Recebido: 07/03/2022 ■ Aprovado: 01/08/2022 ■ Publicado: 06/09/2022

RENCIMA Revista de Ensino de Ciências e Matemática
eISSN 2179-426X
10.26843/rencima.v13n4a30

A constituição do conhecimento matemático com a Investigação Matemática no Ensino Superior

Paulo Wichnoski[1]

Resumo: Este artigo enfoca a constituição do conhecimento matemático de alunos de um curso de licenciatura em matemática, que estiveram com a Investigação Matemática. Os dados foram construídos com aquilo que esses sujeitos expressaram da vivência por meio da linguagem escrita, de desenhos e de símbolos matemáticos, registrados em relatórios de aula, e com a linguagem falada, gravada e transcrita. Com a postura fenomenológica-hermenêutica, a constituição do conhecimento matemático pôde ser compreendida em duas regiões de convergências. A primeira diz dos conhecimentos matemáticos constituídos, quais sejam: função, taxa de variação, sequência numérica e progressão aritmética; e a segunda diz dos modos constituintes, os quais se revelaram movimentos iniciados com a mobilização do já sabido, avançando na direção do que poderia emergir. Esses movimentos foram se fazendo com aspectos do fazer matemático da tradição, sem ser, por ele, condicionados, mas orientados pelas escolhas dos sujeitos da vivência.

Palavras-chave: Filosofia da Educação Matemática. Fenomenologia. Prática de Ensino.

The constitution of mathematical knowledge with Mathematical Investigation in Higher Education

Abstract: This article focasses no lhe constitutivo off matemática knowledge off students off an undergraduate course in mathematics, who were with lhe Mathematical Investigation. The data were constructed with what these individuals expressed from their experience through written language, drawings and matemática symbols, recorded in class reports, and with spoken language, recorded and transcribed. With lhe phenomenological-hermeneutic posture, lhe constitutivo off matemática knowledge could be understood in two regions off convergence. The first refers to lhe constituted matemática knowledge, which are: function, rate off change, number sequence, and arithmetic progression; and lhe second refers to lhe constitutive modes, which revealed themselves as movements beginning with lhe mobilization off what was already known, moving towards what could emerge. These movements were made with aspects off lhe matemática tradition, without being conditioned by it, but guided by lhe choices off lhe participants off lhe experience.

Keywords: Philosophy of Mathematics Education. Phenomenology. Teaching Practice.

La constitución del saber matemático con la Investigación Matemática en la Educación Superior

***Resumen*:** Este artículo se centra en la constitución del conocimiento matemático de los estudiantes de una carrera de grado en matemáticas, que se dedicaban a la Investigación Matemática. Los datos fueron construidos con lo expresado por estos sujetos a partir de su experiencia a través del lenguaje escrito, dibujos y símbolos

[1] Doutor em Educação em Ciências e Educação Matemática. Professor do Departamento de Matemática da Universidade Estadual do Centro-Oeste (UNICENTRO). Paraná, Brasil. ✉ wichnoski@gmail.com https://orcid.org/0000-0003-1183-0897.

matemáticos, registrados en los informes de clase, y con el lenguaje hablado, grabado y transcrito. Con la postura fenomenológico-hermenéutica, la constitución del conocimiento matemático podría entenderse en dos regiones de convergencia. La primera trata del conocimiento matemático constituido, a saber: función, razón de cambio, secuencia numérica y progresión aritmética; y la segunda dice sobre los modos constituyentes, que revelan movimientos que parten de la movilización de lo ya conocido, avanzando en la dirección de lo que podría emerger. Estos movimientos se hicieron con aspectos de la práctica matemática de la tradición, sin estar condicionados por ella, sino guiados por las elecciones de los sujetos de la experiencia.

Palabras clave: Filosofía de la Educación Matemática. Fenomenología. Práctica Docente.

1 Introdução

Ao estar no mundo, o lugar que o sujeito ocupa é sempre compartilhado com os outros, e pelo movimento de abertura para o outro e para o próprio mundo, ele compreende-se e compreende-o com as relações que estabelece intersubjetivamente. Porém, ao ser um, este sujeito é singular e, portanto, autêntico, o que implica dizer que a compreensão do mundo também se dá mediada pela subjetividade. Nessa espacialidade mundana, a ele é dada a possibilidade de agir e constituir[2] conhecimentos, porque como nos diz Heidegger (2015, p. 108), "o conhecer em si mesmo se funda previamente num já-ser-junto-ao-mundo", ou seja, conhecer é um modo ontológico de ser no mundo. Esse modo de compreender a constituição do conhecimento é fenomenológico, e dessa perspectiva, o conhecer só é possível "pela percepção, pela vivência do sujeito que é no mundo com os outros (seres ou objetos), pelos atos reflexivos que são favorecidos pela disposição" (PAULO; FIRME; TONÉIS, 2019 p. 25-26).

