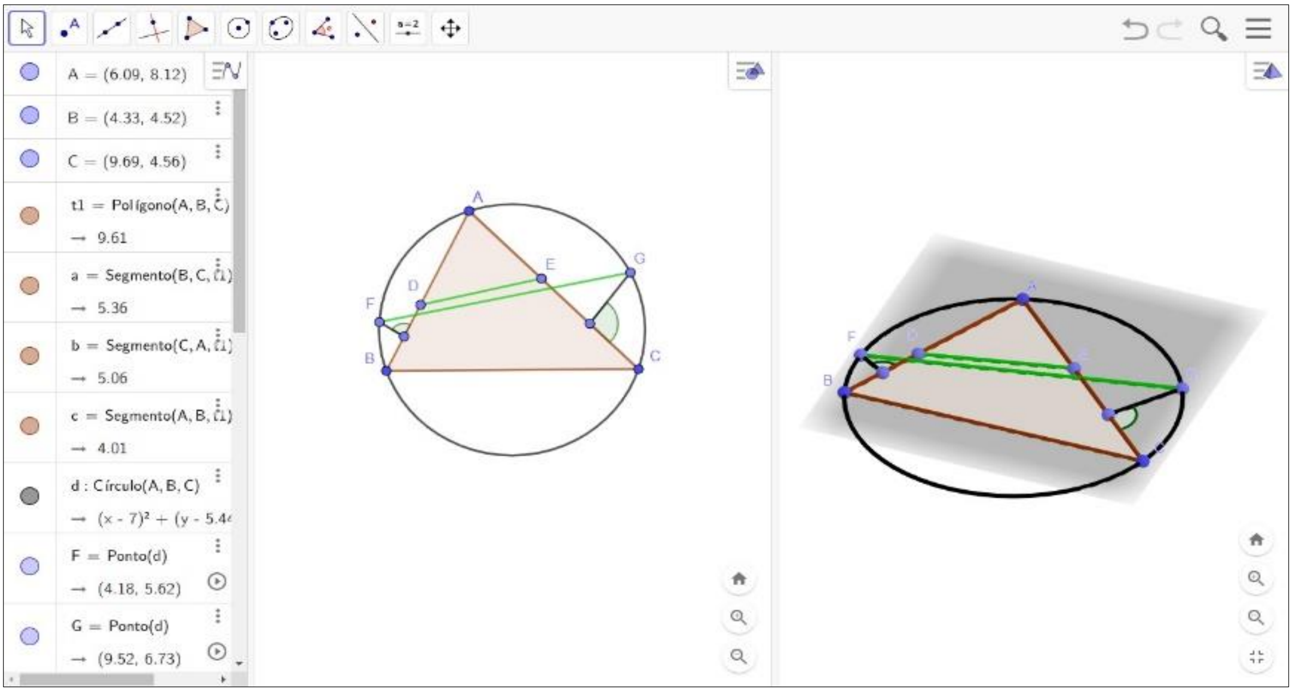
Figura 2: Exemplo de um problema olímpico presente na IMO de 2018

Problema 1. Seja Γ o circuncírculo do triângulo acutângulo ABC. Os pontos D e E estão sobre os segmentos AB e AC, respectivamente, de modo que $AD = AE$. As mediatrizes de BD e CE intersectam os arcos menores AB e AC de Γ nos pontos F e G, respectivamente. Prove que as retas DE e FG são paralelas (ou são a mesma reta).

Fonte: Prova da IMO (2018)

A IMO 2018 foi realizada na cidade Cluj-Napoca, Romênia. Problema proposto pela delegação da Grécia. Em seguida, visualiza-se a SDO em destaque da Geometria construída a partir do *software* GeoGebra (Figura 3).

