Recebido: 11/01/2022 ■ Aprovado: 25/03/2022 ■ Publicado: 06/04/2022

RENCIMA Revista de Ensino de Ciências e Matemática
eISSN 2179-426X
10.26843/rencima.v13n2a01

História da Matemática no Ensino Médio: uma proposta de material didático a partir (e apesar) da BNCC-EM

Daniel Jelin[1]

Antonio Luís Venezuela[2]

Resumo: Este artigo reflete sobre o notório descompasso entre a atenção dada à História da Matemática dentro da sala de aula e fora dela. A partir dessa reflexão, propõe-se aqui um formato de material didático que incentive o emprego de elementos históricos no cumprimento da Base Nacional Curricular Comum do Ensino Médio (BNCC-EM). A proposta consiste em um relato histórico, vinculado a uma determinada habilidade, e tarefas matemáticas nele inspiradas. Para ilustrar o formato, apresentamos um exemplo apoiado em três contribuições do século XVII, devidas a Michael van Langren, Christiaan Huygens e Edmond Halley. Tanto na construção do relato como na elaboração de tarefas, busca-se enfatizar o uso da História da Matemática para o estudo de conceitos e procedimentos matemáticos, sobre o que a própria BNCC-EM silencia, ao contrário de marcos anteriores da Educação.

Palavras-chave: História da Matemática. Educação Matemática. Currículo. Ensino Médio.

History of Mathematics in High School: a proposal for didactic material based on (and despite) the Common Core

Abstract: This article examines the notorious contrast between the importance given in and outside the classroom to the use of History of Mathematics in teaching Mathematics. Based on that, we propose a framework of didactic material that encourages the use of historical elements in the fulfillment of the Brazilian Common Core for High School (BNCC-EM). The material consists of a historical recount, related to certain skill, and mathematical tasks inspired by it. We also present one example supported by three seminal contributions from the 17th century, due to Michael van Langren, Christiaan Huygens and Edmond Halley. Throughout recount and tasks, we emphasize the use of History of Mathematics for the study of mathematical procedures and concepts, about which the BNCC-EM itself, contrary to previous milestones in Education, says nothing.

Keywords: History of Mathematics. Mathematics Education. Curriculum. Secondary Education.

Historia de las Matemáticas en la Enseñanza Secundaria: una propuesta de material didáctico a partir (y a pesar) del Currículo Básico

Resumen: Este artículo reflexiona acerca del notorio desajuste entre la atención prestada a la Historia de las Matemáticas dentro y fuera del aula. A partir de esta reflexión, se propone aquí un formato de material didáctico que incentive el uso de elementos históricos en el cumplimiento del Currículo Básico brasileño para la escuela

[1] Mestre em Matemática. Professor do Centro Educacional Sesi, em Sorocaba. São Paulo, Brasil. ✉ danieljelin@gmail.com https://orcid.org/0000-0003-3314-7044.

[2] Doutor em Engenharia Mecânica. Professor Associado do Departamento de Física, Química e Matemática da Universidade Federal de São Carlos, *campus* Sorocaba. São Paulo, Brasil. ✉ alvenez@ufscar.br http://orcid.org/0000-0001-7323-6207.

secundaria (BNCC-EM). La propuesta consta de un informe histórico, vinculado a una determinada habilidad, y tareas matemáticas inspiradas en elle. Para ilustrar el formato, presentamos un ejemplo respaldado por tres contribuciones del siglo XVII debidas a Michael van Langren, Christiaan Huygens y Edmond Halley. Tanto en la construcción del informe como en la elaboración de tareas, se buscó enfatizar el uso de la Historia de las Matemáticas para el estudio de conceptos y procedimientos matemáticos, sobre qué la BNCC-EM misma, contrariamente a hitos anteriores en Educación, guarda silencio.

Palabras clave: Historia de las Matemáticas. Educación Matemática. Currículum. Enseñanza Secundaria.

1 Introdução

A literatura dá amplo respaldo à adoção da História da Matemática (HM) no ensino de Matemática (FREUDENTHAL, 1981; FAUVEL, 1991; ERNEST, 1998; D'AMBRÓSIO, 1999; FAUVEL e VAN MAANEN, 2002; LARA, 2016; FURINGHETTI, 2020). Em sala de aula, contudo, não se verifica o mesmo entusiasmo. Entre razões apontadas para a resistência dos professores estão a falta de preparo e de acesso a material didático apropriado (SIU, 2006; BRITTO E BAYER, 2007; SANTOS, 2017). Esse descompasso pode ser agravado em razão da implantação da Base Nacional Curricular Comum do Ensino Médio (BNCC-EM), de larga repercussão sobre o mercado editorial, pois o novo marco legal, ao contrário de documentos que o antecederam, não faz menção à perspectiva histórica na área de Matemática e suas Tecnologias (BRASIL, 2018a).

O presente trabalho examina argumentos favoráveis e desfavoráveis a essa perspectiva histórica e, em atenção aos argumentos favoráveis, tem como objetivo propor um formato de material didático que incentive o professor do Ensino Médio a empregar a HM no cumprimento do currículo comum. Este é um estudo exploratório, calcado em levantamento bibliográfico e documental, fruto de dissertação de mestrado escrita pelo primeiro autor e orientada pelo segundo. O trabalho organiza-se da seguinte maneira: em um primeiro momento, abordamos a atenção dada à HM em documentos oficiais da Educação; em seguida, focamos a distância entre a potencialidade atribuída à HM e sua real abordagem no cotidiano, em sala de aula; a partir dessas reflexões, apresentamos uma proposta de material didático vinculado a uma determinada habilidade ditada pela BNCC-EM, o qual é composto por um relato histórico, dirigido a professores, e tarefas matemáticas, dirigidas a alunos; em seguida, apresentamos um exemplo desse material e, finalmente, discutimos nossos esforços em vista das questões levantadas.

REnCiMa, São Paulo, v. 13, n. 2, p. 1-27, abr./jun. 2022

2 A HM nos documentos oficiais da Educação: o silêncio da BNCC

Abrindo caminho para uma ampla reforma do ensino, a Constituição Federal de 1988 determinou que compete à União legislar sobre “diretrizes e bases da educação nacional” e decidiu que fossem “[...] fixados conteúdos mínimos [...] de maneira a assegurar formação básica comum”. (BRASIL, 1988, artigos 22 e 210).

Essa base comum, contudo, só seria definida mais de vinte anos depois. No intervalo, os programas de ensino pautaram-se pelos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN). Os PCNs do Ensino Médio, de 1999, encorajam expressamente a perspectiva histórica da Matemática. Entre 18 habilidades a serem desenvolvidas, cita-se a de “[...] relacionar etapas da história da Matemática com a evolução da humanidade” (BRASIL, 1999, p. 46). Argumenta-se ali que “[...] a história das Ciências e da Matemática [...] tem uma relevância para o aprendizado que transcende a relação social, pois ilustra também o desenvolvimento e a evolução dos conceitos a serem aprendidos” (BRASIL, 1999, p. 54).

O documento conhecido como PCN+, que detalha orientações educacionais complementares aos PCNs, também dá espaço à abordagem histórica da Matemática. Espera-se que o aluno, no âmbito das competências relacionadas à “investigação e compreensão”, alcance este objetivo: “[...] compreender a construção do conhecimento matemático como um processo histórico, em estreita relação com as condições sociais, políticas e econômicas de uma determinada época” (BRASIL, 2002a, p. 117).

Instituída finalmente em 2018, a BNCC-EM reorganizou competências e habilidades a serem desenvolvidas na área de Matemática e suas Tecnologias a título de formação geral básica. Podia-se esperar que a HM tivesse aqui seu endosso explícito. Mas isso não ocorreu. Nenhuma das 5 competências ou 43 habilidades ditadas faz qualquer referência à perspectiva histórica da Matemática. Na terceira versão do documento, ainda lia-se um vago incentivo, ao final da apresentação das competências, à perspectiva histórica:

> Essa percepção da unidade da Matemática, além da diversidade de suas práticas, serve também para mostrar que o desenvolvimento da disciplina é fruto da experiência humana ao longo da história. Assim, ela não é um edifício perfeito que surgiu pronto da mente de poucos seres privilegiados, a fim de ser estudada para puro deleite intelectual[...].

> Um dos desafios para a aprendizagem da Matemática no Ensino Médio é exatamente proporcionar aos estudantes a visão de que ela não é um conjunto de regras e técnicas, mas faz parte de nossa cultura e de nossa história (BRASIL, 2018b, p. 522).

Mas até o trecho que acabamos de citar foi suprimido da versão final. Nota-se que, nesse sentido, a BNCC-EM se distancia, não apenas dos PCNs, mas também da própria BNCC do Ensino Fundamental, onde se evidencia que "[...] é importante incluir a História da Matemática como recurso que pode despertar interesse e representar um contexto significativo para aprender e ensinar Matemática" (BRASIL, 2018a, p. 298).

Esse silêncio da BNCC-EM, observa Pinto (2018, p. 15), estende-se a outros campos emergentes da Matemática, como a etnomatemática: "Um rápido olhar para as pesquisas em Educação Matemática nos permite afirmar que essas abordagens teórico-metodológicas constituem referências para uma prática docente que respeita a diversidade e a pluralidade da escola pública brasileira". Acrescentamos, embora não seja o escopo deste trabalho, que a HM tampouco achou espaço entre as habilidades da área de Matemática relacionadas aos chamados itinerários formativos – para além da formação geral básica, de que cuida a BNCC-EM. Esses itinerários propõem "[...] situações e atividades educativas que os estudantes podem escolher conforme seu interesse", segundo portaria que estabelece referenciais para sua elaboração (BRASIL, 2019a, p. 94).