A sala de aula é um espaço epistemológico de constituição do conhecimento, e o movimento de conhecer e constituir conhecimento matemático nesse espaço tem sido foco de interesse na Educação Matemática, a exemplo das pesquisas de Mondini, Mocrosky e Paulo (2018); Rosa e Bicudo (2018) e Barbosa (2012). Mondini, Mocrosky e Paulo (2018) interrogaram as possibilidades de constituição de conhecimentos relativos ao Cálculo Diferencial e Integral I, buscando compreender o sentido do constituído pelos alunos com um *software* de geometria dinâmica.

[2] Opto pela palavra *constituição* ao invés de *produção* porque, com Rosa e Bicudo (2018), compreendo que *constituição* diz da articulação dos aspectos percebidos, sentidos e compreendidos com o corpo-encarnado e, por ele próprio, articulados no movimento que constitui e expressa compreensões, enquanto *produção* diz da objetividade das compreensões expressas intersubjetivamente.

Rosa e Bicudo (2018) enfocaram a constituição do conhecimento matemático com as tecnologias digitais, expondo compreensões sobre os modos pelos quais esse conhecimento pode ser constituído, nesse contexto. E, Barbosa (2012), também enfocou a constituição do conhecimento matemático com as tecnologias digitais, especificamente o conhecimento de função composta e a regra da cadeia com uma abordagem gráfica.

Considerando que a Educação Matemática advoga para que o ensino de matemática aconteça com situações que oportunizam, além da aprendizagem do conteúdo, o saber pensar, e que a Investigação Matemática na Educação Matemática pode contribuir para isso, tenho desenvolvido ações pedagógicas nessa direção. Em uma delas, ao estar com oito alunos de um curso de licenciatura em matemática, propus uma tarefa de Investigação Matemática e a eles solicitei que, com a atividade que se desencadeava, expressassem *o que* faziam, *como* faziam e *por quê* faziam, ou seja, que se voltassem atentivamente para a vivência de modo que lhes fosse possível falar sobre o feito, no sentido de contar, conversar e dialogar. Essa vivência se mostrou tão exitosa, a ponto de incitar reflexões para além daquelas provenientes da atitude naturalística, constituindo-se solo de pesquisa.

A vivência que aqui está sendo referida, diz daquilo que com a Investigação Matemática foi experienciado, e que ao ser colocado em foco, possibilitou a tomada de ciência do vivenciado, avançando reflexivamente na direção ontológica. Nesse sentido, ela se constitui realidade epistemológica e nesse trabalho se doa à compreensão com a fenomenologia-hermenêutica. Olhando intencionalmente para as possibilidades de constituição do conhecimento matemático com a Investigação Matemática, interrogo: *o que se revela sobre a constituição do conhecimento matemático de futuros professores de matemática, ao estarem com a Investigação Matemática?*

Interessar-se por aquilo que os alunos expressam em sala de aula permite perceber o dito; o não dito, mas intencionado; o não sistematizado, mas inferido; enfim, permite perceber sutilezas que fornecem indícios de modos de pensar e constituir conhecimento, por vezes, escondidos em uma anotação rascunhada ou em uma fala pré-predicativa. Portanto, esse trabalho é pertinente.

Com essa introdução, que enceta o texto e traz o panorama da pesquisa, apresento, na próxima seção, o modo como compreendo a Investigação Matemática na Educação Matemática e que norteou a minha postura docente nessa vivência.

2 A Investigação Matemática na Educação Matemática

Ponte, Brocado e Oliveira (2013) sistematizam o trabalho com a Investigação Matemática na Educação Matemática inspirados no trabalho do pesquisador em matemática, o qual se lança na tentativa da constituir conhecimento matemático novo com um processo amparado, essencialmente, em conjecturas, testes, generalizações e demonstrações. Para esses autores, é possível que a atividade do aluno em sala de aula aconteça sob a mesma esquematização epistemológica.

