



Conhecimento dos tópicos matemáticos (KoT) para o ensino de funções na Educação Básica por meio do MTSK: estado da arte das produções entre 2015 e 2020

Helio Cinquini Vianna Júnior¹

Leandro Carbo²

Jeferson Gomes Moriel Junior³

Resumo: Os resultados de aprendizagem de funções têm se mostrado cada vez mais insatisfatórios. Uma das formas de avançar na compreensão do conhecimento docente para seu ensino é através da produção científica. O objetivo é analisar o Conhecimento dos Tópicos Matemáticos (KoT) para o ensino de funções na Educação Básica presentes em produções científicas indexadas na *Web Of Science* entre 2015 a 2020. O referencial teórico adotado foi o *Mathematics Teachers' Specialized Knowledge*. Trata-se do estado do conhecimento das produções científicas sobre o conhecimento docente para o ensino de funções na Educação Básica, utilizando o instrumento iMTSK. Os conhecimentos identificados contemplam todas as categorias do subdomínio (Definições, propriedades e seus fundamentos; Fenomenologias e aplicações; Registros de representação; Procedimentos). Destacam-se os contextos de aplicação dos conceitos de função que são usados para introduzir os conceitos de domínio, contradomínio, imagem e pré-imagem, bem como para facilitar a compreensão de suas propriedades e definições.

Palavras-chave: Ensino de Funções. Matemática. Educação Básica. MTSK.

Knowledge of Mathematical Topics (KoT) for teaching functions in Basic Education through MTSK: state of the art of productions between 2015 and 2020

Abstract: The results of learning functions have been increasingly unsatisfactory. One of the ways to advance in the comprehension of teaching knowledge of its teaching is from a scientific production. The objective is to analyze the knowledge on mathematical topics (KoT) to the teaching of functions in Basic Education present in scientific productions indexed in Web of science in the period between 2015 and 2020. The theoretical framework used was the Mathematics Teachers' Specialized Knowledge. This is a study about the knowledge of scientific productions on teaching knowledge for teaching functions in Basic Education, using the iMTSK instrument. The knowledge identified includes all the subdomains categories (Definitions, properties and their foundations; Phenomenologies and applications; Representation records; procedures). The contexts of application of the function concepts are highlighted, which are used to introduce the concepts of domain, range, image and pre-image, as well as to facilitate the understanding of their properties and definitions.

1 Mestre em Ensino. Professor da Secretaria de Estado de Educação do Mato Grosso. Mato Grosso, Brasil. ✉ helio_cinquini@hootmail.com  <https://orcid.org/0000-0001-7935-1652>.

2 Doutor em Química. Professor do Programa de Pós-Graduação em Ensino do Instituto Federal de Mato Grosso (IFMT), *campus* Octayde Jorge da Silva. Mato Grosso, Brasil. ✉ leandro.carbo@ifmt.edu.br  <https://orcid.org/0000-0001-5514-7040>.

3 Doutor em Educação em Ciências e Matemática. Professor de Pós-Graduação em Ensino do Instituto Federal de Mato Grosso (IFMT), *campus* Octayde Jorge da Silva. Mato Grosso, Brasil. ✉ jeferson.moriel@ifmt.edu.br  <https://orcid.org/0000-0003-1526-8002>.

Keywords: Teaching Functions. Mathematics. Basic Education. MTSK.

Conocimientos de Temas Matemáticos (KoT) para funciones docentes en Educación Básica a través de MTSK: estado del arte de las producciones entre 2015 y 2020

Resumen: Los resultados del aprendizaje funcional han sido cada vez más insatisfactorios. Una de las formas de avanzar en la comprensión de los saberes didácticos para su enseñanza es a través de la producción científica. El objetivo es analizar el Conocimiento de Temas Matemáticos (KoT) para funciones de enseñanza en Educación Básica presente en producciones científicas indexadas en la Web Of Science entre 2015 y 2020. El referencial teórico adoptado fue el Conocimiento Especializado de Profesores de Matemática. Este es el estado de conocimiento de las producciones científicas sobre saberes docentes para funciones docentes en Educación Básica, utilizando el instrumento iMTSK. El conocimiento identificado incluye todas las categorías del subdominio (Definiciones, propiedades y sus fundamentos; Fenomenologías y aplicaciones; Registros de representación; Procedimientos). Se destacan los contextos de aplicación de los conceptos de función, los cuales se utilizan para introducir los conceptos de dominio, rango, imagen y preimagen, así como para facilitar la comprensión de sus propiedades y definiciones.

Palabras clave: Enseñanza de Funciones. Matemáticas. Educación Básica. MTSK.

1 Introdução

Fundamental em uma sociedade tecnológica, a Matemática está sendo cada vez mais valorizada. Entretanto, é um dos componentes curriculares mais temidos pelos estudantes que, por sua vez, apresentam índices de aprendizagem cada vez mais insatisfatórios em relação à referida disciplina (JUSTULIN; PEREIRA; FERREIRA, 2019).

Dentre os tópicos matemáticos que compõem o currículo da Educação Básica destaca-se o das Funções, por terem seus conceitos abordados ao longo de toda Educação Básica de forma implícita ou explícita (ARDENGHI, 2008); por constituírem outras áreas como a Física, Química, Biologia, Geografia e Economia (BENEDITO; BERNARDES, 2019; LIMA, 2008); por se estenderem a cursos superiores, como as Engenharias (ARAUJO, 2018); e por terem uma gama de aplicações na vida cotidiana, como, por exemplo, na relação existente entre o valor a ser pago em um estacionamento em função do seu tempo de uso. Apesar da vasta aplicação dos conceitos de função, que estão inseridos no cotidiano, muitos estudantes apresentam dificuldades relacionadas a este tema, o que pode contribuir com o baixo rendimento deles e, conseqüentemente, com os resultados insatisfatórios na aprendizagem de Matemática (ARAUJO, 2018).

As pesquisas sobre formação de professores ganharam foco a partir da década de 1980 devido às reformas educacionais em âmbito internacional (FIORENTINI *et al.*, 2002) e continuam sendo uma das principais tendências de investigação em Educação Matemática (PAZUCH; RIBEIRO, 2017). O professor é visto como peça fundamental no processo educativo (RODRIGUEZ-FLORES *et al.*, 2018) e para ensinar e fazer aprender matemática seus conhecimentos devem contemplar tanto o domínio matemático quanto o didático (ARAUJO, 2018; MCCRORY *et al.*, 2012), pois a desarticulação entre conhecimentos específicos e pedagógicos tem sido um dos problemas do ensino da disciplina (LIMA, 2008), como, por exemplo, conhecer as diferentes representações de uma função sem apresentar relações entre elas durante o processo de ensino (REZENDE, 2011).