3 A HM nos livros didáticos: "certo interesse"

A resolução que institui a BNCC-EM determina sua completa implantação em 2022. A edição 2021 do Programa Nacional do Livro e Material Didático (PNLD) deve marcar o realinhamento definitivo de currículos e propostas pedagógicas (BRASIL, 2019b). Trata-se da primeira edição do programa destinada ao Ensino Médio desde a homologação da base. Assim como a BNCC-EM, seu edital também não faz qualquer menção à perspectiva histórica. Por contraste, editais anteriores reconheciam expressamente que a Matemática é "produzida e organizada no decorrer da história", como "[...] parte do cotidiano das pessoas, das atividades das outras ciências e das tecnologias" (BRASIL, 2015, p. 57).

É de se perguntar que impacto o silêncio da BNCC-EM acerca da HM terá sobre o mercado editorial. É certo que muitos autores adotam elementos históricos por

REnCiMa, São Paulo, v. 13, n. 2, p. 1-27, abr./jun. 2022

convicção — quanto a isso temos o exemplo histórico do “Curso Elementar” (REIS e REIS, 1892), que apresentava, em notas de rodapé, dados históricos e informações biográficas sobre uma série de matemáticos e pensadores. Mas é igualmente certo que a atenção dispensada à HM em livros didáticos ganhou envergadura em anos recentes na esteira dos PCNs e dos editais governamentais neles embasados. Vejamos dois estudos a esse respeito.

Após analisar cinco coleções didáticas e entrevistar seus autores, Gomes (2008, p. 160) identifica a preocupação com a contextualização e o emprego da HM como elemento auxiliar, ressalvando que seu uso ainda não se dá “[...] de forma orgânica, esclarecedora, significativa e problematizadora”. Gomes considera que alguns autores, embora reconheçam dificuldades em lidar com HM, sentem-se “quase que ‘compelidos’” a fazê-lo, o que interpreta como “[...] um indicador de como uma política pública relativa à circulação de livros didáticos no país exerce um poder indireto sobre os autores”.

Da análise de seis coleções de Ensino Médio aprovadas na edição 2015 do PNLD, Pereira (2016, p. 91) aponta “certo interesse” em utilizar a História da Matemática, “[...] seja pela exigência de tal utilização na avaliação dos livros pelo referido Programa, seja pela vontade própria do autor”. Ele também faz ressalvas: das menções à HM analisadas, apenas cerca de 13% têm a função de estratégia didática, “[...] que [...] desempenha o papel de proporcionar ao aluno o desenvolvimento de algum raciocínio matemático, levando-o à compreensão do conteúdo ou conceito matemático”.

4 A HM em sala de aula: incentivos e objeções

Para além do livro didático, também se verificou nas últimas décadas uma crescente oferta de títulos paradidáticos, produtos educacionais, obras de divulgação, trabalhos acadêmicos e revistas especializadas em HM (VIANNA, 1998; LARA, 2016; BRACHO e MENDES, 2019). Chamamos atenção, em particular, para o rico repositório do Centro Brasileiro de Referência em Pesquisa sobre História da Matemática (CREPHIMat), de acesso gratuito (BRACHO e MENDES, 2019).

Ainda assim, o professor se ressente da falta de material. Britto e Bayer (2007) investigaram o uso da HM por professores de escolas públicas e privadas de 35 municípios do Rio Grande de Sul. Verificou-se que os docentes consideram o recurso importante, mas não têm o costume de utilizá-lo. Entre as justificativas, citam-se o despreparo dos próprios docentes e a falta de material. Santos (2017) levantou o ponto de vista de professores de Ensino Médio que atuam nas escolas públicas de Itajubá, Minas Gerais. Entre as dificuldades, aponta-se a falta de: tempo, material, preparo do próprio docente, interesse dos alunos e obrigatoriedade do tema em documentos oficiais.

É ocioso especular que falte empenho por parte dos professores. Antes, é preciso admitir que o produto de uma grande quantidade de pesquisas em HM simplesmente não esteja chegando até eles (BRACHO e MENDES, 2019). E é também possível que, chegando, não atenda às suas expectativas, acrescentamos. Publicações científicas e produtos saídos de programas de pós-graduação podem ser uma leitura bastante exigente. Na outra ponta, obras de divulgação, de fácil compreensão, não têm a preocupação de estabelecer correspondências entre a HM e a sala de aula.

Em qualquer caso, o aproveitamento de recursos didáticos centrados em HM depende da convicção do professor de que seu uso pode, de fato, enriquecer sua aula. Citamos, na introdução, diversos autores que não têm dúvida quanto a isso. Em sala de aula, contudo, a percepção pode ser bem distinta. Reproduzimos, no Quadro 1, uma síntese das “boas razões” de Fauvel (1991, p. 4) em favor do uso de HM e as queixas que Siu (2006, p. 268-269), admitindo fazer o papel de “advogado do diabo”, atribui a docentes.

Quadro 1: Motivos a favor e contra a adoção da HM em sala de aula

Argumentos favoráveis à HM	Argumentos desfavoráveis à HM
Ajuda a aumentar a motivação. Dá à Matemática uma face humana. Ajuda a organizar os tópicos do currículo. Mostrar aos alunos como os conceitos se desenvolveram facilita sua compreensão. Muda a percepção que os alunos têm da Matemática. Comparar o antigo e o moderno dá valor às técnicas modernas. Ajuda a desenvolver uma abordagem multicultural. Abre oportunidades para investigações. Obstáculos do passado ajudam a	"Eu não tenho tempo para isso na aula!" "Isso não é Matemática!" "Como se faz uma questão sobre isso na prova?" "Isso não melhora a nota do aluno!" "Os alunos não gostam!" "Os alunos consideram isso como história e eles odeiam história!" "Alunos acham isso tão tedioso quanto Matemática!" "Os alunos não têm conhecimento para apreciar!" "Progresso em Matemática é tornar os problemas difíceis uma rotina, então por que olhar para trás?"

REnCiMa, São Paulo, v. 13, n. 2, p. 1-27, abr./jun. 2022

explicar o que os alunos acham difícil. Os alunos encontram conforto ao perceberem que não são os únicos com dificuldades. Incentiva os alunos mais rápidos a estudarem mais. Ajuda a explicar o papel da Matemática na sociedade. Torna a Matemática menos assustadora. Ajuda a sustentar o seu próprio interesse e a empolgação com a Matemática. Oferece oportunidade de trabalhos interdisciplinares.	"Falta material!" "Falta treinamento!" "Não sou historiador. Como posso ter certeza da acurácia do conteúdo?" "Contar o que realmente aconteceu pode ser bem tortuoso e pode confundir, em vez de esclarecer" "A leitura de textos originais é muito difícil" "Isso não é capaz de incentivar o chauvinismo e o nacionalismo?" "Existe alguma evidência empírica de que os alunos aprendem melhor?"

Fonte: Fauvel (1992) e Siu (2006)

Até certo ponto, muitas das objeções relacionadas por Siu (2006) podem ser consideradas superadas. Por exemplo: “Isso não é Matemática!”. A resistência parece refletir a inclusão tardia e irregular da disciplina nos programas de formação de professores. No Brasil, por exemplo, foi só nos anos 2000 que se recomendou que “conteúdos da Ciência da Educação, da História e Filosofia das Ciências e da Matemática” fossem parte comum de todos os cursos de licenciatura na área, conforme as Diretrizes Curriculares Nacionais para os Cursos de Matemática, Bacharelado e Licenciatura (BRASIL, 2002b, p. 6). A esse respeito, Carmo e Queiroz (2020, p. 1), em análise de elementos curriculares de cursos presenciais de licenciatura em Matemática no Ceará, verificaram que a disciplina HM é heterogênea e que seu uso didático “ainda é muito tímido”.

De qualquer forma, com ou sem recomendação formal, é preciso deixar claro que a HM tem sido sistematicamente considerada parte da Matemática. No índice da *Mathematics Subject Classification*, que busca listar todas as áreas e subáreas da Matemática (ASSOCIATE EDITORS OF MATHEMATICAL REVIEWS AND ZBMATH, 2020), “História e biografia” é logo o segundo de 98 itens — o primeiro é “Tópicos gerais”. Para muitos, a HM não só é parte da Matemática, mas uma parte fundamental. Heiede (1992, p. 152) é enfático: "Se você ensina Matemática, você também precisa ensinar a HM". E provoca: “Não lhe ensinaram logaritmo se você não ouviu falar de (John) Napier”.

Outras desconfianças listadas por Siu (2006) parecem, à primeira vista, insuperáveis. Seria imprudente, por exemplo, desacreditar o professor que intui que o aluno não gosta de HM. No entanto, são também muitos os relatos de professores

REnCiMa, São Paulo, v. 13, n. 2, p. 1-27, abr./jun. 2022

satisfeitos com seu uso em sala de aula — como estes que escrevem. Nota-se, de saída, que esse tipo de objeção se choca frontalmente com as intenções de pioneiros da HM (HEPPEL, 1893; CAJORI, 1894) e que Fauvel (1991) relaciona como razão primeira do recurso didático: a HM ajuda a aumentar a motivação para a aprendizagem.