Quando inserida no contexto da Educação Matemática, compreendo que a Investigação Matemática deixa de ser apenas uma ação de busca por relações entre entes matemáticos e passa a ter relações com o ensino, com a aprendizagem e com a comunicação concernente a esses entes, acolhendo a dimensão subjetiva e intersubjetiva. Assim, ela se assenta em um ambiente enxertado de valores, ideias, crenças, práticas e teorias que, quando compartilhados no coletivo de sala de aula, interferem no ver (na compreensão) dos estudantes.

Em virtude deste entendimento, ela pode ser um veículo de disseminação do fazer dos matemáticos, mas sem um apelo direto ou explícito a ele, de modo que a afinidade dos alunos com o pensar matematicamente seja desenvolvida com e a partir dos seus modos subjetivos e intersubjetivos de fazer matemática. Portanto,

> o potencial da Investigação Matemática na Educação Matemática é permitir a *pro-dução* do conhecimento matemático como um fazer de possibilidades que conduz ao devir, em sintonia com o modo de ser das coisas. Mas, para isso ela precisa se reinventar, se distanciar da epistemologia do fazer Matemática do matemático e se constituir em um modo de ensinar em que professores e alunos *pro-duzam* Matemática com suas próprias mãos e em seus autênticos modos de ser um sujeito investigador. (WICHNOSKI, 2021, p. 190)

Assim, a Investigação Matemática na Educação Matemática pode ser compreendida como um modo de fazer matemática amparado, essencialmente, nos modos de ser dos alunos, enquanto sujeitos que se constituem temporal e historicamente, sempre juntos com o mundo. Nesse sentido, há certa liberdade para o aluno se lançar na atividade e com ela viver a experiência investigativa própria e não como imitação da experiência do matemático, ainda que por ela possa estar circunstanciado.

REnCiMa, São Paulo, v. 13, n. 4, p. 1-21, jul./set. 2022

A potencialidade da Investigação Matemática na Educação Matemática está no processo investigativo disparado pela tarefa e que se desencadeia com a atividade, de modo que o objetivo não é encontrar um resultado para a tarefa proposta, mas tão somente abrir possibilidades que permitam aos alunos compreendê-la em perspectivas. Com isso, pode-se distanciar da reprodutividade que, não rara, caracteriza o ensino de matemática, e exercitar o *pensar sobre* autônomo*.*

Considerando que o professor é quem planeja e orienta as ações de ensino, compreendo que a vivência de momentos investigativos é um aspecto a ser considerado no momento do planejamento do seu trabalho e incorporado à sua prática docente. Pontuo que o verbo *oportunizar* é sinônimo de "favorecer, facultar, permitir, possibilitar, propiciar, proporcionar" (FERREIRA, 2010) e, assim, o entendo como um convite que, em última instância, precisa ser aceito, ou seja, a realização de uma Investigação Matemática depende da intencionalidade e do envolvimento do professor e dos alunos; requer disponibilidade daqueles que, com ela, se colocam a ensinar e a aprender.

3 A metodologia e os procedimentos da pesquisa

Na seara das pesquisas qualitativas, há diversos modos de se colocar em investigação com aquilo que se logra compreender. Dessa diversidade, assumi o modo fenomenológico-hermenêutico para estar com essa pesquisa, não só como guiador dos procedimentos, mas, também, como uma atitude, como uma maneira de *ser-com* o investigado.

O *ser-com* diz da constituição do Ser *junto ao* e *no* mundo, cuja existência é sempre partilhada com o outro (*com-partilhada)*, sujeito encarnado ou não, que vem ao encontro do eu. Como nos diz Heidegger (2015), "todo ser é sempre ser-com; mesmo na solidão e isolamento, a presença é sempre copresença (*Mitdasein*), o mundo é sempre mundo compartilhado (*Mitwelt*), o viver é sempre convivência (*Miteinandersein*)" (p. 571). Portanto, o *ser-com* determina um modo existencial de ser no mundo e, neste texto, diz do modo (fenomenológico-hermenêutico) de ser do seu autor com o fenômeno interrogado, vivido *junto ao* e *no* mundo onde se encontra, inevitavelmente, o outro, cujas relações *eu-outro* são determinadas pelo *com*.