Figura 3: Fase dialética da ação



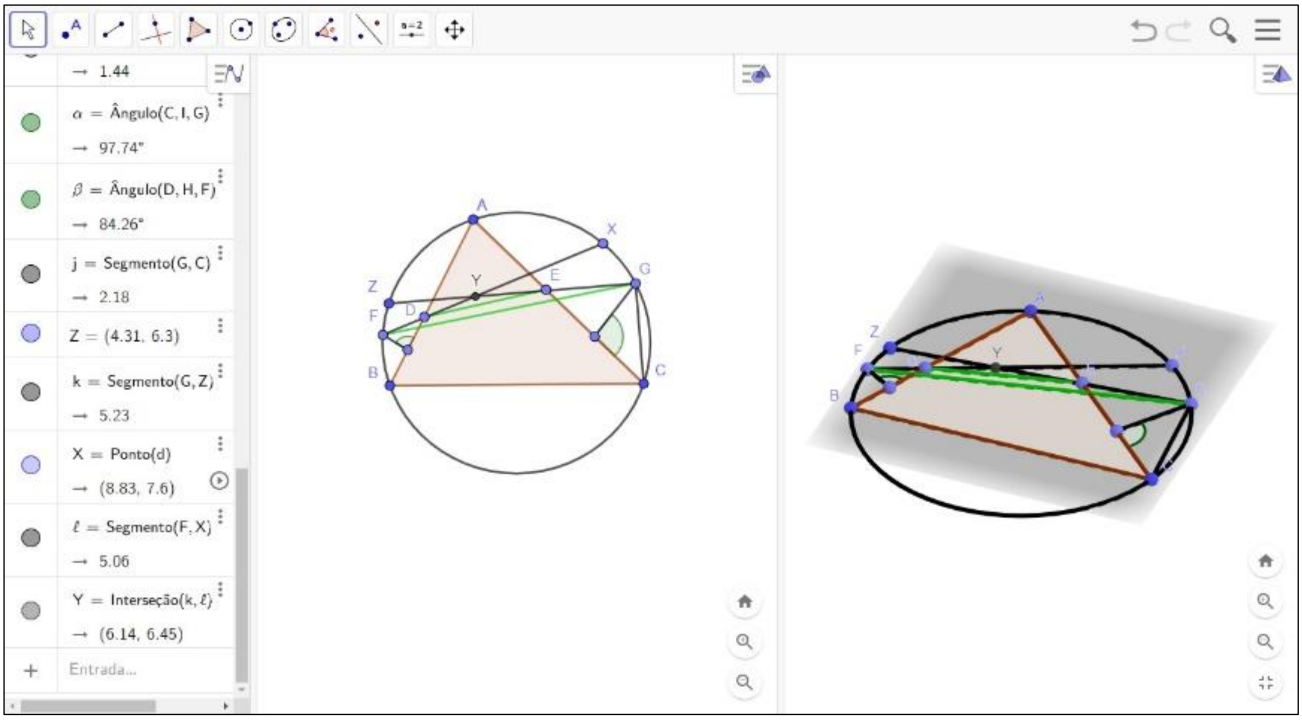
Fonte: Elaborado pelos Autores

Dialética de Formulação:

Essa etapa acontece pela troca de informações entre os estudantes e/ou entre os discentes e o docente, esses intercâmbios discursivos podem ser escritos ou orais. “Como resultado, essa dialética permite criar um modelo explícito que pode ser formulado com sinais e regras comuns, já conhecidas ou novas” (ALMOULOUD, 2007 p. 38). Vale destacar que, nessa fase, os alunos mostram as concepções e métodos adotados no desenvolvimento de busca de uma solução para o problema. Com isso, o objetivo continua na interação promovida pelo professor e os estudantes. Dessa forma, se o aluno deve proceder sem nenhuma informação disponibilizada, ou seja, um colega pode auxiliá-lo, acrescentando o que lhe falta.

A fase da dialética de formulação permite ao estudante construir, gradualmente, a elaboração de métodos que possibilite a resolução do problema proposto. Nessa etapa, o professor instiga os alunos a observarem a representação da SDO desenvolvida com o suporte do *software* GeoGebra (Figura 4).

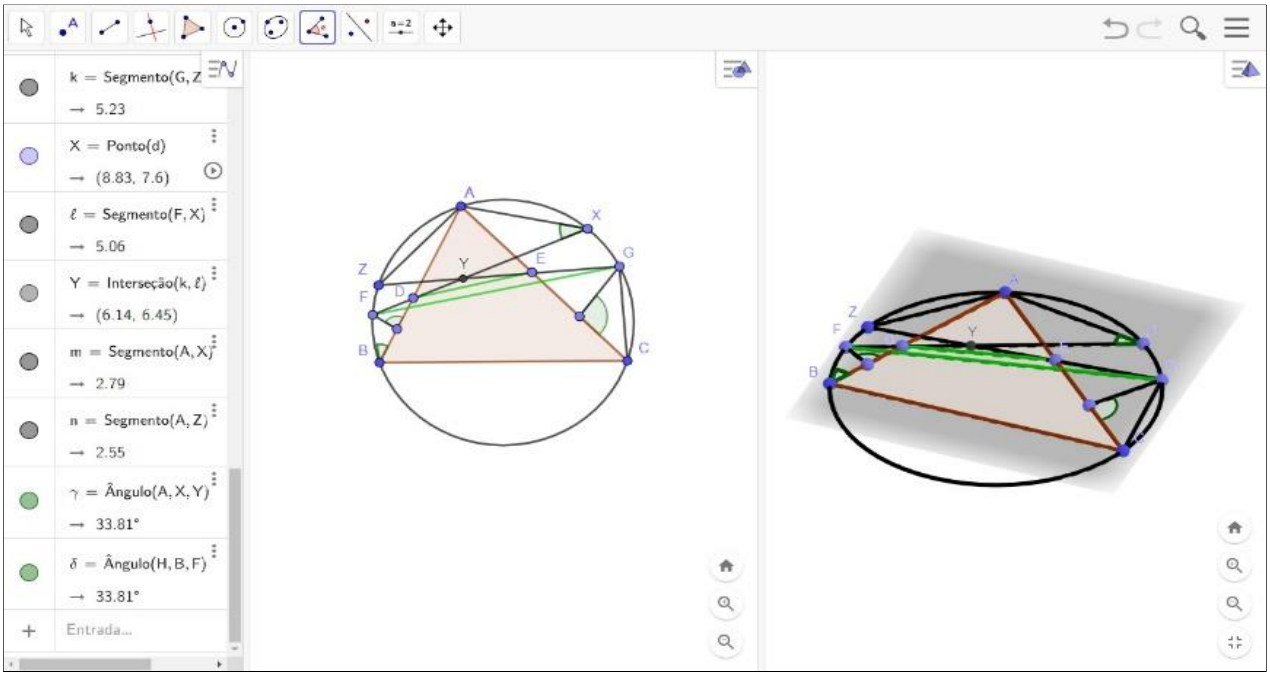
Figura 4: Desenvolvimento da SDO



Fonte: Elaborado pelos Autores

Seguindo o processo da construção (Figura 4), os estudantes observaram as informações matemáticas presentes entre os elementos matemáticos, recuperando os seus conhecimentos prévios (Figura 5).