Pazuch e Ribeiro (2017) realizaram uma revisão sistemática das produções sobre o conhecimento profissional do professor de Matemática e o conceito de função classificadas por *webqualis* A1, A2 e B1 na área da educação no período entre 2006 e 2015. Os autores identificaram os principais referenciais teóricos, o foco das pesquisas e os resultados obtidos, mostrando as construções delineadas, dificuldades na resolução e na exploração de questões e tarefas, equívocos, erros apresentados e as necessidades de resultados requeridos na formação inicial e continuada e também os conhecimentos mobilizados por professores de Matemática.

Considerando a importância das produções científicas sobre o conhecimento docente para o ensino de Funções como contribuições para melhorias da aprendizagem escolar do tópico em questão, nos questionamos sobre: quais são os avanços científicos sobre o conhecimento do professor de Matemática para o ensino de Funções nos últimos anos? Desta forma, esta pesquisa tem como objetivo analisar o Conhecimento dos Tópicos Matemáticos (KoT) para o ensino de funções na Educação Básica, o qual se encontra presente em produções científicas indexadas na *Web Of Science* no período de 2015 a 2020. Também, a presente pesquisa está inserida nos esforços do grupo de pesquisa TSK *group* do IFMT, *campus* Cuiabá⁴.

2 Conhecimento Especializado de Professores de Matemática (MTSK)

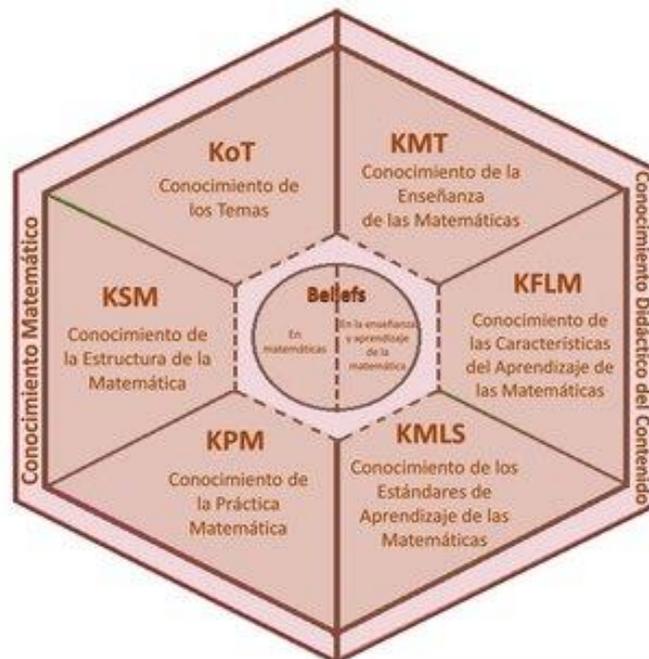
O *Mathematics Teachers' Specialized Knowledge* (MTSK) (CARRILLO *et al.*, 2014) é um modelo teórico-analítico que caracteriza os conhecimentos que um

⁴ <http://dgp.cnpq.br/dgp/espelhogrupo/529979>.

professor de Matemática pode ou deve mobilizar no processo de ensino-aprendizagem de modo que sua especificidade só faça sentido para a atividade de tais profissionais (ARAUJO, 2018; ESPINOZA-VÁSQUEZ; ZAKARYAN; CARRILLO YÁÑEZ, 2018). O MTSK surgiu com o intuito de superar as limitações de modelos anteriores, buscando garantir que a definição de cada subdomínio fosse construída a partir do que o professor usa e/ou precisa para ensinar Matemática, de modo que evite a sobreposição de subdomínios (CARRILLO-YAÑEZ *et al.*, 2018).

O modelo (Figura 1) é composto por dois domínios: o Conhecimento Matemático (*Mathematics Knowledge – MK*) e o Conhecimento Didático do Conteúdo (*Pedagogical Content Knowledge – PCK*) e cada domínio contém três subdomínios. Ao centro, estão as crenças do professor sobre o domínio matemático e o domínio didático do conteúdo que permeiam os subdomínios e dão sentido às suas ações (MORIEL JUNIOR, 2014; CASSIMIRO *et al.*, 2021).

Figura 1: Modelo do Conhecimento Especializado de Professores de Matemática (MTSK)



Fonte: Carrillo *et al.* (2014)

O Conhecimento Matemático (*Mathematics Knowledge – MK*) abarca o conhecimento do professor sobre seus diferentes tópicos, sobre as conexões internas da Matemática e conexões da Matemática com outras áreas e, também, sobre o processo de construção matemática. Seus subdomínios são: Conhecimento dos Tópicos Matemáticos (KoT), Conhecimento da Estrutura Matemática (KSM) e Conhecimento da Prática Matemática (KPM).

Por sua vez, o Conhecimento Didático do Conteúdo (*Pedagogical Content*

Knowledge – PCK) corresponde ao conhecimento do professor sobre como ocorre o ensino da Matemática, os aspectos relacionados à aprendizagem e também sobre o nível de conhecimento desejado que o estudante alcance em determinada etapa escolar. Seus subdomínios são: Conhecimento do Ensino da Matemática (KMT), Conhecimento das Características de Aprendizagem Matemática (KFLM) e Conhecimento dos Padrões de Aprendizagem Matemática (KMLS).

O Conhecimento dos Tópicos Matemáticos (KoT) envolve os conhecimentos do professor sobre um tópico específico, combinando o nível de conhecimento que os estudantes devem alcançar em determinada etapa escolar com uma compreensão mais profunda (CARRILLO-YAÑEZ *et al.*, 2018). Neste subdomínio são incluídas as categorias de Definições, propriedades e seus fundamentos, Fenomenologias e aplicações, Registros de representação e Procedimentos. Tais categorias serão apresentadas a seguir com exemplos relacionados ao tópico de funções.

Dentro da categoria de Definições, propriedades e seus fundamentos estão os conhecimentos atribuídos a um tópico particular, suas definições e o conjunto apropriado de propriedades para caracterizar objetos matemáticos (CARRILLO-YAÑEZ *et al.*, 2018). Em particular, as funções podem ser definidas a partir de três ideias básicas (SANTOS DE SOUZA; SOUZA, 2018), sendo elas: como uma relação entre variáveis (grandezas que variam uma dependendo da outra), como uma relação entre conjuntos (um elemento do conjunto de partida associa-se a um único elemento do conjunto de chegada) e como uma transformação (uma função transforma o valor dado em outro valor). Além das definições apresentadas, algumas propriedades de função também podem ser utilizadas como agente de definição, como, por exemplo, saber que uma função pode ser injetora, sobrejetora ou bijetora (ARAUJO, 2018).