É possível que a frustração de muitos professores derive de expectativas exageradas em relação ao recurso didático. Não se pode esperar que uma referência histórica baste para motivar uma sala de aula. “Os mais ingênuos”, observam Miguel e Miorim (2019, s. p.), “acabam atribuindo à história um poder quase mágico de modificar a atitude do aluno”. Fauvel (1991) alerta que a adoção da HM não é fácil — especialmente, acrescentamos, se o professor não dispuser da formação ou material didático apropriado. Para Heiede (1992), não se deve tratar a HM como uma maneira de tornar a Matemática mais divertida. Tomado como panaceia, o uso da HM pode, de fato, ser bastante decepcionante.

Há também, no rol das resistências apontadas por Siu (2006), algumas questões em aberto. Por exemplo: existe evidência empírica de que o aluno aprende melhor assim? Siu (2006, p. 275) responde sem rodeios à questão: as evidências de que a HM faz o aluno aprender melhor são esparsas e nem sempre positivas. Os resultados, diz, parecem indicar efeitos positivos mais notáveis sobre aspectos afetivos do que cognitivos. “Nas aulas em que se faz uso de HM, os alunos gostam mais da matéria, mas não necessariamente têm melhor desempenho nas provas”, resume.

A questão é difícil, mas talvez seja enganosa. Como se mede que alunos estão aprendendo melhor? E o que se deve entender por uso da HM? As respostas serão necessariamente esparsas, posto que dependem das diferentes práticas. Acreditamos que seja possível superar essa questão invocando duas razões apontadas por Fauvel (1991) em favor da HM. O recurso “dá à Matemática uma face humana” e “ajuda a explicar o papel da Matemática na sociedade”. São propriedades que se ligam à noção de conhecimento integrado, defendida por Freudenthal (1981). Notas mais altas podem ser um bônus, como escreve o autor, mas não são razão para adotar, ou descartar, a HM em sala de aula.

Entre as desconfianças compiladas por Siu (2006), há também questões delicadas, como esta: a HM pode incentivar o chauvinismo e o nacionalismo? É certo

REnCiMa, São Paulo, v. 13, n. 2, p. 1-27, abr./jun. 2022

que, no curso da história, existiram rivalidades entre matemáticos de diferentes países, de que é exemplo a célebre disputa pela paternidade do Cálculo. Mas a abordagem histórica tem, justamente, o condão de desfazer mitos a esse respeito. Risco mais sério, tomando chauvinismo num sentido mais amplo, é o de reforçar o estereótipo da Matemática como uma atividade essencialmente masculina. São poucas as mulheres citadas nos livros de história: Hipátia de Alexandria (c. 370-415 d.C.) e, mais raramente, a francesa Marie-Sophie Germain (1776-1831). Mas não se afasta esse risco, nos parece, disfarçando o fato de que os marcos mais conhecidos e os principais teoremas ensinados ao aluno são de fato atribuídos a homens. Antes, é uma oportunidade para discutir o lugar da mulher na sociedade, ontem e hoje. A trajetória de Sophie Germain, que, para ser levada a sério, assinava sua correspondência como Monsieur Leblanc (BOYER e MERZBACH, 2011), é bastante ilustrativa das barreiras que já se colocaram à participação de mulheres na atividade científica.

5 Proposta de material didático

Em atenção aos incentivos e objeções ora examinados, propomos, neste trabalho, um formato de material didático textual vinculado a uma determinada habilidade ditada pela BNCC-EM, feito de: um relato histórico e tarefas matemáticas nele inspiradas.

Tomamos o termo relato a partir da tipologia de gêneros textuais de Rose (2012). O autor os classifica, na esfera do ensino, conforme quatro propósitos: engajar, informar, propor e avaliar. Os relatos históricos são tipos fronteiriços, ligados às funções de informar e engajar, que são justamente os objetivos deste material. Como vimos, o professor tem suas razões para desconfiar do uso da HM. Assim, antes de buscar a motivação do estudante, cuida-se aqui do engajamento do próprio docente: é fundamental que ele se aposse do conteúdo histórico para se convencer de que a HM enriquece o trabalho em sala.

Conforme Rose (2012), relatos podem ser explicativos (*historical accounts*), quando estabelecem relações causais, ou não (*historical recounts*). Podem ser biográficos e autobiográficos. Em comum, desenvolvem-se segundo fases marcadas no tempo a partir de uma etapa inicial de orientação. Assim, não se confundem com os gêneros propriamente acadêmicos, como ensaios e artigos.

REnCiMa, São Paulo, v. 13, n. 2, p. 1-27, abr./jun. 2022

Para a construção do relato, partiu-se das sentenças que definem determinada habilidade da Base Comum, com atenção aos termos usados e as noções que implicam. Para a escolha de elementos históricos que melhor se ajustam ao texto do marco legal, levamos inicialmente em conta os seguintes critérios: relevância histórica, disponibilidade de fontes e adequação à etapa de ensino. Quanto à relevância, considerou-se o destaque dado em obras de referência. Quanto à disponibilidade de fontes, deu-se preferência aos documentos que se podem acessar via internet, gratuitamente. Quanto à adequação à etapa de ensino, focamos aqueles que tocam propriedades matemáticas de uso corrente em sala de aula. Em uma segunda etapa, confrontamos nossas escolhas iniciais com as reflexões feitas no item anterior: buscamos, então, selecionar os elementos históricos que, não apenas se ajustam ao texto da BNCC-EM, mas que também correspondam a incentivos dados para o uso da HM, em particular os de dar “à Matemática uma face humana” e “explicar o papel da Matemática na sociedade”, como pretendeu Fauvel (1991).

Para a escrita dos relatos, tomamos a liberdade de buscar um tom narrativo o mais amigável possível, tanto quanto o rigor científico autoriza. É um tom condizente com a dupla função de engajar e informar. Certamente, não é uma tarefa simples, mas o esforço é necessário, não apenas para cativar o professor, mas para permitir que as informações reunidas sejam, eventualmente, levadas ao aluno sem o embaraço do jargão. É o esforço feito por alguns dos pioneiros da HM, em particular o francês Jean Étienne Montucla (1725-1799), autor de *Histoire des Mathématiques* (MONTUCLA, 1758), primeira história clássica da Matemática (VOGEL, 1974), e ainda uma boa leitura (STRUIK, 1987).

Toma-se tarefa como o “elemento organizador da atividade de quem aprende”, segundo Ponte (2014, p. 14). “A atividade [...] diz respeito essencialmente ao aluno e refere-se àquilo que ele faz num dado contexto. Pelo seu lado, a tarefa representa apenas o objetivo de cada uma das ações em que a atividade se desdobra”, explica o autor. Assim, as tarefas aqui propostas não se confundem com atividades didáticas, tanto quanto os relatos não se confundem com planos de aula ou sequências didáticas. Elas buscam demonstrar que a HM, para além das anedotas e curiosidades, pode ser usada na investigação de conceitos matemáticos e na fixação de procedimentos.

Ponte (2014) distingue tarefas quanto à estrutura, segundo o grau de

REnCiMa, São Paulo, v. 13, n. 2, p. 1-27, abr./jun. 2022

indeterminação da questão; e quanto ao desafio, segundo a dificuldade percebida. Tarefas fechadas de desafio reduzido são classificadas como exercícios. Tarefas fechadas de desafio elevado são problemas. Tarefas abertas de desafio reduzido são conhecidas como explorações. E tarefas abertas de desafio elevado são investigações. Buscaremos aqui explorar os diversos tipos de tarefas, em atenção à diversidade da prática pedagógica.

Tomados em seu conjunto, relatos e tarefas guardam as características de produtos educacionais, "ferramentas elaboradas pelos próprios profissionais em formação que comportam conhecimentos organizados objetivando viabilizar a prática pedagógica" (FREIRE, ROCHA e GUERRINI, 2017, p. 380). Preferimos, contudo, tratá-los por uma expressão de sentido mais amplo e mais corriqueira no ambiente escolar, "material didático", de modo a frisar que, como outros recursos do gênero, este não se apresenta como um produto acabado. Antes, espera-se que sirva de ponto de partida ao professor, no momento em que este, conforme suas inclinações, decida adotar a HM em suas aulas. Quanto a isso, lembramos Tezza (2002, p. 8), para quem o "inacabamento" é a qualidade maior do material didático: "É preciso sempre desconfiar dos compêndios definitivos; um bom material talvez seja antes uma sugestão de material". Esperamos que seja essa a nossa contribuição.

6 Exemplo de material didático

Este exemplo apoia-se nas contribuições pioneiras de Michael Florent van Langren (1598-1675), Christiaan Huygens (1629-1695) e Edmond Halley (1656-1742) para o desenvolvimento de técnicas de representação gráfica, na Europa do século XVII. Propõe-se associá-lo à habilidade da BNCC-EM identificada pelo código EM13MAT102, que se pode desenvolver ao longo de todos os anos dessa etapa escolar e é descrita assim:

> Analisar tabelas, gráficos e amostras de pesquisas estatísticas apresentadas em relatórios divulgados por diferentes meios de comunicação, identificando, quando for o caso, inadequações que possam induzir a erros de interpretação, como escalas e amostras não apropriadas (BRASIL, 2018a).