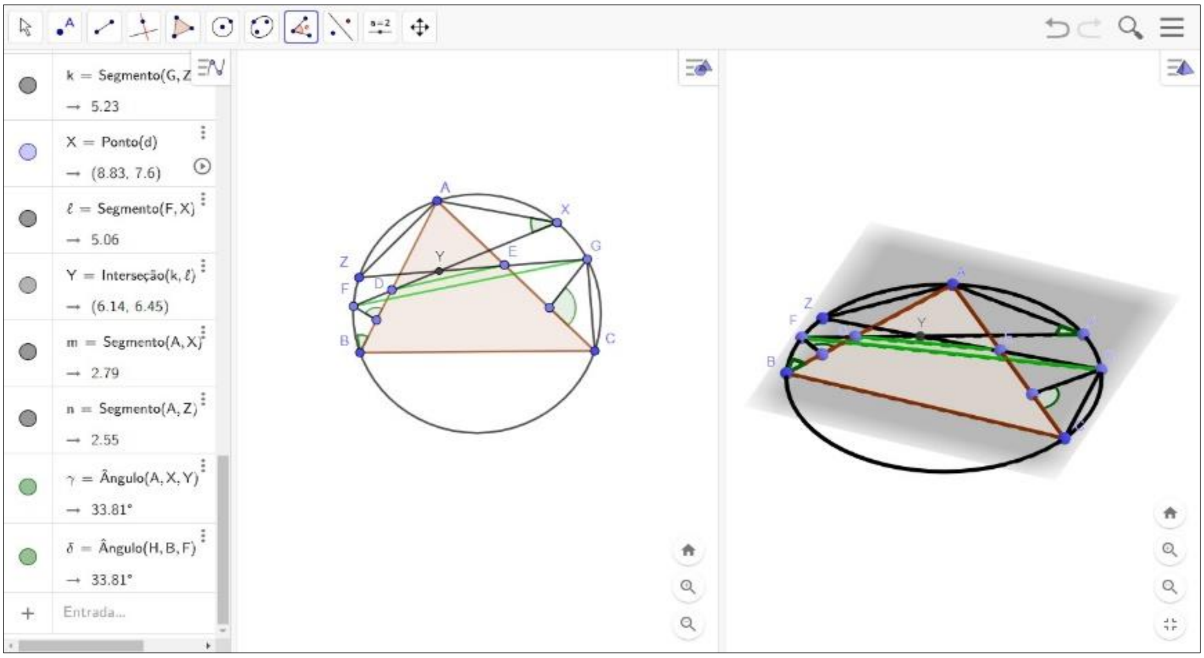
Figura 5: Etapa dialética da formulação



Fonte: Elaborado pelos Autores

Além disso, os estudantes identificam que, na sequência descrita, todas as áreas consideradas são pequenos arcos. Ao analisar todos os elementos matemáticos incluídos na situação didática, os alunos podem observar que *P* é o ponto médio do arco *BC*. Então *AP* é a bissetriz de $\angle BAC$, portanto, no triângulo isósceles *ADE*, segue em $AP \perp DE$. Com essas conclusões elaboradas pelos estudantes (Figura 6), tem-se:

Figura 6: Bissetriz do triângulo isósceles



Fonte: Elaborado pelos Autores

Dialética da validação:

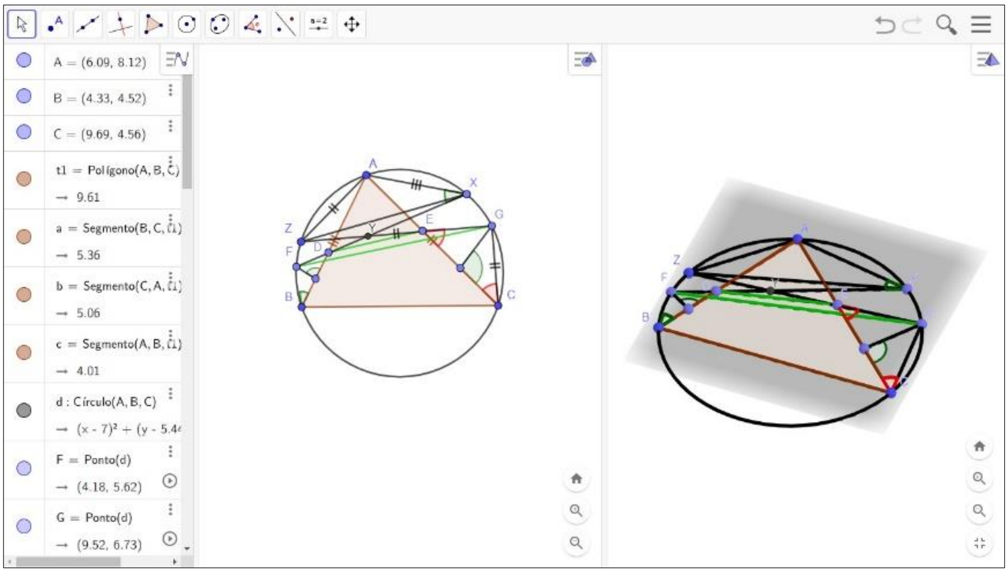
Nessa fase, os estudantes mostram a estratégia que os levaram a solucionar a situação-problema, ou seja, apresentaram a validade do modelo criado, a fim de justificar o desempenho deste. Então, os estudantes foram analisados por todos que os ouviram, podendo dar mais explicações em conexão com possíveis consultas dos colegas que podem não entender ou concordar. Dessa forma, o docente promove o debate entre alunos para criar testes ou para refutá-los.