A categoria de Fenomenologias e aplicações é o conhecimento sobre contextos e aplicações que podem servir para gerar conhecimento matemático, dentre eles, os que aparecem na gênese do conceito (CARRILLO-YAÑEZ *et al.*, 2018). Nesta categoria, por exemplo, se encontra o conhecimento do professor sobre uma aplicação dos conceitos de função no valor a ser pago em uma corrida de táxi em função da quilometragem rodada, podendo aproveitá-la para introduzir os conceitos de variáveis dependente e independente, pré-imagem e imagem.

A categoria de Registros de representação envolve os conhecimentos sobre as diferentes formas de representar um determinado tópico (CARRILLO *et al.*, 2014).

Uma função pode ser representada nas seguintes formas: verbal, algébrica, por diagrama de flechas (diagrama de Venn), tabular, gráfica (SOUZA, 2016) e também na forma pictórica (ARAUJO, 2018).

Por fim, na categoria de Procedimentos estão os conhecimentos do professor sobre como fazer, por que fazer e quando fazer, bem como conhecer as características dos objetos resultantes de determinados procedimentos (CARRILLO-YAÑEZ *et al.*, 2018). Está relacionado a esta categoria o conhecimento do professor sobre o procedimento de substituição de variáveis para obter a imagem de uma função através de sua expressão algébrica.

O MTSK pode ser considerado como uma ferramenta importante para investigação analítica do conhecimento científico e especializado de professores de Matemática (MORIEL JUNIOR e ALENCAR, 2019), e seus subdomínios mostram-se eficientes para descrevê-lo (MORIEL JUNIOR, 2021). Além disso, professores formadores podem fazer uso dos subdomínios e categorias deste modelo para treinar futuros professores de Matemática (CARRILLO-YAÑEZ *et al.*, 2018).

3 Metodologia

Trata-se de uma pesquisa bibliográfica que busca discutir a revisão da literatura sobre o conhecimento docente para o ensino de funções na Educação Básica (VILAÇA, 2010) a partir de uma abordagem qualitativa em que os dados foram analisados em toda sua riqueza, respeitando a forma como foram transcritos (BOGDAN; BLIKEN, 1994).

Quanto à abordagem metodológica, trata-se do estado do conhecimento, visando a melhor compreensão da produção científica sobre a referida área através do mapeamento e da sistematização dos conhecimentos identificados nos artigos científicos no período entre 2015 e 2020 (KOHLS-SANTOS; MOROSINI, 2021). O trabalho foi realizado a partir do levantamento e revisão da produção científica sobre a temática em questão, sendo classificado como analítico-descritivo em relação aos objetivos (ROMANOWSKI; ENS, 2006).

A fonte de dados escolhida para a pesquisa foi a *Web Of Science*, por conter uma grande quantidade de pesquisas mundiais na área da educação (GUMIERO; PAZUCH, 2020). Portanto, buscou-se nesse banco de dados por produções científicas sobre o conhecimento do professor de Matemática para o ensino de funções na

Educação Básica no período compreendido entre 2015 e 2020. O recorte se deve ao número de produções indexadas na base. O período em questão foi escolhido com a finalidade de observar os avanços científicos sobre a temática nos últimos anos.

Primeiro, fora realizada uma busca na referida base de dados, utilizando os seguintes descritores (Tabela 1): 1. (*Teaching, Knowledge, Functions, Mathematics*); 2. (*Teachers' Mathematics Knowledge AND Concept Functions*); 3. (*Teacher Mathematics Knowledge AND Functions*); 4. (*Mathematics Teacher Knowledge for teaching function*); e 5. (*Teacher Mathematics Knowledge "AND" Teaching Functions*).

Tabela 1: Obtenção de dados por descritores

Busca		Excluídos por			Selecionados para análise
Número do descritor	Descritores	Número de artigos encontrados	Período	Temática	
1	<i>Teaching, Knowledge, Functions, Mathematics</i>	444	173	265	6
2	<i>Mathematics Knowledge AND Concept Functions</i>	100	40	54	6
3	<i>Teacher Mathematics Knowledge AND Functions</i>	380	152	225	3
4	<i>Mathematics Teacher Knowledge for teaching function</i>	183	59	121	3
5	<i>Teacher Mathematics Knowledge AND Teaching Functions</i>	103	40	59	4

Fonte: Produzida pelos Autores (2021)

Em seguida, para cada um dos descritores mencionados, aplicou-se a exclusão por período (2015 – 2020). Posteriormente, os artigos que se encontravam dentro do período pré-estabelecido foram classificados para a análise a partir da leitura dos títulos, resumos e palavras-chave. Foram excluídos os trabalhos que tratavam de outras áreas, que não a Matemática, e também os que não tratavam do conhecimento docente para o ensino de funções na Educação Básica. Por fim, os artigos repetidos encontrados nos diferentes descritores foram desconsiderados, gerando o seguinte *corpus* de análise (Quadro 1). Para facilitar a leitura dos resultados, optou-se por codificar os artigos analisados.

Quadro 1: *Corpus* de análise do artigo

Código	Referência	Sujeitos
A01	Rodriguez-Flores <i>et al.</i> (2016)	1 professor do Ensino Médio da

		Costa Rica com experiência.
A02	Espinoza-Vásquez <i>et al.</i> (2016)	1 professor com experiência e considerado bom professor por seus colegas e superiores.
A03	Espinoza-Vásquez, Zakarayan e Carrillo (2017)	1 professor do Chile com experiência.
A04	Hatisaru e Erbas (2017)	2 professores do Ensino Médio Profissional da Turquia com experiência (Fatma e Ali).
A05	Rodriguez-Flores <i>et al.</i> (2018)	1 professor do Ensino Médio da Costa Rica com experiência.
A06	Espinoza-Vásquez, Zakarayan e Carrillo Yañez (2018)	2 professores de uma escola privada no Chile (Arturo e Jaime).

Fonte: Produzido pelos Autores (2021)

Os dados foram analisados a partir dos trechos dos artigos em que foram identificados indícios ou evidências de conhecimentos especializados (MORIEL-JUNIOR; CARRILLO, 2014) que se referem ao subdomínio do Conhecimento dos Tópicos Matemáticos (KoT). O instrumento utilizado para a análise foi o iMTSK (MORIEL JUNIOR, 2021).