Ao dizer que esse modo de pesquisar é *atitude*, se expõem uma compreensão que vai além dos aspectos procedimentais relativos ao *como* fazer pesquisa; se

REnCiMa, São Paulo, v. 13, n. 4, p. 1-21, jul./set. 2022

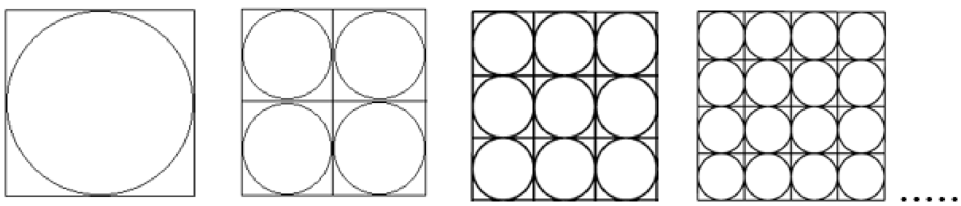
expõem uma *postura*, um “modo de pensar e agir” (FERREIRA, 2010, p. 602) junto ao mundo, que traz uma concepção própria de realidade, de conhecimento e do próprio mundo; cuja primazia é a *intencionalidade*, entendida como um movimento atento de expansão consciente para o mundo.

Esse modo de pensar e agir é filosófico e, como tal, interroga, reflete e nunca toma o investigado como objetivamente dado no vasto campo de interesse em que a pesquisa se insere, mas o toma como *coisa percebida*, isto é, como aquilo que dele se mostra e pode ser compreendido com toda carnalidade do corpo-próprio. Por assim ser, o interrogado é visto como um *fenômeno* e pode ser compreendido qualitativamente. Segundo Bicudo (2011), o caráter qualitativo da pesquisa fenomenológica “advém das vivências percebidas e expressas, as quais carregam consigo, já em sua estrutura, a hermenêutica, na medida em que se autointerpreta e dá-se, pela linguagem, à interpretação” (p. 37-38). Considerando essa premissa, valho-me da hermenêutica para a interpretação dos dados, não como uma técnica de interpretação, mas como uma busca transcendental da objetividade linguística do texto, entrelaçando-o histórica a temporalmente com a minha experiência vivida.

O ponto de partida da pesquisa aqui relatada é a vivência de oito alunos de um curso de licenciatura em matemática, doravante denominados de *sujeitos significativos*, com a Investigação Matemática disparada pela tarefa exposta no Quadro 1, em 3 aulas com 50 minutos de duração cada uma e sincronizadas remotamente.

Quadro 1: Tarefa de Investigação Matemática proposta

Investigue as figuras abaixo. As regiões limitadas pelos quadrados maiores possuem 1cm de lado.



Fonte: adaptada de Wichnoski e Klüber (2018)

Enquanto professor que estive junto aos sujeitos significativos na vivência aqui enfocada, tomei o cuidado para interferir minimamente na atividade, uma vez que me interessava por aquilo que se mostraria sobre a constituição do conhecimento matemático ao estarem, esses sujeitos, com a Investigação Matemática, e por entender que interferências incisivas poderiam se configurar em direcionamentos tendenciosos. Ao dizer isso, me refiro às interferências imediatas no momento da

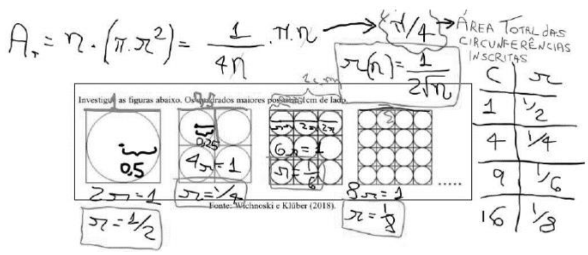
REnCiMa, São Paulo, v. 13, n. 4, p. 1-21, jul./set. 2022

vivência, pois, conforme disse ao iniciar esse texto, o mundo é sempre compartilhado com os outros, e dessa assertiva, ao ser no mundo um professor junto aos sujeitos significativos dessa pesquisa, com eles estou em estado de interdependência, e por assim ser, interfiro.

No contexto desta pesquisa, a vivência com a Investigação Matemática foi expressa com a linguagem escrita, com desenhos, com símbolos matemáticos e/ou com a linguagem falada (gravada e transcrita). Considerando essa pluralidade de linguagens, olhei para esses modos de expressão como uma *composição*, no sentido de ser *um texto composto* (FERREIRA, 2010) com diferentes linguagens e, também, como uma constituição dinâmica que "coloca em funcionamento o que veio à mente no processo de pensar cuidadosamente, [...] que se realiza em um combinar que se revelou, que aconteceu no movimento do pensar" (SOUZA, 2020, p. 46).