Portanto, a declaração do problema é equivalente à $AP \perp FG$. Para provar isso, seja X a segunda interseção de Γ com FD. Então o triângulo FBD é isósceles, assim, tem a seguinte descrição que $\angle AXF$ - $\angle ABF$ - $\angle FDB$ - $\angle ADX$. O professor intervém para auxiliar os estudantes a validar a estratégia utilizada por meio da interação da construção realizada no ambiente gráfico do *software* GeoGebra, utilizando-se dos conhecimentos geométricos necessários para aplicar a relação entre os pontos AX - AD.

A seguir, demonstra-se a estruturação realizada pelos alunos (Figura 7), apresentando-se no quadro com a aplicação do professor, de uma forma ampla, a descrição da denotação por Z e a segunda interseção de Γ com GE, obtém-se AZ - AE. Isso mostra que AX - AZ. Entretanto, $\angle FBD$ - $\angle FDB$ segue em $AF – BF + AX – BF + AZ$, por isso $BF – ZF$. De maneira semelhante, consegue chegar à conclusão de que $CG – GX$. Isso produz:

$$\angle(AP,FG) - \frac{AF+PG}{2} - \frac{AZ+ZF+PC+CG}{2} - \frac{XZ+ZB+BC+CX}{4} - 90^o$$

Figura 7: Interseção do triângulo isósceles ligado à circunferência



Fonte: Elaborado pelos Autores

Dialética da institucionalização:

Essa fase é marcada pela exposição do novo conhecimento pelo professor, de maneira clara e explícita, ou seja, o docente deve antecipar o momento apropriado para formalizar o novo conhecimento. Segundo Almouloud (2007), se a institucionalização desse novo saber for realizada em primeiro plano, o seu significado será cortado, evitando uma aprendizagem adequada e criando dificuldades em sua compreensão. Nesse processo, pode acabar atrasando o aprendizado e tornar difícil a compreensão e assimilação por parte dos alunos. A institucionalização ocorre por meio do discurso entre estudantes e professores para incorporar novos conhecimentos. O docente institucionaliza novos conhecimentos em tempo hábil, ele fez disso a herança da classe e mostrou que este novo conhecimento pode ser usado na resolução de outros problemas matemáticos (BROUSSEAU, 1986). No segundo problema, estrutura-se o objeto abordado na IMO, no primeiro dia, em 2019.

Considerando os outros conteúdos da Geometria Plana, pode-se ver um interesse especial do problema em definir os pontos relacionados à circunferência e ao triângulo *ABC*. Observe que o uso do *software* GeoGebra contribui para a descrição e uma explicação das propriedades não mostradas na declaração original.

Conteúdos Prévios das Situações:

Triângulo retângulo, circuncentro, ponto médio do segmento. Situação do Problema Olímpico (Problema da IMO 2019 - Geometria - 1º Dia - Questão 02). No triângulo ABC, o ponto A_1 está no lado BC e o ponto B_1 está no lado AC. Sejam P e Q pontos nos segmentos AA_1 e BB_1, respectivamente, tal que PQ é paralelo a AB. Seja P_1 um ponto na reta PB_1, tal que B_1 está estritamente entre P e P_1 e $\angle PP_1C = \angle BAC$. Analogamente, seja Q_1 um ponto na reta QA_1, tal que A_1 está estritamente entre Q e Q_1 e $\angle CQ_1Q = \angle CBA$. Prove que os pontos P, Q, P_1 e Q_1 são concíclicos (Figura 8).

Figura 8: Exemplo de um Problema Olímpico da IMO 2019

Problema 2. No triângulo ABC, o ponto A_1 está no lado BC e o ponto B_1 está no lado AC. Sejam P e Q pontos nos segmentos AA_1 e BB_1, respectivamente, tal que PQ é paralelo a AB. Seja P_1 um ponto na reta PB_1, tal que B_1 está estritamente entre P e P_1 e $\angle PP_1C = \angle BAC$. Analogamente, seja Q_1 um ponto na reta QA_1, tal que A_1 está estritamente entre Q e Q_1 e $\angle CQ_1Q = \angle CBA$.

Prove que os pontos P, Q, P_1 e Q_1 são concíclicos.