Figura 1: Instrumento de análise iMTSK

Dados	Análise do pesquisador		
	O sujeito manifestou conhecimento...	associado a...	que consiste em...
Trecho do episódio (Fonte, linha ou página)	[subdomínio]	[categoria]	[síntese do conhecimento] ^a
<i>[Exemplo] A aula de resolução de problemas termina quando eu sistematizo o conceito de Princípio fundamental da contagem a partir das soluções dos alunos sobre combinar calças e camisas. (Professora, 3-5)</i>	<i>do ensino de matemática (KMT)</i>	<i>Teorias de ensino</i>	<i>uma das etapas da metodologia 'resolução de problemas' para ensinar o 'Princípio fundamental da contagem': sistematização do conceito 'a partir das soluções dos alunos sobre [o problema de] combinar calças e camisas'</i>

Nota: a. Inicia-se com um artigo (definido ou indefinido) ou um numeral (indicando a quantidade de conhecimentos), seguido pelo elemento central do conhecimento identificado (que não é uma ação), validando-o com citação dos dados. Cada trecho pode conter um ou mais conhecimentos, de um ou mais subdomínios e categorias, indicando suas conexões.

Fonte: Moriel Junior (2021, p. 200)

Os trechos em que havia indícios ou evidências nas manifestações de conhecimentos especializados que contemplassem as categorias do KoT foram selecionados e classificados de acordo com suas respectivas categorias. Posteriormente, fora realizada uma síntese dos conhecimentos manifestados

descrevendo-os de forma qualitativa com o “consiste em...” a partir das citações dos trechos em que havia tais manifestações.

4 Resultados e Discussão

Os dados indicam que há indícios e evidências de conhecimento especializado em todas as categorias do Conhecimento dos Tópicos Matemáticos (KoT). A seguir, são apresentados alguns exemplos da análise de dados dentro de cada categoria (Quadro 2), e, posteriormente, a descrição qualitativa de todos os conhecimentos identificados e separados por categorias.

Quadro 2: Exemplos das análises do Conhecimento dos Tópicos Matemáticos (KoT)

Dados	Análise do pesquisador		
	O sujeito manifestou conhecimento...	Associado a...	Que consiste em...
Para identificar relações que correspondem a uma Função, o (professor – A01) explica que uma Função “é uma relação, tendo em conta que uma relação é uma associação entre elementos de dois conjuntos, como o companheiro disse anteriormente, mas uma relação que tem duas condições importantes, cada elemento, ou seja, todos os elementos daqui (aponta o primeiro conjunto), tem que estar relacionado com um único elemento do segundo conjunto. Uma relação com esta característica é o que vamos denominar, então, uma função entre dois conjuntos” (RODRIGUEZ-FLORES <i>et al.</i> , 2016, p. 11, tradução nossa).	Conhecimento dos Tópicos Matemáticos (KoT)	Definições, propriedades e seus fundamentos	Uma [definição] de função como uma relação entre conjuntos, em que “cada elemento, ou seja, todos os elementos daqui (conjunto de partida), tem que estar relacionado com um único elemento do segundo conjunto (conjunto de chegada)”.
“Ele (Professor – A04) explicou a função como uma transformação de objetos em uma entidade diferente sob um determinado processo. Ele pediu aos alunos que examinassem as imagens na primeira atividade do livro, mostrando que uma função era um mecanismo que converte entradas em saídas” (HATSARU; ERBAS, 2017, p. 712, tradução nossa).	Conhecimento dos Tópicos Matemáticos (KoT)	Definições, propriedades e seus fundamentos	Uma [definição] de função como “uma transformação de objetos em uma entidade diferente sob um determinado processo”.
“No primeiro episódio, o (professor – A05) apresenta um problema (uma tarefa) sobre a taxa de um táxi com o objetivo de introduzir o conceito de função, em seguida, pede aos seus alunos que, em grupos, eles	Conhecimento dos Tópicos Matemáticos (KoT)	Fenomenologias e aplicações	Uma [aplicação] dos conceitos de função dentro de um contexto, em que o problema apresentado serve para “introduzir o

<p>resolvam isso. Uma pessoa de cada grupo deve ir para o quadro negro para mostrar o procedimento e a solução encontrada” (RODRIGUEZ-FLORES <i>et al.</i>, 2018, p. 97, tradução nossa).</p>			<p>conceito de função”.</p>
<p>“(Arturo – A06) aproveita a analogia para destacar o caráter de processo da função e para introduzir a notação associada às funções, combinando os elementos que a analogia fornece com a notação formal. Essas relações são a ponte para as notações $y = f(x)$ e $A \rightarrow B$, apresentando uma combinação entre a linguagem simbólico-matemática e a representação pictórica” (ESPINOZA-VÁSQUEZ; ZAKARAYAN; CARRILLO YAÑEZ, 2018, p. 317, tradução nossa).</p>	<p>Conhecimento dos Tópicos Matemáticos (KoT)</p>	<p>Registros de representação</p>	<p>Duas [representações] de uma função, sendo elas “as notações $y = f(x)$ e $A \rightarrow B$” (algébrica) e “a representação pictórica” combinando os elementos fornecidos pela analogia com a notação formal.</p>
<p>(Arturo – A02): “Se eu quiser a imagem de 10, eu faço 10 passar pela função e chega como 51, outra coisa é Quero a pré-imagem de 10, ou seja, 10 não está no conjunto inicial, está no conjunto de chegada, então quem mandei para que aquele número, ao passar pela função, que chegasse como 10? Significa que a função tem que me dar 10. Dissemos que encontrar pré-imagens era o mesmo que resolver uma equação, porque eu quero que a função $5x + 1$ me dê 10, então ela se torna uma equação. Quando eu encontro imagens, eu pego o valor, coloco na função e ela joga sua imagem para mim, mas quando eu quero pré-imagens eu pego a função e igualo ao valor que eu quero que ela seja. Ao limpar aqui, o que terei deixado?” (ESPINOZA-VÁSQUEZ <i>et al.</i>, 2016, p. 204, tradução nossa).</p>	<p>Conhecimento dos Tópicos Matemáticos (KoT)</p>	<p>Procedimentos</p>	<p>Dois [procedimentos], um para determinar a imagem de uma função por transformação em que para encontrar a imagem de 10 é necessário fazer o “10 passar pela função” para chegar em 51, e um para determinar a pré-imagem de uma função que é “o mesmo que resolver uma equação”.</p>

Fonte: Produzido pelos Autores (2022)

Dentro da categoria de Definições, propriedades e seus fundamentos aparece o conhecimento de um dos professores que consiste em condições necessárias para definir uma função. No artigo A01, o professor estabelece uma relação entre os elementos, em que os pares ordenados são vistos como “associações que fazemos com os elementos de A e os elementos de B” (RODRIGUEZ-FLORES *et al.*, 2016, p.