Do ponto de vista histórico, o conteúdo se liga às Grandes Navegações, à disputa entre Holanda e Espanha pela hegemonia política e à Revolução Científica.

6.1 Relato histórico

REnCiMa, São Paulo, v. 13, n. 2, p. 1-27, abr./jun. 2022

REnCiMa
Revista de Ensino de Ciências e Matemática

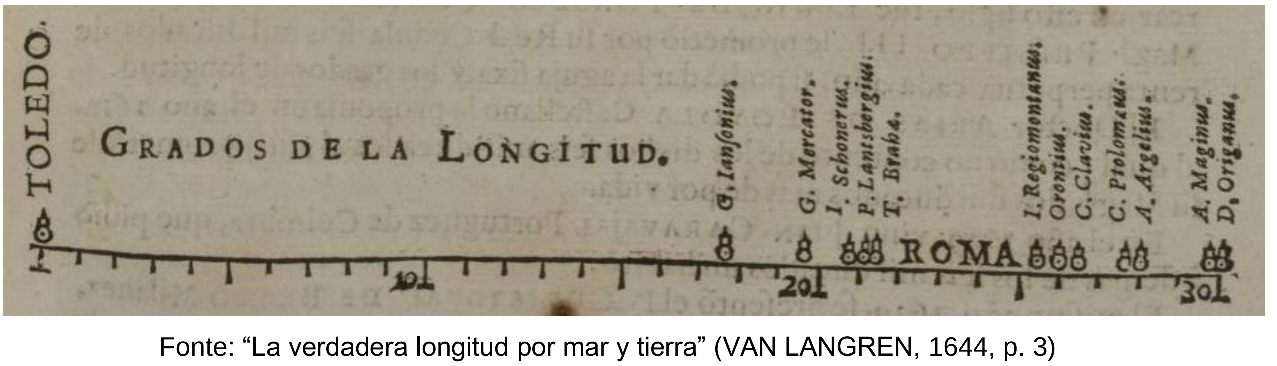
Orientação: Gráficos no século XVII

Gráficos estão por toda a parte hoje em dia: na imprensa, na publicidade, na sala de aula, nos relatórios de governo e empresas. Podem ser tomados de fato como uma “linguagem universal” (FUNKHOUSER, 1937, p. 270), que facilita a compreensão e análise de informações. Nem sempre foi assim. Como outras linguagens, esta também se desenvolveu e se desenvolve no curso da história. Embora haja registros pré-históricos de mapas do céu e da Terra, a disseminação de diagramas dependeu de circunstâncias dadas apenas no século XVII. No campo teórico, firmavam-se conceitos da Geometria Analítica e da Probabilidade. Na prática, aperfeiçoavam-se instrumentos de medição e surgiam levantamentos sistemáticos de dados estatísticos. Em resumo, surgiam “alguns dados de real interesse, alguma teoria que lhes desse sentido e algumas ideias de representação visual” (FRIENDLY, 2008, p. 21). Vejamos em detalhe três marcantes “ideias de representação visual” do século XVII.

Fase 1: Um retrato certeiro de “erros enormes”

Filho e neto de cartógrafos, Michael Florent van Langren publicou em 1644, em Flandres, então parte dos Países Baixos Espanhóis, um tratado em que alegava solucionar o chamado problema da longitude. Há muito já se sabia estimar a latitude por meio da mera observação do Sol e estrelas, mas o cálculo de longitudes, de especial relevância para as travessias oceânicas, ainda desafiava os navegadores. Para valorizar sua estratégia, Van Langren decidiu destacar os “erros enormes” (VAN LANGREN, 1644, p. 3) de estimativas atribuídas a “eminentes astrônomos e geógrafos”, como Tycho Brahe (1546-1601) e Nicolaus Mercator (1620-1687), para a diferença de longitude entre Roma e a cidade histórica de Toledo, residência oficial de monarcas espanhóis. De modo a evidenciar a discrepância, exibiu as estimativas ao longo de uma linha graduada (Figura 1).

Figura 1: Estimativas da diferença de longitude entre Toledo e Roma.



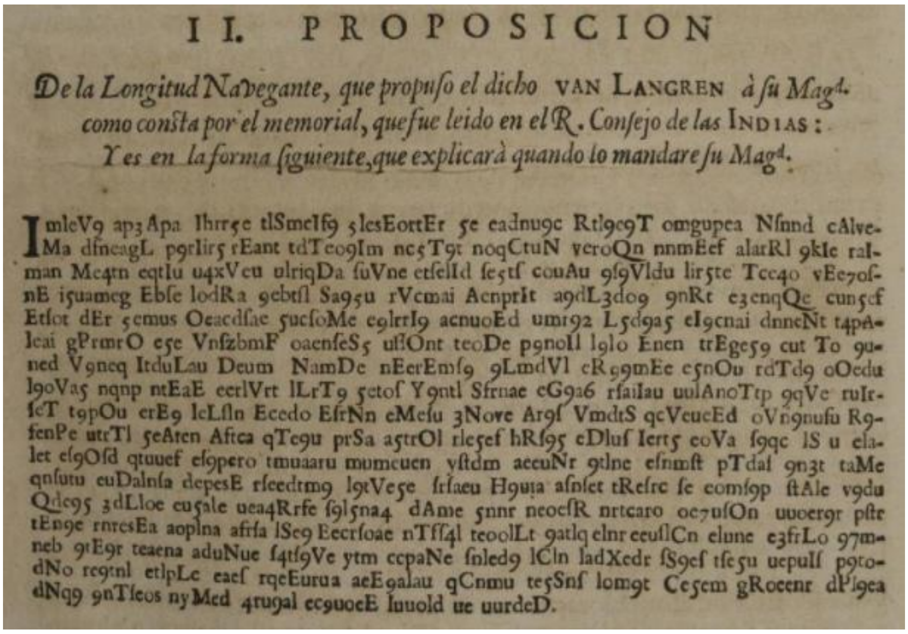
Fonte: “La verdadera longitud por mar y tierra” (VAN LANGREN, 1644, p. 3)

REnCiMa, São Paulo, v. 13, n. 2, p. 1-27, abr./jun. 2022

O diagrama de Van Langren é tido como a mais antiga representação gráfica de natureza estatística (FRIENDLY et al., 2010). Para além do pioneirismo, pode-se saudá-lo por sua excelência. A solução encontrada permite identificar, prontamente, o intervalo de valores e supor ainda uma medida de tendência central – onde, habilmente, grafa-se “Roma”. Friendly et al. (2010, p. 5) observam que Van Langren podia ter tabelado os dados, mas “só um gráfico fala diretamente aos olhos”. A propósito, todos os valores superestimam a diferença entre as cidades: cerca de 16º31’.

O tratado de Van Langren também ficou famoso por apresentar seu principal resultado de forma cifrada (Figura 2). Van Langren tinha ciência do valor da solução do problema da longitude, para a qual diversas coroas chegaram a ofertar prêmios, e se compromete a revelar o segredo se assim ordenar o rei Felipe IV.

Figura 2: A estratégia cifrada de Van Langren.



II. PROPOSICION

De la Longitud Navegante, que propuſo el dicho VAN LANGREN *à ſu Magd. como conſta por el memorial, que fue leido en el R. Conſejo de las* INDIAS*: Y es en la forma ſiguiente, que explicarà quando lo mandare ſu Magd.*

ImleV9 ap3Apa Ihrr5e tlSmclf9 5lesEortEr 5e eadnu9c Rtl9c9T omgupea Nſnnd cAlveMa dſneagL p9rlir5 rEant tdTeo9Im nc5T9t noqCtuN veroQn nnmEef alarRl 9klc ralman Mc4tn eqtlu u4xVeu ulriqDa ſuVne etſelId ſe5tſ couAu 9ſ9Vldu lir5te Tce4o vEe7oſnE i5uameg Ebſe lodRa 9ebtſl Sa95u rVcmai Acnprlt a9dL3do9 9nRt e3enqQe cun5ef Etſot dEr 5emus Oeacdſae 5ucſoMe e9lrrI9 acnuoEd umi92 L5d9a5 eI9cnai dnneNt t4pAleai gPrmrO e5e VnſzbmF oacnſeS5 uſlOnt teoDe p9noll l9lo Enen trEge59 cut To 9uned V9neq ItduLau Deum NamDe nEerEmſ9 9LmdVl cR99mEe c5nOu rdTd9 oOedu l9oVa5 nqnp ntEaE eerlVrt lLrT9 5etoſ Y9ntl Sfrnae eG9a6 rſailau uulAnoTtp 9qVe rulrſeT t9pOu erE9 lcLſln Eccdo EſrNn eMeſu 3Nove Ar9ſ VmdtS qcVeucEd oVn9nuſu R9ſenPe utrTl 5eAten Aftca qTe9u prSa a5trOl rle5ef hRſ95 eDluſ Iert5 eoVa ſ9qc lS u elalet eſ9Oſd qtuuef eſ9pero tmuaaru mumeuen yſtdm aeeuNr 9tlne eſnmſt pTdal 9n3t taMe qnſutu euDalnſa depesE rſeedtm9 l9tVe5e ſrſaeu H9uia aſnſet tRefre ſe comſ9p ſtAle v9du Qde95 3dLloe cu5ale uea4Rrfe ſ9l5na4 dAme 5nnr neoeſR nrtcaro oe7uſOn uuoer9r pſtr tEn9e rnresEa aoplna afrſa lSe9 Eecrſoae nTſſ4l teoolLt 9atlq elnr eeuſlCn elune e3frLo 97mneb 9tE9r teaena aduNue ſ4tſ9Ve ytm ecpaNe ſnled9 lCln ladXedr ſS9eſ tſe5u uepulſ p9todNo re9tnl etlpLe eaeſ rqeEurua aeE9alau qCnmu te5Snſ lom9t Ce5em gRoeenr dPl9ea dNq9 9nTſeos nyMed 4ru9al ec9uoeE Iuuold ue uurdeD.