Com essas composições foram constituídas as asserções articuladas, as quais expuseram o percebido pelo pesquisador, ao articular o escrito nas anotações com as explicações orais dos sujeitos significativos, com o cuidado de não alterar o que elas expressaram, uma vez que esse momento visou apenas a descrição daquilo que foi percebido, não cabendo julgamentos interpretativos (BICUDO, 2011). Com as asserções articuladas, foram constituídas as unidades de significados, entendidas como frases que expressaram os aspectos relevantes à interrogação de pesquisa. O Quadro 2 apresenta um exemplo desse movimento.

Quadro 2: Das composições à constituição das unidades de significado: um exemplo

Composição	Asserção articulada	Unidades de significado
 **Sujeito 1:** Ah, a primeira coisa que eu pensei foi sobre o raio professor. Então... é, por exemplo, no primeiro círculo como o lado do quadrado é 1, você teria duas vezes o raio igual a 1, aí o raio seria zero vírgula cinco. E daí, você sabendo o	A primeira coisa que o sujeito afirma ter pensado foi sobre o raio dos círculos. Para ele, sabendo a medida do raio é possivel calcular a área e o perímetro. A partir da percepção de que os círculos vão diminuindo de tamanho conforme a divisão do quadrado maior, o sujeito pensou em contar o número de círculos em cada caso e saber qual é o respectivo raio,	O sujeito afirmou ter pensado sobre o raio dos círculos. (1.1[3]) O sujeito afirmou que, sabendo a medida do raio, é possível calcular a área e o perímetro dos círculos. (1.2) O sujeito teve a percepção de que o tamanho dos

[3] Lido da direita para a esquerda, este código refere-se à primeira unidade de significado do sujeito 1, assim nomeado aleatoriamente. O código 1.2 refere-se à segunda unidade de significado do sujeito 1 e, analogamente, para os oito sujeitos significativos da pesquisa. Esses códigos serão utilizados para referenciar, ao longo da interpretação, as unidades de significado contidas no Quadro 3.

Composição	Asserção articulada	Unidades de significado
raio, você pode calcular tanto a área quanto o perímetro. Como os círculos, eles vão meio que diminuindo de tamanho conforme você vai dividindo o quadrado, eu pensei, basicamente, em você contar quantos círculos têm, por exemplo, têm nove círculos e saber qual é o raio de cada círculo. E aí você sabendo o raio, você consegue calcular o perímetro e a área de cada círculo. [...] Ah, eu coloquei o número de círculos e daí eu fiz uma tabela com o raio. Eu coloquei que com 1 círculo o raio dá meio; com quatro círculos o raio dá um quarto; com nove círculos o raio dá um sexto e com dezesseis círculos o raio dá um oitavo. **Professor:** E aí? **Sujeito 1:** E daí... na verdade foi mais por lógica do que por cálculo, mas eu achei que o raio em função do número de círculos é, um sobre dois, raiz de *n*, em que *n* é o número de círculos. **Professor:** Tá, então... duas vezes a raiz de *n*, é isso? **Sujeito 1:** Sim, um sobre duas vezes raiz de *n*. E daí, por exemplo, ali, na segunda figura, você tem quatro círculos, eu colocaria quatro... ficaria raiz de quatro que é dois... dois vezes dois quatro, aí ficaria um sobre quatro, que é o raio de cada círculo. [...] **Sujeito 1:** Eu cheguei a uma conclusão, mas não sei se vai estar certa. Então... eu tinha achado como achar o raio, sabendo o número total de círculos. Aí, eu achei que a área total de todos os círculos que compõem uma figura é o número de círculos vezes *pi r* ao quadrado que é a área de um círculo. Então, por exemplo, na primeira figura você tem um círculo, então seria um vezes *pi r* ao quadrado; na segunda figura você tem quatro círculos, então seria quatro vezes *pi r* ao quadrado e que o *r* é o raio de cada circulozinho. Então, como eu achei o raio de cada circulozinho como sendo um sobre dois vezes raiz de *n*, eu substituí ali nessa fórmula. Então eu achei que a área total é *n* vezes o *pi* que multiplica um, sobre dois raiz de *n* ao quadrado. E daí, fazendo um sobre dois raiz de *n* ao quadrado, ficaria quatro *n*, aí ficaria n vezes *pi* sobre quatro *n*, aí você cancela os *n's*, e aí ficaria *pi* sobre quatro. Isso quer dizer que a área total, ou seja, pegando a área de todos os circulozinhos e somando, sempre vai chegar em *pi* sobre quatro.	de modo a conseguir calcular o perímetro e a área de cada círculo. Ao fazer uma tabela com o número de círculos e a medida dos respectivos raios, o sujeito percebe que se a figura tiver 1 círculo, a medida do raio desse círculo é $\frac{1}{2}$; para quatro círculos a medida do raio de cada círculo é $\frac{1}{4}$; para nove círculos a medida do raio de cada círculo é $\frac{1}{6}$ e, para dezesseis círculos, a medida do raio de cada círculo é $\frac{1}{8}$. Mais por lógica do que por cálculo, o sujeito diz que achou a medida do raio dos círculos em função do número de círculos em cada figura e expressa esse achado como $\frac{1}{2.\sqrt{n}}$, em que n representa o número de círculos. Outra conclusão que o sujeito expressa ter chegado é sobre ter achado a área total de todos os círculos que compõem uma figura como sendo $A_T = n.(\pi.r^2)$, em que n número de círculos e $\pi.r^2$ é a área de um círculo de raio r. Ao substituir $\frac{1}{2.\sqrt{n}}$, que é o raio achado para cada círculo, na fórmula $$A_T = n.(\pi.r^2),$$ o sujeito achou que $$A_T = n.\left(\pi.\left(\frac{1}{2.\sqrt{n}}\right)^2\right) = n.\frac{\pi}{4n} = \frac{\pi}{4},$$ e concluiu que a soma das áreas de todos os círculos, sempre vai chegar em $\frac{\pi}{4}$.	círculos diminui. (1.3) O sujeito conta o número de círculos e, sabendo a medida dos respectivos raios, calcula a área e o perímetro. (1.4) O sujeito faz uma tabela com o número de círculos e a medida dos respectivos raios. (1.5) O sujeito percebeu uma relação entre o número de círculos e a medida dos respectivos raios. (1.6) Mais por lógica do que por cálculo, o sujeito achou a medida do raio dos círculos em função do número de círculos em cada figura. (1.7) O sujeito expressou, em linguagem algébrica, a medida do raio dos círculos em função do número de círculos em cada figura, como $\frac{1}{2\sqrt{n}}$. (1.8) O sujeito expressou, em linguagem algébrica, a soma das áreas dos círculos que compõem uma figura. (1.9) O sujeito expressou, em linguagem algébrica, a soma das áreas dos círculos que compõem as