9, tradução nossa). Ao apresentar um diagrama que não corresponde a uma função, o professor destaca que “toda função é uma relação, mas nem toda relação é uma função” (RODRIGUEZ-FLORES *et al.*, 2016, p. 12, tradução nossa).

Além das condições necessárias para definir uma função, nessa categoria aparece o conhecimento sobre algumas propriedades de função. No artigo A04, os dois professores conhecem a propriedade de univalência de funções, a qual serve para “decidir a funcionalidade de relações de correspondência de conjuntos” (HATISARU; ERBAS, 2017, p. 711, tradução nossa), o que consiste em uma propriedade que é utilizada para definir uma função, pois nenhum elemento do domínio ficaria sem fazer relação e “nenhum elemento (do domínio) no intervalo teria duas imagens diferentes” (HATISARU; ERBAS, 2017, p. 715, tradução nossa). Por sua vez, no artigo A06, Jaime enfatiza uma característica de unicidade ao fazer uma analogia de funções com uma máquina *dispenser* ao relacionar uma “moeda e um produto, entregando apenas um resultado, enfatizando a natureza univalente de uma função” (ESPINOZA-VÁSQUEZ; ZAKARAYAN; CARRILLO YÁÑEZ, 2018, p. 314, tradução nossa).

Quanto às definições de função, nos artigos A01, A03, A04 e A06 são apresentadas como uma relação entre conjuntos (SANTOS DE SOUZA; SOUZA, 2018), que consiste em “uma relação que tem duas condições importantes, cada elemento do primeiro conjunto corresponde a um único elemento do segundo conjunto” (RODRIGUEZ-FLORES *et al.*, 2016, p. 11, tradução nossa), uma relação em que “cada elemento do conjunto de entrada corresponde a um único elemento de saída” (ESPINOZA-VÁSQUEZ; ZAKARAYAN; CARRILLO, 2017, p. 3291, tradução nossa), uma lei de correspondência na qual “cada elemento de um conjunto corresponde conforme necessário a um elemento do segundo conjunto” (HATISARU; HERBAS, 2017, p. 711, tradução nossa), como “uma regra levando um elemento a outro elemento ou a si mesmo” (HATISARU; ERBAS, 2017, p. 715, tradução nossa) e uma relação em que, “para cada elemento desse conjunto, é atribuído um único elemento de outro conjunto” (ESPINOZA-VÁSQUEZ; ZAKARAYAN; CARRILLO YÁÑEZ, 2018, p. 312, tradução nossa).

Além da definição como uma relação entre dois conjuntos, um dos professores do artigo A04 também a apresenta como “uma transformação de objetos em uma entidade diferente sob um determinado processo” (HATISARU; ERBAS, 2017, p. 712,

tradução nossa), o que consiste em uma definição de função como uma transformação (SANTOS DE SOUZA; SOUZA, 2018).

O conhecimento dos professores dos artigos A01 e A05, o qual se refere à categoria de Fenomenologias e aplicações, se encontra nas tarefas propostas que se inserem no contexto de valor a ser pago em uma corrida de táxi em função da quilometragem rodada e serve para “introduzir o conceito de funções” (RODRIGUEZ-FLORES *et al.*, 2018, p. 97, tradução nossa). Além desta tarefa, o professor do artigo A01 também conhece uma aplicação do conceito de função para determinar o salário quinzenal de um vendedor de revistas e o utiliza para “introduzir o conceito de imagem e pré-imagem” (RODRIGUEZ-FLORES *et al.*, 2016, p. 12, tradução nossa). Por sua vez, no artigo A05, o professor também faz o uso de um problema físico (diz ele), que consiste em: (1) uma aplicação de Função na qual “o peso esperado P de uma baleia se relaciona com o seu comprimento L ” (RODRIGUEZ-FLORES *et al.*, 2018, p. 99, tradução nossa); e (2), em conhecer diferentes aplicações dos conceitos de função em situações do cotidiano que servem para facilitar a compreensão dos conceitos de variáveis dependente e independente, imagem e pré-imagem.

Dentro dessa categoria também são destacadas, por um dos professores (Fatma) do artigo A04, as aplicações dos conceitos de função em diferentes objetos como “estojo, gravador de voz e telefone” (HATSARU; ERBAS, 2017, p. 716, tradução nossa), assim como suas aplicações no funcionamento de uma máquina de lavar roupas, trazendo “à tona o significado de função como operação usando algumas analogias (por exemplo, a máquina de lavar)” (HATSARU; ERBAS, 2017, p. 716, tradução nossa). Tal analogia também é apresentada pelo professor do artigo A03 ao explicar aos seus alunos que uma função realiza uma operação, destacando que a máquina “realiza a função de lavar” (ESPINOZA-VÁSQUEZ; ZAKARAYAN; CARRILLO, 2017, p. 3291, tradução nossa). No artigo A04 (Ali) também conhece uma aplicação do conceito de função no funcionamento de uma máquina de moer café, em que “os grãos de café são colocados na máquina, são expostos a um processo e terminam em forma de pó” (HATISARU; ERBAS, 2017, p. 712, tradução nossa), o que consiste em diferentes aplicações dos conceitos de funções no funcionamento de objetos e máquinas utilizados para introduzir e facilitar a compreensão de seus conceitos.

Quanto à categoria de Registros de representações, no artigo A02 o professor

utiliza duas representações, sendo elas: o “diagrama sagitário” (ESPINOZA-VÁSQUEZ *et al.*, 2016, p. 201, tradução nossa), para observar a relação entre os elementos de dois conjuntos; e, também, a representação dada por uma “expressão algébrica” (ESPINOZA-VÁSQUEZ *et al.*, 2016, p. 201, tradução nossa), que consiste em duas representações de funções.

Além da representação por diagrama de flechas, no artigo A05 o professor também utiliza a representação algébrica, destacando que “podemos especificar uma relação por meio de diagramas de Venn (diagrama de flechas) ou por meio de uma lista de pares ordenados que definem a relação, gráfico” (RODRIGUEZ-FLORES *et al.*, 2018, p. 100, tradução nossa). Além disso, o sujeito também faz o uso das representações numéricas, verbais, tabulares e gráficas, das quais “o uso das representações verbais, algébricas e numéricas foi frequente” (RODRIGUEZ-FLORES *et al.*, 2018, p. 101, tradução nossa). Em um dos exemplos, o professor do A05 utilizou “os sistemas de representação icônicos (diagrama de flechas) e algébricos e estabeleceu relação entre eles e incluiu o sistema tabular quando trabalhava o conceito de contradomínio” (RODRIGUEZ-FLORES *et al.*, 2018, p. 101, tradução nossa) e para os conceitos de função, imagem e pré-imagem utilizou “os sistemas de representação tabulares e gráficos” (RODRIGUEZ-FLORES *et al.*, 2018, p. 101, tradução nossa), que consiste em seis representações de uma função.