Fonte: Van Langren (1644, p. 8)

O segredo restou por séculos indecifrado. Em 2021, a imprensa belga noticiou que o código havia sido finalmente quebrado, e a suposta solução começou a circular em blogs e fóruns dedicados à criptografia. Não consta, de qualquer forma, que a estratégia de Van Langren tenha bastado para resolver o problema, que só seria definitivamente superado no século seguinte, com a invenção dos cronômetros marinhos.

Fase 2: A ciência do estado moderno

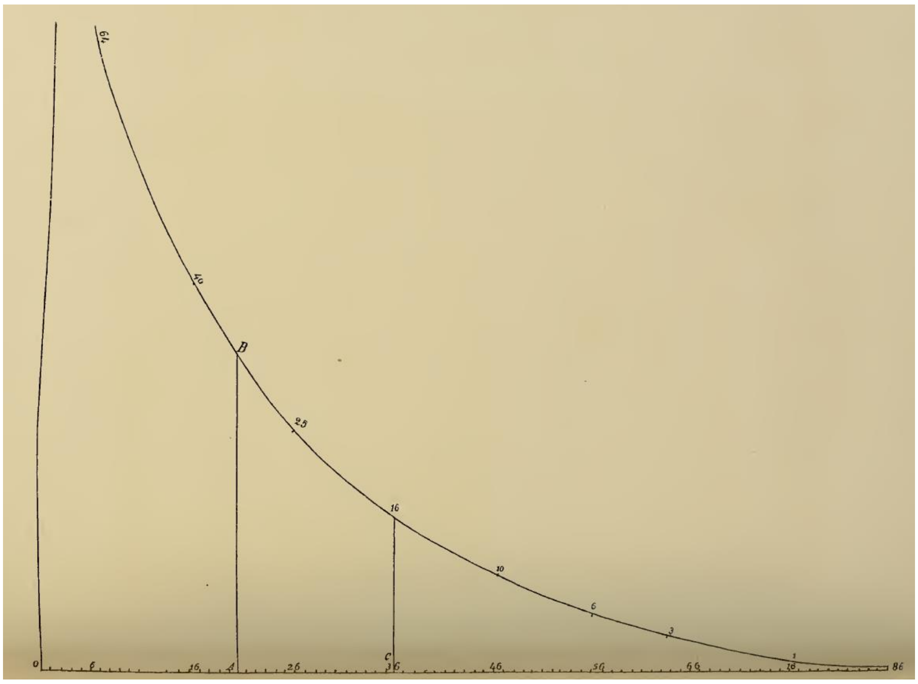
Deve-se ressalvar que a obra de Van Langren só tem natureza estatística

REnCiMa, São Paulo, v. 13, n. 2, p. 1-27, abr./jun. 2022

quando se considera o sentido moderno do termo. A palavra vem do latim, “status”, estado, e originalmente se definia de modo bem distinto, como atesta esta passagem do século XVIII: “[...] a ciência que é chamada estatística nos ensina o arranjo político de todos os estados modernos do mundo conhecido” (VON BIELFELD, 1770, p. 269). A definição, portanto, não se aplicava a medidas de longitude, mas a dados relativos ao funcionamento dos estados.

O grande marco da ciência do “estado moderno” são as *Natural and Political Observations Made Upon the Bills of Mortality*, do inglês John Graunt (1620-1674), de 1662. Em 1603, o rei da Inglaterra, Jaime I, ordenara o levantamento semanal de batismos e enterros, que servia para monitorar a peste bubônica. Graunt se debruçou sobre os dados de milhares de semanas e os sintetizou em tabelas. Constatou, por exemplo, a regularidade de mortes devidas a certas doenças, como tuberculose, e a errática frequência de óbitos em razão da peste, que seria vencida na década seguinte (MORABIA, 2013).

Figura 3: A linha da vida, modelada por Huygens.



Fonte: Huygens (1895, p. 531)

A partir das tábuas de mortalidade organizadas por Graunt, o holandês Lodewijck Huygens (1631-1699) calculou o que hoje conhecemos como expectativa de vida e comunicou o resultado, por carta, ao irmão mais velho e mais famoso, o astrônomo e matemático Christiaan Huygens (1629-1695). Este, em resposta datada de novembro de 1669, esboçou uma curva contínua para representar, para cada idade, o número de sobreviventes de um total de 100 nascimentos (HUYGENS, 1895), que a Figura 3 reproduz.

O gráfico de Christiaan baseia-se no seguinte sistema de coordenadas: no eixo horizontal estão representadas as idades, de 0 a 86 anos; no eixo vertical, registra-se o número de sobreviventes, com essas idades, de um total de 100 nascidos. Em notação moderna, poderíamos defini-lo como a representação de uma certa função de variável real $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, tal que *f(x)* é a porcentagem de pessoas que chegaram à idade *x*.

Christiaan defende que a mediana dos anos que restam a uma pessoa seja tomada como sua esperança de vida. E mostra como inferi-la a partir da curva traçada. Em notação moderna: dada a idade x_1, basta buscar no gráfico x_2 tal que $f(x_2)=\frac{f(x_1)}{2}$. Por exemplo, usando as marcações originais de Christiaan: de 100 nascidos, apenas 32 chegam à idade de 20 anos (pontos A e B da Figura 3). Destes, apenas metade chegará aos 36 anos (ponto C). Então uma pessoa de 20 anos pode esperar viver mais 16 anos.

Essa troca de cartas está na origem dos estudos de expectativa de vida. Temos aqui um exemplo claro do uso de um gráfico, não apenas para a apresentação de resultados, mas para a inferência estatística. Para Boyer (1947, p. 148), a "linha da vida" de Huygens seria o primeiro exemplo de gráfico produzido a partir de dados estatísticos. Friendly et al. (2010), dando precedência a Van Langren, consideram o esboço de Christiaan o primeiro gráfico estatístico de uma distribuição contínua.

Fase 3: Um "gráfico de sucesso"

Alguns anos após a correspondência dos irmãos Huygens, o inglês Edmond Halley (1656-1742) publicou o que pode ser considerado o primeiro "grande sucesso" na aplicação do sistema de coordenadas à investigação científica (BENIGER e ROBYN, 1978, p. 2). É seu artigo dedicado à relação entre pressão atmosférica e altitude, publicado na mais antiga revista voltada exclusivamente à produção científica, a inglesa *Philosophical Transactions of the Royal Society*, criada em 1665.

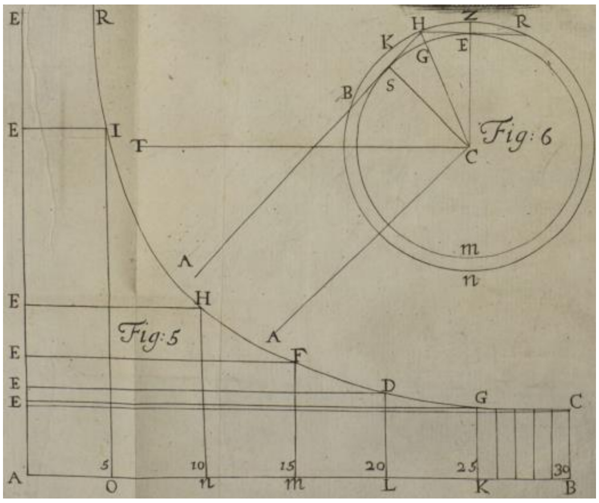
Já se sabia que a pressão atmosférica diminui conforme a altitude aumenta. O italiano Evangelista Torricelli (1608-1647), que inventara o barômetro, em 1643, explicou em carta a relação entre as grandezas por meio da seguinte analogia: "Vivemos submersos no fundo de um oceano de ar elementar, que, por experimentos

REnCiMa, São Paulo, v. 13, n. 2, p. 1-27, abr./jun. 2022
Revista de Ensino de Ciências e Matemática

indubitáveis, se sabe ter peso" (TORRICELLI, 1823, p. 33). E quanto mais ao fundo desse oceano, maior o peso.

Em seu artigo, Halley parte da constatação de que a "expansão do ar" e o "peso da atmosfera" são inversamente proporcionais ("recíprocos"), tanto quanto volume e pressão, conforme Robert Boyle (1627-1691) propusera em 1662. Tomando como medida do "peso da atmosfera" a altura da coluna de mercúrio no barômetro, Halley pondera: é "evidente" que, "com ajuda da Curva da Hipérbole e suas Assíntotas", as "expansões de ar" podem ser conhecidas a partir de qualquer medida do barômetro (HALLEY, 1687, p. 105). A curva em questão, o primeiro gráfico bivariável de dados experimentais (FRIENDLY e DENIS, 2005), é apresentada ao final da revista (Figura 4).

Figura 4: A "Curva da Hipérbole", de Halley, identificada como Fig. 5.