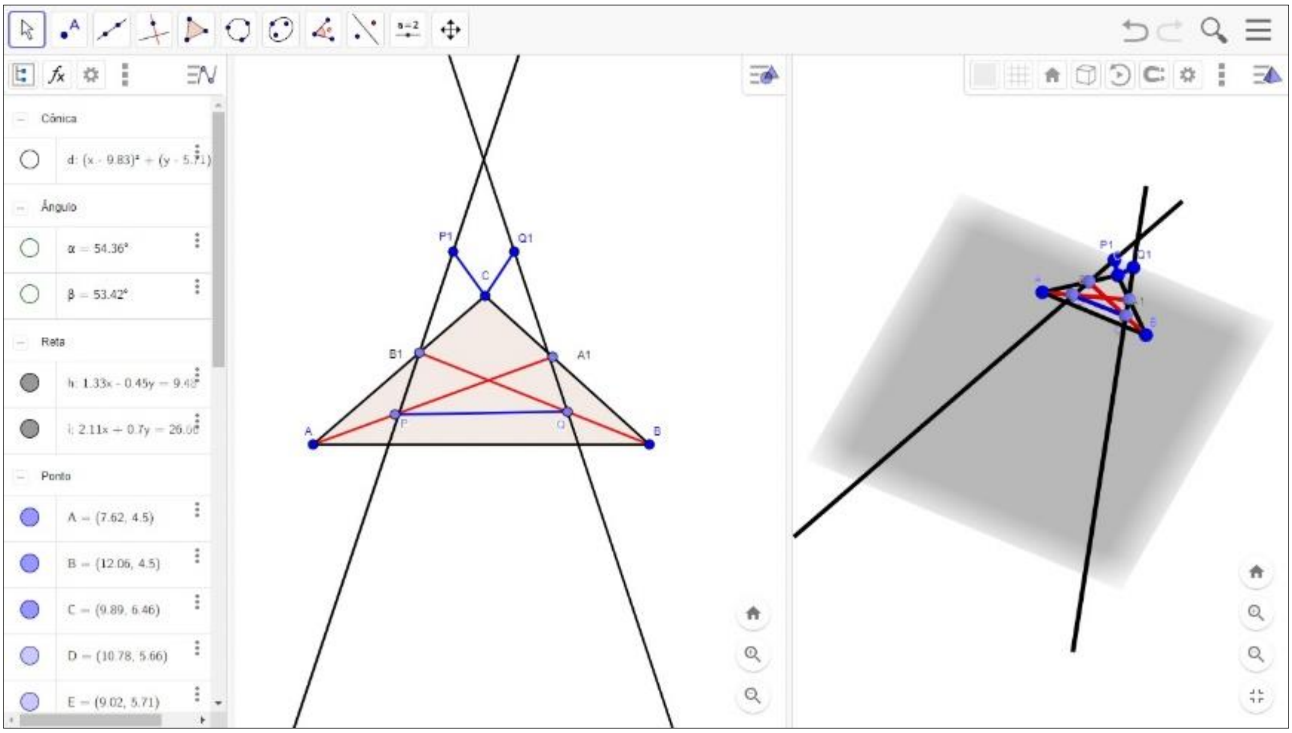
Fonte: IMO, 2019

A IMO 2019 foi realizada na cidade Bath, Reino Unido. Problema proposto pela delegação da Ucrânia.

Situação de ação:

Com o apoio da visualização, os alunos podem investigar a construção geométrica produzida no *software* GeoGebra e, a partir dos comandos dinâmicos com o *software*, os discentes conseguem confrontar o procedimento numérico com o procedimento geométrico, sobretudo dos pontos criados em: Seja K, L, M, B ', C' os pontos médios de BP, CQ, PQ, CA e AB, respectivamente (Figura 9).

Figura 9: Etapa estruturada na situação de ação



Fonte: IMO (2021)

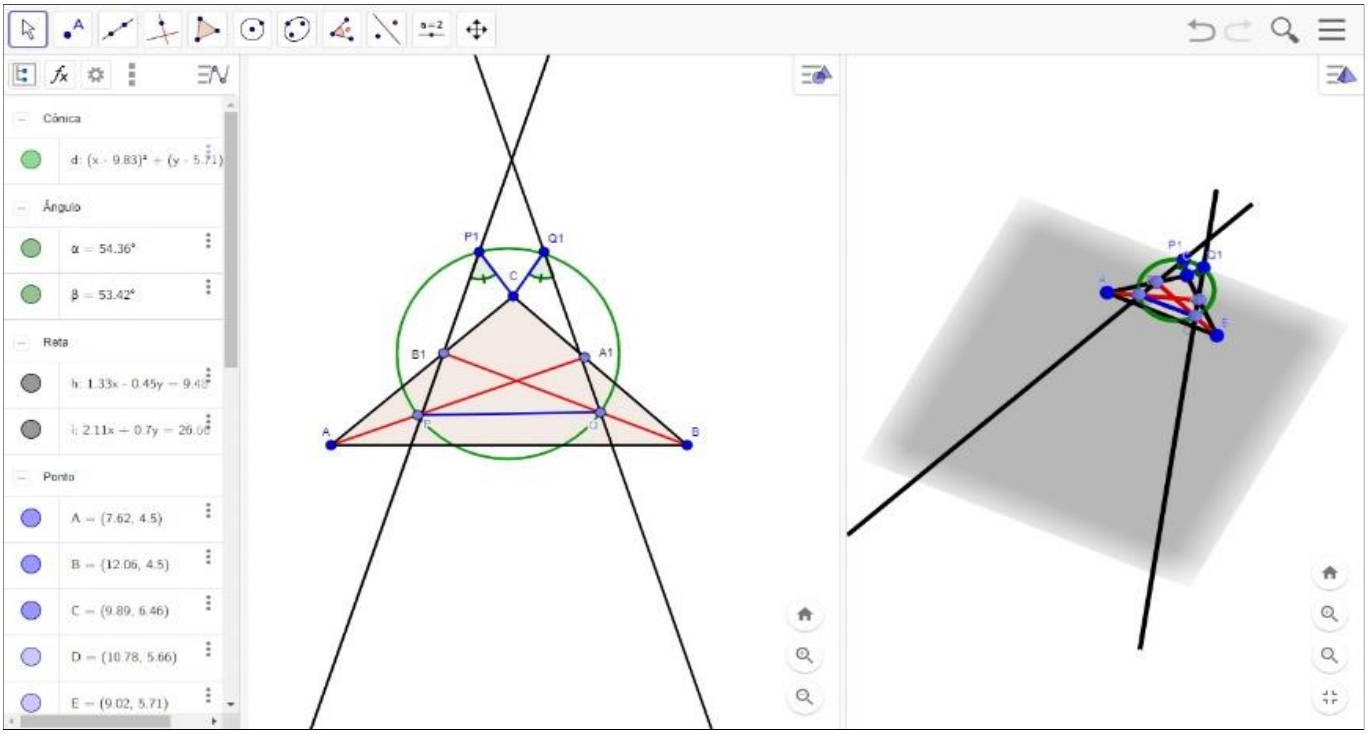
Situação de formulação:

Com início das informações associadas na fase anterior, incentivadas pelo professor, com ênfase na visualização e interpretação das relações de natureza geométrica, algébrica e geométrica, o grupo de alunos pode eleger um método prático. Nesse processo, pode determinar que os pontos *CA* || *LM*, seguindo os ângulos de $\angle LMP = \angle QPA$. Assim, como *k* passa pelo segmento *PQ* em *M*, encontra-se $\angle LMP = \angle LKM$.

Desse modo, segue a exploração da construção (Figura 10). Nessa etapa, os estudantes conseguem entender que os pontos ligados a *PAQPA* = $\angle$*LKM.* Da mesma forma, segue *AB* || *MK* que *∠PQA* = *∠KLM*. Assim, os pontos APQ e MKL do triângulo são semelhantes, portanto:

$$\frac{AP}{AQ} = \frac{MK}{ML} = \frac{\frac{QB}{2}}{\frac{PC}{2}} = \frac{QB}{PC}$$

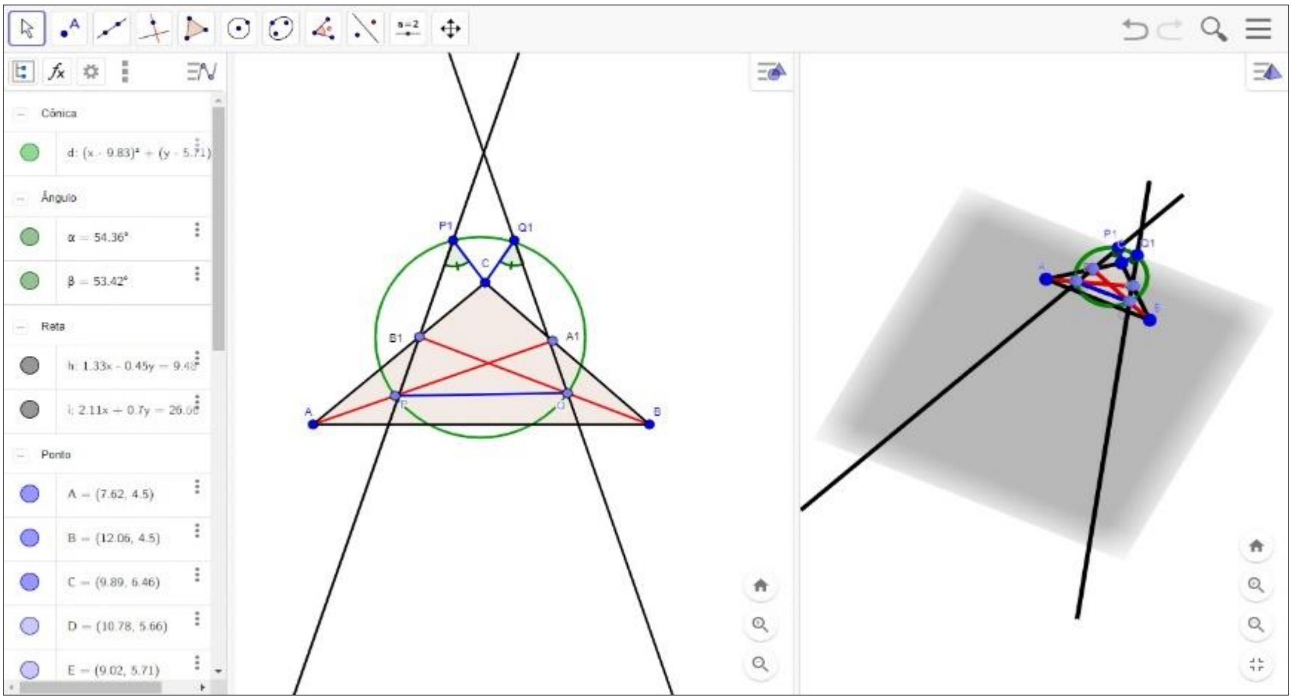
Figura 10: Exemplo da construção com o software GeoGebra correspondente ao PO



Fonte: IMO (2021)

Os alunos podem agora confrontar as construções exibidas nas Figuras 8, 9 e 10. Nas Figuras 11 e 12, mostra-se os ângulos equivalente a $AP \cdot PC = AQ \cdot QB$, o que significa que a ligação dos pontos *P* e *Q* em relação ao círculo do *ΔABC* é igual, portanto, *OP* = *OQ*.