No artigo A03, “o professor desenha uma máquina de lavar no quadro branco” (ESPINOZA-VÁSQUEZ; ZAKARAYAN; CARRILLO, 2017, p. 3293, tradução nossa) que consiste em um registro pictórico de funções. Além disso, o sujeito faz o uso de outras duas representações quando, em um determinado trecho, o professor diz aos estudantes “isso (a função) vai adicionar dois a tudo o que vier [ele escreve “ $f(x) = x + 2$ ”]. Tudo o que entra na função, na máquina, eu adiciono dois a ela” (ESPINOZA-VÁSQUEZ; ZAKARAYAN; CARRILLO, 2017, p. 3293, tradução nossa), o que consiste em duas representações (verbal e algébrica).

No artigo A04, um dos sujeitos (Ali) representa as funções na forma “ $f(x) = 2x + 1$, na forma de pares ordenados e diagramas de flechas” (HATISARU; ERBAS, 2017, p.713, tradução nossa), que consiste em três diferentes representações (algébrica, numérica e diagrama de flechas). No mesmo artigo, Fatma a representa na forma $f(x) = y$ e cita que a mesma relação poderia ser mostrada “como um diagrama” (HATISARU; ERBAS, 2017, p.715, tradução nossa), o que consiste em

duas representações (algébrica e diagrama de flechas) para a mesma função.

No artigo A06, um dos professores (Jaime) “trabalha as relações entre conjuntos fazendo o uso do diagrama sagital” (ESPINOZA-VÁSQUEZ, ZAKARAYAN e CARRILLO YÁÑEZ, 2018, p. 312, tradução nossa) e também “faz a avaliação de uma expressão algébrica” (ESPINOZA-VÁSQUEZ; ZAKARAYAN; CARRILLO YÁÑEZ, 2018, p. 314, tradução nossa), o que consiste em duas representações de funções (diagrama de flechas e algébrica).

Por sua vez, no artigo A04, ao apresentar a definição de função, Arturo “faz um diagrama sagital no qual mostra uma correspondência entre os elementos do conjunto A e B a partir de elementos genéricos a, b, x e y” (ESPINOZA-VÁSQUEZ; ZAKARAYAN; CARRILLO YÁÑEZ, 2018, p. 315, tradução nossa) e aproveita a analogia feita por ele para introduzir as notações associadas às funções: “Essas relações são a ponte para as notações $y = f(x)$ e $A \rightarrow B$, apresentando uma combinação entre a linguagem simbólico-matemática e a representação pictórica” (ESPINOZA-VÁSQUEZ; ZAKARAYAN; CARRILLO YÁÑEZ, 2018, p. 317, tradução nossa), o que consiste em três representações de função (algébricas, por diagrama de flechas e pictórica).

Em relação aos conhecimentos que aparecem nas pesquisas e se enquadram na categoria de Procedimentos, o professor do artigo A01 ensina como determinar a imagem de uma função substituindo o valor da pré-imagem através da expressão algébrica da função: “Se substitui a variável independente pelo valor que estão me dando e já encontramos uma imagem” (RODRIGUEZ-FLORES *et al.*, 2016, p. 12, tradução nossa) e também a determinar o gráfico de uma Função que tem o domínio finito: “Sempre que o domínio for dado por um conjunto finito de elementos, o gráfico da função será apenas a localização dos pares ordenados” (RODRIGUEZ-FLORES *et al.*, 2016, p. 14, tradução nossa), o que consiste em dois procedimentos, um para determinar a imagem de uma função por substituição de variáveis e outro para montar gráficos a partir da localização de pares ordenados.

No artigo A02, o professor ensina a determinar a imagem e a pré-imagem de uma função seja através de “estimativas ou da realização do processo inverso para o que é estabelecido pela função” (ESPINOZA-VÁSQUEZ *et al.*, 2016, p. 202, tradução nossa) e também como determinar a pré-imagem de uma função em que a mesma “vira uma equação” (ESPINOZA-VÁSQUEZ *et al.*, 2016, p. 203, tradução nossa), o

que consiste em dois procedimentos, sendo eles o cálculo por estimativas para determinar a imagem e a resolução de uma equação para determinar a pré-imagem.

No artigo A04, um dos professores (Ali) também ensina como determinar o valor da “imagem ou pré-imagem de uma Função” (HATISARU; ERBAS, 2017, p. 711, tradução nossa) através da substituição de variáveis. Ainda, neste artigo, Ali e Fatma também conhecem o procedimento do teste de linha vertical que serve para “identificar se os gráficos dados definem funções” (HATISARU; ERBAS, 2017, p. 717, tradução nossa), o que consiste em dois procedimentos: um para determinar a pré-imagem e imagem de uma função (substituição de variáveis) e o outro para verificar se os gráficos correspondem a uma função (teste de linha vertical).

O professor do artigo A06 (Jaime) aproveita “expressão algébrica ($f(x) = y$) para determinar imagens e pré-imagens” (ESPINOZA-VÁSQUEZ; ZAKARAYAN; CARRILLO YÁÑEZ, 2018, p. 314, tradução nossa), o que consiste em um procedimento para determinar a imagem e pré-imagem através de uma equação $f(x) = y$.

Por fim, no artigo A05, o professor ensina como montar o par ordenado de uma função que “sempre manterá esta ordem x vírgula y, primeiro a pré-imagem depois a imagem” (RODRIGUEZ-FLORES *et al.*, 2018, p. 100, tradução nossa), o que consiste em um procedimento para formar pares ordenados.

Diante dos dados analisados, fora realizada uma sistematização dos conhecimentos especializados que aparecem nas produções, os quais são apresentados por categorias no Quadro 3.

Os resultados mostram o conhecimento dos professores sobre as propriedades de relações entre conjuntos, unicidade e arbitrariedade de imagens e de univalência e as utilizam para definir funções como uma relação entre conjuntos. Em particular, em uma das produções analisadas, além da definição como uma relação entre conjuntos também aparece a definição de funções como uma transformação.

Em relação às aplicações dos conceitos básicos de funções, são propostas situações do cotidiano como tarefas para apresentar os conceitos de variáveis dependente e independente e de imagem e pré-imagem. Também são exploradas as aplicações de funções no funcionamento de objetos e máquinas como exemplos que servem para facilitar a compreensão dos estudantes em relação aos conceitos de

funções.