Fonte: Halley (1687, p. i)

No gráfico, as abscissas *AB, AK, AL*… são as medidas de pressão, ou seja, a altura da coluna de mercúrio no barômetro, em polegadas. As ordenadas, todas representadas pela letra E, valem pela "expansão do ar". Assumindo que "expansão do ar" e "peso da atmosfera" são inversamente proporcionais, temos que seu produto é constante. Em notação moderna, temos $x \cdot y = k \in \mathbb{R}$, que de fato é a equação de uma hipérbole. Assim, para todos os pontos da curva, o retângulo definido por abscissa e ordenada têm mesma área: $A_{ABCE} = A_{AKGE} = A_{ALDE} = k$, como Halley observa.

Não se trata, contudo, de um gráfico de pressão por altitude, como se poderia imaginar. Mas Halley (1687, p. 105) mostra como dar este último passo: a altitude corresponde à soma de todas as "expansões do ar", tomadas "infinitamente

REnCiMa, São Paulo, v. 13, n. 2, p. 1-27, abr./jun. 2022

pequenas”, desde o nível do mar, onde a coluna de mercúrio mede 30 polegadas (a abscissa *AB*, no gráfico). Daí porque Halley trata todas ordenadas por E: não está interessado em seus valores, mas nas áreas sob a curva. O leitor moderno já pode intuir o que seja essa soma das “expansões de ar” tomadas “infinitamente pequenas”: a integral definida de uma função $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, tal que $f(x)=\frac{k}{x}$, em que $x\neq 0$ é a pressão e $f(x)$ é a expansão de ar, no intervalo de *x* a 30, que vem a ser a medida do barômetro ao nível do mar:

$$\int_x^{30}\frac{k}{x}\,\mathrm{d}x = k\cdot(\ln(30)-\ln(x)) = k\cdot\ln\left(\frac{30}{x}\right).$$

Halley não tinha à mão as armas do cálculo integral, então nascente. Tinha, por outro lado, conhecimento da obra de Grégoire de Saint-Vincent (1584-1667), entre outros que estudaram a quadratura da hipérbole e reconheceram a relação de proporcionalidade entre as áreas sob a curva e a diferença entre logaritmos (FRISINGER, 1974). Foi o que lhe bastou. Vejamos como essa noção se ajusta ao cálculo integral.

Aplicando a relação entre áreas e logaritmos à curva de Halley, temos:

$$\frac{A_{BKGC}}{\log AB-\log AK}=\frac{A_{BLDC}}{\log AB-\log AL}=\frac{A_{BMFC}}{\log AB-\log AM}=\frac{A_{BNHC}}{\log AB-\log AN}=r.$$

De modo geral, a área sob a hipérbole entre *x* e *AB* pode ser dada por:

$$A(x)=r\cdot(\log AB-\log x).$$

Tomando *AB* por 30 polegadas (a pressão ao nível do mar), temos:

$$A(x)=r\cdot(\log 30\ -\log x)=r\cdot\frac{\log 30}{\log x}.$$

Passando o logaritmo para a base natural, obtemos:

$$A(x)=r\cdot\frac{\log 30}{\log x}=r\cdot\frac{\ln\left(\frac{30}{x}\right)}{\ln(10)},$$

e fazendo $k=\frac{r}{\ln(10)}$, chegamos a:

$$A(x)=k\cdot\ln\left(\frac{30}{x}\right)=\int_x^{30}\frac{k}{x}\,dx.$$

Mas como determinar a constante de proporcionalidade *k*? Para tanto, Halley

REnCiMa, São Paulo, v. 13, n. 2, p. 1-27, abr./jun. 2022

toma por 1:10.800 a razão entre as densidades do ar e do mercúrio ao nível do mar. Então, uma polegada de mercúrio corresponde a uma coluna de ar de 10.800 polegadas, ou 900 pés. Eis a “expansão do ar” ao nível do mar, onde a medida do barômetro é 30 polegadas. Então, $k = 30 \cdot 900$ pés, e assim pode-se calcular a altitude de um local onde o barômetro mede *x* polegadas da seguinte maneira:

$$A(x) = 30 \cdot 900 \cdot \ln\left(\frac{30}{x}\right) \quad ou \quad A(x) = \frac{900}{0{,}0144765} \cdot \log\left(\frac{30}{x}\right).$$

E a partir dessa regra, Halley calcula a tabela de valores dada pela Figura 5:

Figura 5: Medidas de pressão, em polegadas (inch) de mercúrio; e altitude, em pés (feet).

A Table ſhewing the Altitude, to given hights of the Mercury.

Inch.	Feet.
30.	0
29.	915.
28.	1862.
27.	2844.
26.	3863.
25.	4922.
20.	10947.
15.	18715.
10.	29662.
5.	48378.
1.	91831.
0, 5.	110547.
0, 25.	129262.
0, 1.	29 *mil. or* 154000.
0, 01.	41 *mil.* 216169.
0, 001.	53 *mil.* 278338.

A Table ſhewing the hights of the Mercury, *at given Altitudes.*

Feet.	Inch.
0	30, 00.
1000.	28, 91.
2000.	27, 86.
3000	26, 85.
4000	25, 87.
5000 *feet*	24, 93.
1 *mile*	24, 67.
2	20, 29.
3	16. 68.
4	13. 72.
5	11, 28.
10	4. 24.
15	1. 60.
20	0. 95.
25	0. 23.
30	0. 08.
40	0. 012.

Fonte: Halley (1687, p. 106)

Hoje são conhecidas as discrepâncias nos valores encontrados por Halley, erros menores do que uma polegada de mercúrio (CREWE, 2003). O tema é um excelente convite à abordagem interdisciplinar. A partir do raciocínio de Halley, basta isolar a variável pressão para chegar à equação conhecida como fórmula barométrica ou Lei de Halley: $P(z) = P_0 \cdot e^{-\lambda z}$, em que *P* é a pressão, *z* é a altitude e *λ* uma constante para a densidade do ar, a gravidade e a pressão atmosférica no nível do mar.

Observamos que Huygens e Halley não explicitam as expressões algébricas que buscam representar graficamente, de modo que a discussão é quase toda retórica. Mas o que interessa aqui, para além das fórmulas, é constatar a importância do recurso gráfico tanto para a descrição como para a interpretação de fenômenos tão diversos.

6.2 Tarefas matemáticas

Tarefa 1 (Exploração). Colha palpites a respeito de alguma medida que se possa, em um segundo momento, verificar, como: a distância entre duas cidades; a massa de um objeto; a duração de uma música; a temperatura ambiente; a altura de uma construção; etc.

a) represente os dados à maneira do cartógrafo Michael Florent van Langren, ou seja: marque sobre uma linha graduada as diversas estimativas;
b) determine média, moda e mediana dos dados e verifique qual desses valores é mais ou menos afetado por palpites discrepantes;
c) verifique a medida real e compare com as estimativas colhidas.
d) considere outras formas de representar os resultados (gráfico de barras, histograma, *boxplot*, tabela etc.) e discuta eventuais vantagens e desvantagens das diferentes estratégias.

Observação ao professor: Esta tarefa pode ser feita coletivamente, bastando reunir estimativas de cada aluno para uma certa medida. É possível que a medida real se aproxime do senso comum da sala. É possível, também, que os palpites dos alunos passem longe do valor real. Neste caso, pode-se discutir os vieses que levaram os alunos a superestimar ou subestimar a medida. Qual a familiaridade deles com o objeto medido? O que tomaram por base de comparação? Quanto à estratégia de representação dos dados, o aluno deve perceber que a solução de Van Langren é bastante engenhosa, mesmo quando comparada a soluções geradas por meios digitais. O professor pode chamar a atenção dos alunos para três atributos, para além do juízo estético: clareza (o gráfico tem título, escala e marcações bem definidas, sem ambiguidades), concisão (as informações foram reduzidas ao essencial, sem redundâncias) e organização (o gráfico permite estimar prontamente o intervalo das medidas e tendências centrais). Podem-se apontar também as suas limitações: é claro que a estratégia de Van Langren não se presta a uma coleção muito grande de dados. Neste caso, podem-se discutir estratégias mais eficientes, como os histogramas, com apoio de ferramentas digitais.

Tarefa 2 (Investigação). No gráfico de Van Langren, todos os valores exageram a diferença entre Roma e Toledo. Discuta as seguintes hipóteses:

a) coincidência: os antigos geógrafos tanto poderiam errar para mais como

REnCiMa, São Paulo, v. 13, n. 2, p. 1-27, abr./jun. 2022

para menos;

b) viés na tomada da medida: na falta de instrumentos de precisão, o ser humano tende, sistematicamente, a exagerar longas distâncias;

c) viés no cálculo da longitude: a diferença em graus depende da estimativa do raio da Terra, que se pensava menor.