Figura 11: Exemplo da construção com o software da PO abordado na IMO

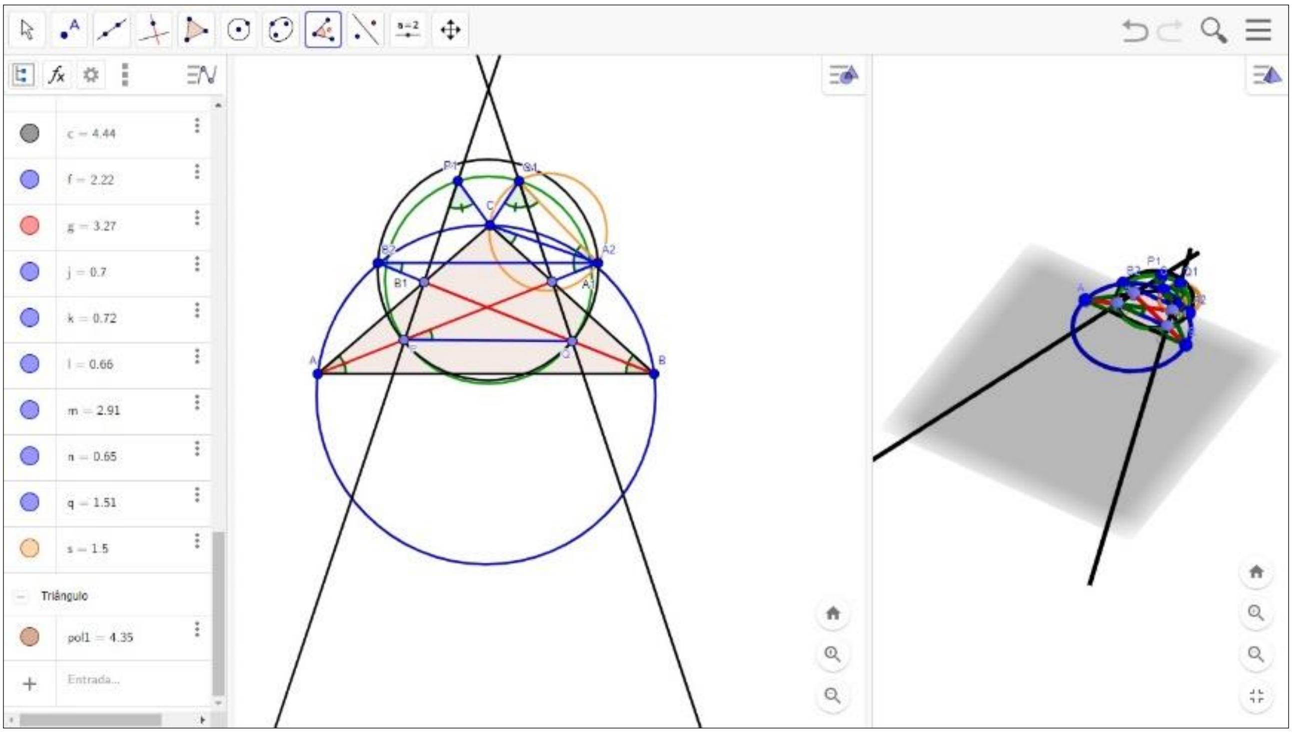


Fonte: IMO (2021)

Situação de validação:

Em processo dos registros nas resoluções previstas no instrumento aplicado na IMO, desde que os argumentos estejam confirmados na fase atual, os estudantes podem tomar conhecimento da situação olímpica, de modo eficiente, de que o ambiente do PO discutido diz respeito ao caráter de competição oficial. Dessa forma, o professor pode oferecer as informações que são descritas na Figura 12. Nela, eles devem buscar seus questionamentos de solução do problema. O momento acontece no seguinte argumento estabelecido pelo seguinte cálculo: *OP2 - OQ2 = OB'2 + B'P2 - OC'2 - C'Q2 = (OA2 - AB'2) + B'P2 - (OA2 - AC'2) - C'Q2 = (AC'2 - C'Q2) - (AB'2 - B'P2) = (AC '- C'Q) (AC' + C'Q) - (AB '- B' P) (AB '+ B' P) = AQ · QB - AP · PC*, concluindo assim que os pontos de *OP2 - OQ2 = 0*, conforme desejado. O modelo computacional encontra-se confrontado com o modelo axiomático, objetivando a fase final de institucionalização da SDO.

Figura 12: PO originalmente construída a partir de provas olímpicas internacionais



Fonte: IMO (2021)

Situação de institucionalização:

Como caracterizado pela primeira SDO discutida anteriormente, efetua-se a importância de proporcionar ao grupo, ou grupos de alunos, o discurso científico e a comparação dos resultados finais correlacionados em uma Situação Didática Olímpica. Do mesmo modo, é lembrado pelas descrições emblemáticas de Ávila (2002, p. 41) ao advertir que:

> todos nós sabemos que ninguém aprende matemática por que assiste aulas, por mais que seja talentoso o professor em suas exposições. É preciso trabalhar individualmente, com muita disciplina e persistência. Daí a necessidade de levarmos nossos alunos ao trabalho individual. Eles têm de aprender a andar com as próprias pernas; aprender fazendo, do mesmo modo que aprendem a andar e andar de bicicleta.