REnCiMa, São Paulo, v. 13, n. 4, p. 1-21, jul./set. 2022

Composição	Asserção articulada	Unidades de significado
		figuras. (1.10) O sujeito concluiu que a soma das áreas dos círculos que compõem as figuras sempre vai chegar em $\frac{\pi}{4}$. (1.11)

Fonte: o autor

O movimento exemplificado no Quadro 2 foi realizado com as composições relativas aos oito sujeitos significativos da pesquisa, com o qual 44 unidades de significado foram construídas e seguem apresentadas[4] no Quadro 3.

Quadro 3: Unidades de significado da pesquisa

O sujeito estabeleceu uma relação entre o diâmetro dos círculos e as áreas dos quadrados menores. (2.1)
O sujeito notou que o diâmetro do círculo que compõem as figuras são 1 cm, $\frac{1}{2}$ cm, $\frac{1}{3}$ cm e $\frac{1}{4}$ cm. (2.2)
O sujeito concluiu, por aquilo que chama de indução, que a medida do diâmetro dos círculos de cada figura segue uma ordem. (2.3)
O sujeito notou que a soma das áreas dos quadrados menores em cada figura é, respectivamente, 1, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{9}$. (2.4)
A partir de casos particulares, o sujeito supôs que a área dos quadrados menores vai ter uma relação com o diâmetro dos círculos neles inscritos. (2.5)
O sujeito representa $\frac{1}{4}$ como $\frac{1}{2^2}$. (2.6)
Ao analisar as três primeiras figuras, o sujeito percebe a relação entre o diâmetro dos círculos com as áreas dos quadrados menores e a expressa em linguagem algébrica. (2.7)
Analisando as três primeiras figuras, o sujeito pensou sobre a soma das áreas dos círculos em cada figura e a expressou em linguagem matemática. (2.8)
Com os casos particulares, o sujeito expressa uma relação e, em seguida, se dá conta de que a expressou incorretamente, corrigindo-a. (2.9)
O sujeito representa $0{,}5$ como $\frac{1}{2}$, e $0{,}3$ como $\frac{1}{3}$. (3.1)
A medida dos lados dos quadradinhos, vista em casos particulares, permite o sujeito chegar na relação $\frac{1}{n}$, em que n é a posição que a figura ocupa na sequência. (3.2)
O sujeito constrói uma sequência numérica para representar o número de círculos em cada figura. (3.3)
O sujeito constrói uma nova sequência numérica, a partir da diferença entre os elementos da sequência que representa o número de círculos em cada figura. (3.4)
O sujeito constrói uma nova sequência, a partir da diferença entre os elementos da sequência que representa a diferença entre os elementos da sequência que representa o número de círculos em cada figura, e vê que essa diferença é constante. (3.5)
O sujeito pensou sobre o aumento do número de círculos de acordo com a posição da figura. (4.1)
O sujeito representa o número 4 como 2^2, e o número 9 como 3^2. (4.2)
Relacionando o número de círculos contidos na primeira, na segunda e na terceira figura,