Quanto aos registros de representação, fica evidente o uso das representações verbais, numéricas, algébricas, diagrama de flechas, pictóricas, tabulares e gráficas, sendo que a algébrica aparece em todas as produções analisadas. Um dos aspectos que pode ter contribuído para que tal registro fosse identificado em todos os artigos pode ser o fato de muitos professores sentirem a necessidade de representar uma função na forma algébrica (REZENDE, 2011).

Quadro 3: Conhecimentos especializados identificados nas produções

Categorias	Conhecimentos
Definições, propriedades e seus fundamentos	<ul style="list-style-type: none"> - Propriedades de relações, de unicidade e arbitrariedade de imagens e de univalência; - Definições de função como uma relação entre conjuntos e como uma transformação.
Fenomenologias e aplicações	<ul style="list-style-type: none"> - Aplicação dos conceitos básicos de funções em situações cotidianas (valor da corrida de táxi, cálculo do salário quinzenal de um vendedor de revistas e um problema físico para determinar o peso de uma baleia em função de seu comprimento); - Aplicações dos conceitos básicos de funções no funcionamento de objetos (estojo, gravador de voz e telefone) e no funcionamento de máquinas (máquina de lavar roupa e máquina de moer café).
Registros de representação	<ul style="list-style-type: none"> - Registros de representações verbais, algébricas, numéricas, por diagramas de flechas, pictóricas, tabulares e gráficas.
Procedimentos	<ul style="list-style-type: none"> - Como determinar a pré-imagem de uma função através de uma equação; - Como encontrar a imagem de uma função através da substituição de variáveis na lei de formação ($y = f(x)$) e por estimativas; - Como formar pares ordenados mantendo a ordem (pré-imagem, imagem); - Como determinar o gráfico de funções com o domínio finito através da localização das coordenadas no plano cartesiano; - Realizar o teste de linha vertical para verificar se os gráficos dados definem uma função.

Fonte: Produzido pelos autores (2022)

Destacam-se também as relações estabelecidas entre o diagrama de flechas, a representação tabular e a representação gráfica feita pelo professor, analisados no artigo A05, e entre as representações algébricas formais e pictóricas, feitas por Arturo no artigo A06. Tais relações são vistas como pontos fortes de aprendizagem dos estudantes (ARAUJO, 2018).

Quanto aos procedimentos, aparecem os conhecimentos dos professores sobre como determinar a imagem e a pré-imagem, como formar pares ordenados e como determinar o gráfico de uma função de domínio finito através da localização das coordenadas no plano cartesiano. Também o conhecimento do teste de linha vertical para verificar se um gráfico define uma função.

5 Considerações finais

Realizamos neste trabalho uma análise do Conhecimento dos Tópicos Matemáticos (KoT) para o ensino de funções na Educação Básica, o qual está presente em produções científicas indexadas na *Web Of Science* no período de 2015 a 2020. Os resultados apontam indícios e evidências de conhecimento especializado em todas as categorias do subdomínio em questão.

Destacam-se os conhecimentos referentes à categoria de Fenomenologias e aplicações que, através das contextualizações das aplicações dos conceitos de função, possibilitaram a introdução dos conceitos de variáveis dependente e independente, domínio, contradomínio, imagem e pré-imagem, que, por sua vez, contribuíram para que haja melhor compreensão das propriedades e definições de funções. Além disso, tais contextualizações possibilitaram as relações entre os diferentes registros de representações. Observa-se também que o uso do diagrama de flechas serviu como base para representar a relação entre domínio e contradomínio, e que as representações algébricas foram utilizadas como ponte para que os professores ensinassem os estudantes um procedimento para determinar a imagem e a pré-imagem de uma função através da equação $y = f(x)$.

Tais resultados contribuem com o avanço da compreensão sobre o conhecimento docente para o ensino de funções na Educação Básica e para o Conhecimento Especializado de Professores de Matemática (MTSK). Os resultados apresentados podem interessar a pesquisadores da área da educação matemática e a professores em formação inicial e/ou continuada, que podem utilizar os conhecimentos identificados ou não como reflexão sobre a prática de ensino visando melhorias no ensino de funções na Educação Básica. Podem interessar também a professores formadores que podem auxiliar futuros professores a explorar as diferentes categorias do Conhecimento dos Tópicos Matemáticos (KoT).

Uma das limitações desta pesquisa é a mão de obra para analisar toda a

produção científica sobre a temática em questão. Em estudos futuros, pretende-se avançar na análise do conhecimento especializado de professores de Matemática em relação a outros subdomínios do MTSK, bem como avançar nas conexões existentes entre eles.

Referências

ARAUJO, W. R. D. **Conhecimento especializado do professor de matemática sobre função no contexto de uma experiência prévia de lesson study**. 2018. 130f. Dissertação (Mestrado em Educação) - Universidade Estadual de Campinas, Campinas.

ARDENGI, M. J. **Ensino e aprendizagem do conceito de função: pesquisas realizadas no período de 1970 a 2005 no Brasil**. 2011. 182f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo.

BENEDITO, L. A. B.; BERNARDES, A. Ensino de funções e as metarregras do discurso: refletindo sobre a definição atual de função a partir de algumas definições históricas. **Revista De História Da Educação Matemática**, São Paulo, v. 5, n. 2, p. 76-99, out. 2019.

BOGDAN, R. C.; BIKLEN, S. K. **Investigação qualitativa em educação: uma introdução à teoria e aos métodos**. Porto/Portugal: Porto Editora, 1994.

CARRILLO, J.; CONTRERAS, L. C.; CLIMENT, N.; ESCUDERO-ÁVILA, D.; FLORES-MEDRANO, E.; MONTES, M. Á. (Org.). **Un marco teórico para el Conocimiento especializado del Profesor de Matemáticas**. Huelva: Universidad de Huelva Publicaciones, 2014.

CARRILLO-YAÑEZ, J.; CLIMENT, N.; MONTES, M.; CONTRERAS, L. C.; FLORES-MEDRANO, E.; ESCUDEDRO-ÁVILA, D.; VASCO, D.; ROJAS, N.; FLORES, P.; AGUILAR-GONZÁLES, A.; RIBEIRO, M.; MUÑOZ-CATALÁN, M. C. The mathematics teacher's specialised knowledge (MTSK) model*. **Research in Mathematics Education**, v. 20, n. 3, p. 236–253, set. 2018.