Para concluir, verificou-se o momento de experimentar as fases dialéticas determinadas pela TSD, descrevendo situações didáticas olímpicas que auxiliem os estudantes a elaborar habilidade de resolver problemas de forma autônoma, centralizada e colaborativa.

Considerações Finais

Mediante as situações olímpicas apresentadas, buscou-se relativizar uma proposta de ensino voltada às olimpíadas de matemática internacionais, tendo os esforços de divulgação de uma cultura matemática caracterizada pela sua popularização científica e da comunicação e informação em ciências, de modo geral, a partir da percepção dos estudantes competidores olímpicos e participantes de olímpiadas de matemática e, de modo direto, das maratonas e das competições nacionais e internacionais.

Nos tópicos anteriores, foi discutida a metodologia de pesquisa a Engenharia Didática (ED), a qual permitiu a análise e elaboração do campo epistêmico relacionado ao objeto a ser estudado. Seguindo de seus pressupostos, o pesquisador estabelece os objetivos e as possibilidades da sua investigação, mobilizado por intermédio de Problemas Olímpicos e desafios para ser formulado por um grupo seleto de professores de Matemática, utilizando a Teoria das Situações Didáticas (TSD).

Isso posto, aponta-se nas duas situações didáticas olímpicas internacionais a importância de realizar uma aula seguindo as fases dialéticas determinadas por Guy Brousseau (ação, formulação, validação e institucionalização), explorando o *software* GeoGebra a fim de alterar as características dos problemas. Com isso, sugere-se ao professor de Matemática perspectivar novos métodos de abordagem (o uso da tecnologia digital) e descrição de situações olímpicas internacionais em seu contexto didático, que não sejam limitadas a uma atividade de resolução de problemas olímpico, com tempo previamente determinado e principalmente individuais.

Por fim, este artigo apresentou um entendimento de duas situações olímpicas, dentre a existência de uma enorme quantidade de estudantes que não apresentam interesse direto pela natureza desafiadora e competitiva. Na verdade, esses alunos necessitam conhecer e encontrar o viés de uma Matemática anunciada pelas Olimpíadas e que, em suas relevâncias, remonta diretamente ao pensamento intuitivo histórico de grandes matemáticos do passado, diante de instigações que se evidenciavam antes problemas inspiradores e responsáveis da sabedoria.

Referências

ALMOULOUD, S. A. **Fundamentos da Didática da Matemática.** Curitiba: Editora UFPR, 2007.

ALVES, F. R. V. Engenharia Didática para a generalização da sequência de Fibonacci: uma experiência num curso de licenciatura. **Educação Matemática Pesquisa,** São Paulo, v. 18, n. 1, p. 61-93, 2016a.

ALVES, F. R. V. Didática de matemática: seus pressupostos de ordem epistemológica, metodológica e cognitiva. **Interfaces da Educação,** v. 7, n. 21, p. 131-150, 2016b.

ALVES, F. R. V. SITUAÇÃO DIDÁTICA OLÍMPICA (SDO): Aplicações da Teoria das Situações Didáticas para o Ensino de Olimpíadas. **Revista Contexto & Educação,** v. 36, n. 113, p. 116–142, 2021.

ARTIGUE, M. Ingénierie Didactique. **Recherches en Didactique des Mathématiques.Grenoble: La Pensée Sauvage-Éditions,** v. 9, n. 3, p. 281-307, 1988.

ARTIGUE, M. Ingénièrie didactique. In: Brun, J. **Didactiques des Mathématiques.** Paris: Délachaux et Niestle, p. 243-263, 1995.

ARTIGUE, M. L'impact curriculaire des technologies sur l'éducation mathématique. **Revista de Educação Matemática e Tecnologia Iberoamericana,** v. 4, n. 1, p. 1-4, 2013.

ÁVILA, G. O. provão e o ensino de Matemática. **Revista Matemática Universitária,** n. 32, p. 39-48, 2002.

BROUSSEAU, G. Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques. **Recherches en Didactique des Mathématiques,** v. 7, n. 2, p. 33-115, 1986.

BROUSSSEAU, G. **Théorisation des phénomènes d'enseignement des mathématiques.** Mathematics. Université Sciences et Technologies - Bordeaux I, 1986.

BROUSSEAU, G. A etnomatemática e a teoria das situações didáticas. **Educação Matemática Pesquisa,** São Paulo, v. 8, n. 2, p. 267-281, 2006.

BROUSSEAU, G. **Introdução ao estudo das situações didáticas: conteúdos e métodos de ensino.** Apresentação de Benedito Antonio da Silva; consultoria técnica José Carlos Miguel; [tradução Camila Bógea]. São Paulo: Ática, 2008.

KENDEROV, P.; REJALI, A.; BUSSI, M. G. B.; PANDELIEVA, V.; RICHTER, K.; MASCHIETTO, M.; KADIJEVICH, D.; TAYLOR, P. Challenges Beyond the Classroom – Sources and Organizational Issues. In: Challenging Mathematics In and Beyond the Classroom. **Anais do The 16th ICMI Study.** New York: Springer, p. 53-96, 2009.

KENDEROV, P. A Short History of the World Federation of National Mathematics Competitions. **Mathematics Competitions,** v. 22, n. 2, p. 14-31, 2009.

PAIS, L. C. **Didática da matemática: uma análise da influência francesa.** Belo Horizonte: Autêntica, 2015.