[4] As unidades de significado relativas ao sujeito S1 estão apresentadas no Quadro 2 e, por isso, não aparecem no Quadro 3.

respectivamente, o sujeito concluiu que a quantidade de círculos dispostos na figura que ocupa a posição n, é n^2. (4.3)
O sujeito fez uma conta envolvendo a diferença entre a área do quadrado maior e a soma das áreas dos círculos, em cada figura. (5.1)
O sujeito diz não ter pensado, ainda, no resultado que vai chegar. (5.2)
O sujeito mostra pensar sobre a área da circunferência na 1 ª figura. (5.3)
O sujeito pensou sobre o número de círculos dentro do quadrado maior. (6.1)
O sujeito percebe que o número de círculos em um dos lados do quadrado maior cresce segundo a progressão aritmética 1, 2, 3, 4.... (6.2)
Para o sujeito S6, a progressão aritmética 1, 2, 3, 4..., significa que o número total de círculos contidos no quadrado maior é o quadrado dos números que compõem essa progressão aritmética. (6.3)
O sujeito pensou exatamente aquilo que S1 comentou. (7.1)
O sujeito diz que fez a conta, mas sem muitos detalhes. (7.2)
Para o sujeito S7, a conta mostrou que, pelo menos para as figuras visíveis no enunciado da tarefa, a soma das áreas dos círculos é constante. (7.3)
Considerando que todos os quadrados maiores têm medida de área igual a 1 cm, o sujeito fez a divisão da área do quadrado maior pela área dos círculos nele contidos, e foi percebendo que a proporção era constante. (7.4)
Ao perceber uma constância na proporção por ele construída, o sujeito refuta sua hipótese inicial, qual seja: a área dos círculos diminui ao longo da sequência de figuras. (7.5)
O sujeito viu acerca da área do quadrado maior. (8.1)
O sujeito calculou o diâmetro das circunferências. (8.2)
O sujeito percebeu uma sequência no número de quadradinhos por linha. (8.3)
O sujeito acha que a sequência 1, 2, 3, 4, que para ele representa o número de quadradinhos por linha, vai seguir com os números 5, 6, aumentando um quadradinho por linha. (8.4)
O sujeito percebeu que a primeira figura tem uma linha, que na segunda figura o número de linhas aumentou 1, que a terceira figura tem três linhas, a quarta figura tem quatro linhas, e acha que essa sequência segue. (8.5)
O sujeito calculou a medida da diagonal do quadrado maior. (8.6)

Fonte: o autor

Com essas unidades, atentei-me aos sentidos expressos e, em sucessivas reduções fenomenológicas[5], agrupei-as de acordo com significados convergentes. Desse movimento emergiram significados que se mostraram invariantes nas diferentes composições e que dizem sobre a constituição do conhecimento matemático dos futuros professores de matemática que estiveram com a Investigação Matemática. Esses significados se entrelaçaram em duas categorias, codificadas como C1 e C2, as quais revelaram os conhecimentos matemáticos constituídos e os modos constituintes, respectivamente. O Quadro 4 expõe o cenário final desse movimento articulador entre as unidades de significado. As unidades destacadas em negrito expressaram significados convergentes à ambas categorias.

[5] A redução fenomenológica abrange a análise ideográfica, que revela os aspectos evidenciados na individualidade de cada unidade de significado, e a análise nomotética, que revela os aspectos que transcendem a individualidade das ideias expressas na análise ideográfica, constituindo-se em ideias estruturais do fenômeno interrogado (BICUDO, 2011).