CASSIMIRO, S. R. S.; ALENCAR, E. S.; FLOR, A. S.; SILVA, G. G. A. O conhecimento especializado do professor que ensina medidas de tempo na Educação Infantil: um caso formativo. **Revista de Ensino de Ciências e Matemática**, São Paulo, v. 12, n. 6, p. 1-25, out./dez. 2021.

ESPINOZA-VÁSQUEZ, G.; VERDUGO-HERNÁNDEZ, P.; ZAKARAYAN, D.; CARRILLO, J.; MONTOYA-DELGADILLO, E. Hacia una relación entre el ETM y el MTSK a través del concepto de función. In: INVESTIGACIÓN EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA XX, 2016, Málaga. **Anais do XX SEIEM**. Málaga: Facultad de Ciencias de la Educación Universidad de Málaga, 2016, p. 197-206.

ESPINOZA-VÁSQUEZ, G.; ZAKARYAN, D.; CARRILLO YAÑEZ, J. El conocimiento especializado del profesor de matemáticas en el uso de la analogía en la enseñanza del concepto de función. **Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática**

Educativa, v. 21, n. 3, p. 301–324, nov. 2018.

ESPINOZA-VÁSQUEZ, G.; ZAKARYAN, D.; YAÑEZ, J. C. Use of analogies in teaching the concept of function: Relation between knowledge of topics and knowledge of mathematics teaching. **CERME**, Dublin, v. 10, p. 3288-3295, fev. 2017.

FIORENTINI, D.; NACRATO, A. M.; LOPES, C. S.; FREITAS, M.T.M.; MISKULIN, R. G. S. Formação de professores que ensinam matemática: um balanço de 25 anos da pesquisa brasileira. **Educação em Revista**, Belo Horizonte, n. 36, p. 137-160, dez. 2002.

GUMIERO, B. S.; PAZUCH, V. Knowledge Quartet: dimensões, pesquisas e reflexões sobre o conhecimento profissional do professor que ensina matemática. **Bolema**, Rio Claro, v. 34, n. 66, p. 268-293, abr. 2020.

HATISARU, V.; ERBAS, A. K. Mathematical Knowledge for Teaching the Function Concept and Student Learning Outcomes. **International Journal of Science and Mathematics Education**, v. 15, n. 4, p. 703–722, abr. 2017.

JUSTULIN, A. M.; PEREIRA, F. F.; FERREIRA, A. D. S. Representação gráfica de funções: uma análise das principais dificuldades de alunos do ensino médio. **Revista de Ensino de Ciências e Matemática**, São Paulo, v. 10, n. 6, p. 301–318, dez. 2019.

KOHL-SANTOS, P.; MOROSINI, M. C. O revistar da metodologia do estado do conhecimento para além de uma revisão bibliográfica. **Revista panorâmica**, v. 33, p.123-145, maio/ago. 2021.

LIMA, L. **A aprendizagem significativa do conceito de função na formação inicial do professor de matemática**. 2008. 157f. Dissertação (Mestrado em Educação) - Universidade Federal do Ceará, Fortaleza.

MCCRORY, R.; FLODEN, R.; FERRINI-MUNDY, J.; RECKASE, M. D.; SENK, S. L. Knowledge of Algebra for Teaching: A Framework of Knowledge and Practices. **Journal for Research in Mathematics Education**, v. 43, n. 5, p. 584–615, nov. 2012.

MORIEL JUNIOR, J. G. **Conhecimento especializado para ensinar divisão de frações**. 2014. 147f. Tese (Doutorado em Educação em Ciências e Matemática) - Rede Amazônica de Educação em Ciências e Matemática, Cuiabá.

MORIEL JUNIOR, J. G. Rede de Conhecimentos Especializados Ativados em Formação Docente para Responder a um Porquê Matemático sobre Divisão de Frações. **Acta Sci**, Canoas, v. 23 n.1, p. 193-224, mar./abr. 2021.

MORIEL JUNIOR, J. G.; ALENCAR, E. S. Pesquisa e formação docente com MTSK em Mato Grosso e Mato Grosso do Sul. **Research, Society and Development**, Curitiba, v. 5, n. 7, p. 7687-7702, jul. 2019.

MORIEL-JUNIOR, J. G.; CARRILLO, J. Explorando indícios de conhecimento especializado para ensinar Matemática com o modelo MTSK. In: INVESTIGACIÓN EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA XVIII, 2016, Málaga. **Anais do XVIII SEIEM**. Salamanca: SEIEM, 2014, p. 465–474.

PAZUCH, V.; RIBEIRO, A. J. Conhecimento profissional de professores de matemática e o conceito de função: uma revisão de literatura Professional knowledge of mathematics teachers and the concept of function: a literature review. **Educação Matemática Pesquisa**, São Paulo, v. 19, n. 1, p. 465-496, abr. 2017.

REZENDE, W. M. O conhecimento do professor de matemática sobre funções reais. In: XIII CONFERÊNCIA INTERAMERICANA DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, Recife. **Anais do XIII CIAEM-IACME**, Recife: CIAEM-IACME, 2011, p. 1–10.

RODRÍGUEZ-FLORES, A.; PICADO-ALFARO, M.; ESPINOZA-GONZÁLES, J.; ROJAS-GONZÁLEZ, N.; FLORES-MARTÍNEZ, P. Conocimiento común del contenido que manifiesta un profesor al enseñar los conceptos básicos de funciones: un estudio de caso. **Uniciencia**, v. 30, n. 1, jan. 2016.

RODRÍGUEZ-FLORES, A.; PICADO-ALFARO, M.; ESPINOZA-GONZÁLES, J.; ROJAS-GONZÁLEZ, N. El conocimiento especializado de un profesor de matemáticas: Un estudio de caso sobre la enseñanza de los conceptos básicos de función. **Uniciencia**, v. 32, n. 1, p. 89-107, jan. 2018.

ROMANOWSKI, J. P.; ENS, R. T. As pesquisas denominadas do tipo “estado da arte” em educação. **Revista Diálogo Educacional**, Curitiba, v. 6, n.19, p. 37-50, set./dez. 2006.

SANTOS DE SOUZA, J. S.; SOUZA, L. D. O. A definição de função: operacionalizar para articular e articular para compreender. **Alexandria: Revista de Educação em Ciência e Tecnologia**, Florianópolis, v. 11, n. 1, p. 125–148, mai. 2018.

SOUZA, R. P. D. **A construção do conceito de função através de atividades baseadas em situações do dia a dia**. 2016. 99f. Dissertação (Mestrado em Matemática) - Universidade Federal de Fluminense, Fluminense.

VILAÇA, M. L. C. Pesquisa e Ensino. **E-escrita**, Nilópolis, v. 1, n. 2, maio/ago. 2010.