Observação ao professor: A hipótese da coincidência é bastante fraca, o que deve ser evidente para o aluno: a probabilidade de que 12 estimativas fiquem todas acima do valor real, por acaso, é muito pequena. Um eventual viés na tomada da medida passa pela discussão dos métodos à disposição de cada geógrafo, o que vai muito além do escopo da aula. Mas, de forma geral, os alunos podem debater a sua própria percepção de distância. Tendem a exagerá-la? Tendem a minimizá-la? Sob quais condições? Finalmente, é possível que o cálculo das estimativas de longitude colhidas por Van Langren embutisse um erro sistemático. Tufte (1997) sugere que a discrepância seja resultado de contas que subestimam o raio da Terra. Mas a discrepância – quase 50%, na comparação com a média dos dados apresentados – parece grosseira demais, mesmo para a época. Assim, é possível supor uma combinação de erros, tanto na tomada de medidas diretas como no cálculo indireto da longitude. Alternativamente, pode-se até questionar a própria fidelidade dos dados reproduzidos por Van Langren, cujas fontes não se conhecem. Em qualquer caso, vale notar que, ao contrário do que supunha o cartógrafo, não se admite uma medida "verdadeira", isenta de erro, para a medida em questão.

Tarefa 3 (Exercício). No gráfico feito pelo astrônomo e matemático Christiaan Huygens, a curva representa o total de sobreviventes de certa idade, de um total de 100 nascidos. Por exemplo, o ponto C da figura indica que apenas 16 de 100 pessoas nascidas chegavam aos 36 anos. Analisando o gráfico, responda:

a) de cada 100 nascidos, quantas pessoas chegavam a completar 50 anos?

b) de cada 100 nascidos, a metade estaria morta até que idade?

c) de acordo com o gráfico de Huygens, qual seria sua expectativa de vida?

Observação ao professor: Este exercício resume-se à leitura do gráfico. Para resolver o item (a), por exemplo, basta tomar a ordenada do ponto da curva cuja abscissa seja 50 anos: cerca de 7 pessoas. Para além do resultado matemático, pode-se aproveitar esta questão para discutir a expectativa de vida em um "estado moderno"

REnCiMa, São Paulo, v. 13, n. 2, p. 1-27, abr./jun. 2022

do século XVII e os atuais indicadores de desenvolvimento humano. Quais fatores que aumentaram a expectativa de vida? Quais fatores explicam as atuais desigualdades?

Tarefa 4 (Problema). Considere a função de variável real $f(x) = 27\,000 \cdot \ln\left(\frac{30}{x}\right),\ x \neq 0,$ definida a partir de artigo de Edmond Halley, tal que *f(x)* é a altitude de uma cidade, em pés, sob pressão atmosférica *x*, em polegadas de mercúrio:

a) suponha uma cidade de altitude y_1 onde a pressão medida no barômetro é x_1. Qual a pressão x_2 de outra cidade cuja altitude é a metade de y_1?
b) suponha uma cidade de altitude y_1 onde a pressão é x_1. Qual a altitude y_2 de outra cidade onde a medida do barômetro é o dobro de x_1?

Observação ao professor: Este problema explora as propriedades operatórias dos logaritmos e a resolução de equações logarítmicas. Se achar necessário, o professor pode facilitar a tarefa atribuindo valores reais às variáveis, de modo a evidenciar a incógnita que se pretende determinar. As respostas podem parecer contraintuitivas aos alunos, cabendo então reforçar que as grandezas em questão não são proporcionais.

Tarefa 5 (Investigação). Tome os dados da tabela (Figura 4) produzida por Halley e:

a) esboce um gráfico de altitude por pressão;
b) escolha cinco cidades, pesquise suas altitudes e converta os valores para pés, usando a seguinte aproximação 1 pé = 0,3 metro;
c) usando o gráfico do item (a), encontre a pressão atmosférica das cinco cidades em polegadas de mercúrio. Converta para milímetros de mercúrio, usando 1 polegada = 25,4 mm.

Observação ao professor: Esta tarefa não oferece maiores dificuldades ao aluno, mas é uma oportunidade interessante para a pesquisa de características das cidades. A investigação pode ser bem desempenhada com auxílio de calculadora e ferramentas gráficas, como o software de geometria dinâmica Geogebra.

7 Considerações finais

Examinamos ao longo desta pesquisa argumentos a favor e contra o uso da HM em sala de aula. Em atenção ao aparente impasse, julgou-se conveniente propor,

REnCiMa, São Paulo, v. 13, n. 2, p. 1-27, abr./jun. 2022

não um produto acabado, mas um formato de material didático desenhado para engajar o professor. É um formato essencialmente simples. O relato histórico, como dissemos, tem a dupla função de envolver e informar o docente; as tarefas demonstram o potencial dos elementos históricos para a investigação de conceitos matemáticos e a fixação de procedimentos, no cumprimento do currículo comum. Para tanto, o emprego de fontes históricas mostra-se especialmente fecundo. Além de informar as dificuldades e o contexto em que certas noções se desenvolveram, servem também como inspiração para a elaboração de exercícios, problemas, explorações e investigações.

No exemplo dado, vimos como Van Langren, Huygens e Halley se valem de representações gráficas para enfrentar questões concretas de seu tempo. Ele ilustra com riqueza, achamos, a noção de que HM ajuda a explicar o papel da Matemática na sociedade, como sugere Fauvel (1991). Não se espera, é claro, que o aluno tenha a fluência e o fôlego de leitura necessários para atravessar tratados do século XVII. Mas, com a devida mediação do professor, é possível identificar seus principais elementos, em particular os trechos que tocam os diagramas em questão, disponíveis on-line.

A sugestão de tarefas matemáticas inspiradas em elementos históricos busca vencer a objeção de que HM não seja matemática. É certo que muitos livros didáticos ainda reduzem a HM à história-anedotário, para usar feliz expressão de Miguel e Miorim (2019, s. p.), mas é igualmente certo que se pode tomá-la como estratégia para esclarecer e aprofundar conceitos e procedimentos matemáticos, como mostram Carvalho, Cavalari e Cristóvão (2021). Foi o que buscamos.

Das questões levantadas, uma nos parece, a este ponto, insuperável: a questão da motivação. Pode-se admitir que a Matemática tenha boas histórias para contar. Pode-se admitir que boas histórias, inclusive as anedotas, tenham o condão de interessar e até predispor o aluno em sala. Assim, nos parece, pode-se aceitar que a HM tenha potencial motivador. Este, contudo, se realiza ou não se realiza conforme a circunstância didática. Encerrada em si mesma, uma boa história não basta para aumentar o interesse do aluno na "lógica fria" das ideias matemáticas, como queria Cajori (1894, p. 3). Em vez disso, nos relatos e tarefas aqui propostos, buscou-se dar atenção às dificuldades que marcam o desenvolvimento do saber matemático para, justamente, afastar o estigma de frieza que pesa sobre a disciplina. Eis mais uma

REnCiMa, São Paulo, v. 13, n. 2, p. 1-27, abr./jun. 2022

razão para o uso da HM: mostrar que a aparente aridez de um resultado matemático deriva do esforço de diversas pessoas, de diferentes civilizações, no curso vibrante da história.

Referências

ASSOCIATE EDITORS OF MATHEMATICAL REVIEWS AND ZBMATH. **Mathematics Subject Classification**. 2020. Disponível em: https://zbmath.org/classification; acesso em: 12 dez. 2021.

BENIGER, James R.; ROBYN, Dorothy L. Quantitative graphics in statistics: A brief history. **The American Statistician**, v. 32, n. 1, p. 1-11, fev. 1978.

BOYER, Carl Benjamin. Note on an early graph of statistical data (Huygens 1669). **Isis**, v. 37, n. 3/4, p. 148-149, 1947.

BOYER, Carl Benjamin; MERZBACH, Uta Caecilia. **A history of mathematics**. 3. ed. Hoboken: John Wiley & Sons, 2011.

BRACHO, Luis Andrés Castillo; MENDES, Iran Abreu. O Crephimat como um ambiente virtual sobre as pesquisas em História da Matemática. **REMATEC**, v. 14, n. 32, p.163-176, 2019.

BRASIL. Presidência da República. **Constituição da República Federativa do Brasil de 1988.** Brasília: Presidência da República, 1988.

BRASIL. **Lei nº 9.394, de 20 de dezembro de 1996.** Estabelece as diretrizes e bases da educação nacional. Brasília: Diário Oficial da União, 23 dez. 1996.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria da Educação Média e Tecnológica. **Parâmetros Curriculares Nacionais:** Ensino Médio. Brasília: MEC/SEMTEC, 1999.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria da Educação Média e Tecnológica. **PCN+ Ensino Médio:** orientações educacionais complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais. Brasília: MEC/SEMTEC, 2002a.

BRASIL. Conselho Nacional da Educação. Câmara de Educação Superior. **Parecer número 1.302/2001, de 6 de novembro de 2001**. Diretrizes Curriculares Nacionais para os Cursos de Matemática, Bacharelado e Licenciatura. Brasília: Diário Oficial da União, 5 mar. 2002b.

BRASIL. Ministério da Educação. Fundo Nacional de Desenvolvimento da Educação. **Edital de convocação nº 01/2013, de 16 de janeiro de 2013.** Edital de convocação para o processo de inscrição e avaliação de obras didáticas para o programa nacional do livro didático PNLD 2015. Brasília: MEC/FNDE, 2015.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Básica. **Base Nacional Comum Curricular**: Educação é a Base (versão final). Brasília: MEC/SEB, 2018a.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Básica. **Base Nacional Comum Curricular:** Educação é a Base, Ensino Médio (terceira versão). Brasília:

MEC/SEB, 2018b.

BRASIL. Ministério da Educação. **Portaria nº 1.432, de 28 de dezembro de 2018**. Estabelece os referenciais para elaboração dos itinerários formativos conforme preveem as Diretrizes Nacionais do Ensino Médio. Brasília: Diário Oficial da União, 5 abr. 2019a.

BRASIL. Ministério da Educação. Fundo Nacional de Desenvolvimento da Educação. **Edital de convocação nº 03/2019, de 27 de novembro de 2019.** Edital de convocação para o processo de inscrição e avaliação de obras didáticas, literárias e recursos digitais para o Programa Nacional do Livro e do Material Didático 2021. Brasília: MEC/FNDE, 2019b.

BRITTO, Silvio Luiz Martins; BAYER, Arno. O uso da História no ensino da Matemática e a opinião dos professores de Matemática do Ensino Médio da 2ª CRE quanto ao uso desse recurso. **Acta Scientiae**, Canoas, v. 9, n. 1, p. 41-62, 2007.

CAJORI, Florian. **A History of Mathematics**. New York: Macmillan, 1894.

CARMO, Fernanda Maria Almeida do; QUEIROZ, Antonio José Melo de. Uma análise de elementos curriculares da disciplina História da Matemática nas licenciaturas do Ceará. **Cocar**, v. 14, n. 30, p. 1-18, 2020.

CARVALHO, Letícia Sousa.; CAVALARI, Mariana Feiteiro; CRISTOVÃO, Eliane Matesco. História da Matemática em sala de aula: contribuições para o ensino e aprendizagem de equação do primeiro grau na Educação Básica. **Revista de Ensino de Ciências e Matemática**, v. 12, n. 5, p. 1-24, 2021.

CREWE, Maurice. The fathers of scientific meteorology – Boyle, Wren, Hooke and Halley: Part 2. **Weather**, v. 58, n. 4, p. 135-139. 2003.

D'AMBRÓSIO, Ubiratan. A História da Matemática: questões historiográficas e políticas e reflexos na Educação Matemática. In: BICUDO, Maria Aparecida Viggiani (org.) **Pesquisa em educação matemática**: concepções e perspectivas. São Paulo: Ed. Unesp, 1999. p. 97-115.

ERNEST, Paul. The History of Mathematics in the classroom. **Mathematics in School**, v. 27, n. 4, p. 25-31, 1998.

FAUVEL, John. Using History in Mathematics Education. **For the Learning of Mathematics**, v. 11, n. 2, p. 3-6, 1991.

FAUVEL, John; VAN MAANEN, Jan. Introduction. In: FAUVEL, John; VAN MAANEN, Jan. (ed.). **History in mathematics education**: The ICMI study, v. 6. New York: Kluwer Academic, 2002.

FREUDENTHAL, Hans. Should a mathematics teacher know something about the history of mathematics? **For the Learning of Mathematics**, v. 2, n. 1, p. 30-33, 1981.

FREIRE, Gabriel Gonçalves; ROCHA, Zenaide de Fatima Dante Correia; GUERRINI, Daniel. Produtos educacionais do Mestrado Profissional em Ensino da UTFPR – Londrina: estudo preliminar das contribuições. **Polyphonía**, v. 28, n. 2, p. 375-390.

2017.

FRIENDLY, Michael. A brief history of data visualization. In: CHEN, Chun-houh; HÄRDLE, Wolfgang Karl Karl; UNWIN, Antony. **Handbook of Data Visualization**. Berlim: Springer, 2008, p. 15-56.

FRIENDLY, Michael; DENIS, Daniel. The early origins and development of the scatterplot. **Journal of the History of Behavioral Sciences**, v. 41, n. 2, p. 103-130, 2005.

FRIENDLY, Michael; VALERO-MORA, Pedro.; ULARGUI, Joaquín Ibáñez. The first (known) statistical graph: Michael Florent van Langren and the 'Secret' of Longitude. **The American Statistician**, v. 64, n. 2, p. 174-184, 2010.

FRISINGER, H. Howard. Mathematicians in the history of meteorology: the pressure-height problem from Pascal to Laplace. **Historia mathematica**, v. 1, n. 3, p. 263-286, 1974.

FUNKHOUSER, Howard Gray. Historical development of the graphical representation of statistical data. **Osiris**, v. 3, p. 269-404, 1937.

FURINGHETTI, Fulvia. Rethinking history and epistemology in mathematics education. **International Journal of Mathematical Education in Science and Technology**, v. 51, n. 6, p. 967-994, 2020.

GOMES, Marcos Luis. **As práticas culturais de mobilização de histórias da matemática em livros didáticos destinados ao ensino médio**. 2008. 166f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) — Faculdade de Educação. Unicamp. Campinas.

HALLEY, Edmond. A discourse of the rule of the decrease of the height of the mercury in the barometer, according as places are elevated above the surface of the Earth, with an attempt to discover the true reason of the rising and falling of the mercury, upon change of weather. **Philosophical Transactions of the Royal Society of London**, v. 16, n. 181, p. 104-115, 1687.

HEIEDE, Torkil. Why teach History of Mathematics? **The Mathematical Gazette**, v. 76, n. 475, p. 151-157, mar. 1992.

HEPPEL, George. The use of history in teaching mathematics. **General Report** (Association for the Improvement of Geometrical Teaching), v. 19, p. 19-33. 1893.

HUYGENS, Christiaan. **Oeuvres complètes de Christiaan Huygens publiées par la Société hollandaise des sciences**. La Haye: Martinus Nijhoff, 1895. v. 6.

LARA, Isabel Cristina Machado de. A História da Matemática como recurso pedagógico: percepções de estudantes da Educação Básica. **Revista de Ensino de Ciências e Matemática**, v. 7, n. 2, p. 1-12, 2016.

MIGUEL, Antônio; MIORIM, Maria Ângela. **História na educação matemática:** propostas e desafios. 3. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2019.

MONTUCLA, Jean Étienne. **Histoire des mathématiques**. Paris: Ant. Jombert, 1758.

REnCiMa, São Paulo, v. 13, n. 2, p. 1-27, abr./jun. 2022

MORABIA, Alfredo. Observations Made Upon the Bills of Mortality. **British Medical Journal**, v. 346, e8640, 2013.

PEREIRA, Elisângela Miranda. **A História da Matemática nos livros didáticos de Matemática do Ensino Médio**: conteúdos e abordagens. 2016. 107f. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Ciências). Universidade Federal de Itajubá. Itajubá.

PINTO, Antônio Henrique. A matemática no Ensino Médio e a Base Nacional Comum Curricular: considerações sobre trabalho e formação humana. Salvador: **Estudos IAT**, v. 3, n. 2, p. 4-17, 2018.

PONTE, João Pedro da. Tarefas no ensino e na aprendizagem da Matemática. In: PONTE, João Pedro da. (Org.). **Práticas Profissionais dos Professores de Matemática**. Lisboa: Instituto de Educação da Universidade de Lisboa, 2014. p. 13-27.

REIS, Aarão; REIS, Lucano. **Curso elementar de Mathematica**: Arithmetica. 2. ed. Rio de Janeiro: F. Alves, 1892.

ROSE, David. Genre in the Sydney School. In: GEE, James Paul; HANDFORD, Michael (ed.). **The Routledge handbook of discourse analysis**. Londres: Routledge, 2012. p. 209-225.

SANTOS, Marcos Roberto dos. **Compreensões de professores do ensino médio acerca da utilização da História da Matemática no ensino de Matemática**. 2017. 82f. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Ciências) — Universidade Federal de Itajubá. Itajubá.

SIU, Man-Keung. “No, I don’t use history of mathematics in my class. Why?” In: FURINGHETTI, Fulvia.; KAIJSER, Sten; TZANAKIS, Constantinos. (Ed.). **Proceedings of the HPM 2004 & ESU04**: ICME 10 Satellite Meeting and 4th European Summer University on the History and Epistemology in Mathematics Education. ed. rev. Iraklion: University of Crete, 2006. p. 268-277.

STRUIK, Dirk Jan. **A concise History of Mathematics**. 4. ed. Nova York: Dover, 1987.

TEZZA, Cristovão. Material didático - um depoimento. **Educar em Revista**, v. 18, n. 20, p. 35-42, dez. 2002.

TORRICELLI, Evangelista. **Lezioni accademiche di Evangelista Torricelli**. 2. ed. Milano: Giovanni Silvestre, 1823.

TUFTE, Edward R. **Visual explanations**: images and quantities, evidence and narrative. Cheshire, Connecticut: Graphics Press, 1997.

VAN LANGREN, Michael Florent. **La verdadera longitud por mar y tierra**: demonstrada y dedicada a su Magd. Catholica Phillipo IV. Flandres, 1644.

VON BIELFELD, Jakob Friedrich. **The elements of universal erudition, containing an analytical abridgment of the sciences, polite arts, and belles lettres**. Tradução

REnCiMa, São Paulo, v. 13, n. 2, p. 1-27, abr./jun. 2022

Revista de Ensino de Ciências e Matemática

de William Hooper. Londres: G. Scott, 1770.

VIANNA, Carlos Roberto. Usos Didáticos para a História da Matemática. In: Seminário Nacional de História da Matemática, 1., Recife, 1995. **Anais [...]**. Recife: Sociedade Brasileira de História da Matemática, 1998. p. 65-79.

VOGEL, Kurt. Montucla, Jean Étienne. In: GILLISPIE, Charles Coulston. (Ed.). **Dictionary of Scientific Biography**. New York: Charles Scribner's Sons, v. 9, p. 500-501, 1974.