Quadro 4: Convergência das unidades de significado

Código das unidades de significado	Categorias
1.1 **1.4** **1.6** **1.7** 1.11 **2.1** **2.8** **3.2** 3.3 3.4 3.5 3.6 4.1 **4.3** **5.1** 6.1 **6.2** 6.3 **7.3** **7.4** 8.1 **8.2** **8.3** 8.6	C1 – Sobre os conhecimentos matemáticos constituídos
1.2 1.3 **1.4** 1.5 **1.6** **1.7** 1.8 1.9 1.10 **2.1** 2.2 2.3 2.4 2.5 2.6 2.7 **2.8** 2.9 3.1 **3.2** 4.2 **4.3** **5.1** 5.2 **6.2** 7.1 7.2 **7.3** **7.4** 7.5 **8.2** **8.3** 8.4 8.5	C2 – Sobre os modos constituintes dos conhecimentos matemáticos

Fonte: o autor

Com a intenção de expor os aspectos que com as categorias C1 e C2 se mostraram significativos à compreensão da constituição do conhecimento matemático com a Investigação Matemática, quando tomados à luz de interrogação da pesquisa, construí um texto descritivo; esse é o conteúdo da seção 4.

4 Descrição das Categorias

A categoria C1 diz sobre os conhecimentos matemáticos constituídos pelos sujeitos significativos ao estarem com a Investigação Matemática. Os sujeitos mostraram saber sobre os elementos geométricos raio, diâmetro, diagonal e lado do quadrado (1.1) (2.1) (8.2) (8.6), e os utilizaram para efetuar cálculos, a exemplo do cálculo da área e do perímetro dos círculos, sabendo a medida dos respectivos raios (1.4) (2.8) (5.1) (7.3), e do cálculo da área da região limitada pelo quadrado maior (2.1) (5.1) (7.4) (8.1). Assim, os conhecimentos sobre área e perímetro do círculo e área da região limitada pelo quadrado se mostraram, também, já sabidos pelos sujeitos.

Ao mobilizarem esses conhecimentos, os sujeitos pensaram sobre a soma das áreas dos círculos em cada figura (1.11) (2.8) (5.1) (7.3) (7.4) e concluíram que ela é constante e equivalente a $\frac{\pi}{4}$ cm^2 (1.11) (7.3) (7.4). Além disso, perceberam relações entre o número de círculos e a medida dos respectivos raios (1.6) (1.7), entre o diâmetro dos círculos e as áreas das regiões limitadas pelos quadrados menores (2.1), entre a medida dos lados das regiões limitadas pelos quadrados e a posição da respectiva figura em que se encontram (3.2), entre o número de círculos e a posição da respectiva figura em que se encontram (4.3) (6.1) (6.3), e entre a área da região limitada pelo quadrado maior e a soma das áreas dos círculos nela contidos (5.1) (7.4). Implicitamente, nessas relações, está a ideia base de função, que se mostrou de modo explícito com a unidade de significado (1.7). Com a unidade de significado (7.4) revela-se que, dentre as relações estabelecidas, emergiu, também, conhecimentos sobre proporcionalidade.

REnCiMa, São Paulo, v. 13, n. 4, p. 1-21, jul./set. 2022

Ao perceberem uma relação entre o número de círculos e a posição da respectiva figura em que esses círculos se encontram, os sujeitos construíram uma sequência numérica para representar o número de círculos em cada figura (3.3), definida como sendo o quadrado dos números que compõem a progressão aritmética 1, 2, 3, 4... (6.3). Essa progressão, também foi construída para representar o número de círculos em um dos lados da região limitada pelo quadrado maior (6.2) (8.3) e, com ela, os sujeitos perceberam que o número de círculos em um dos lados dessa região, ao longo da sequência de figuras, é crescente (6.2). Esse aumento no número de círculos foi percebido, também, considerando que a referida progressão aritmética representa a posição das figuras na constituição da sequência (4.1).

A categoria C2 diz sobre os modos constituintes dos conhecimentos matemáticos, os quais se revelaram modos de pensar e de proceder no movimento constituinte das coisas pensadas, experimentados pelos sujeitos. Com ela, revela-se que os conhecimentos matemáticos se constituíram em um movimento fomentado pelo ver, interrogar, calcular, contar, perceber, analisar, representar, relacionar, notar, supor, refutar, generalizar e concluir. Os sujeitos efetuaram cálculos relacionados à área, ao perímetro e ao diâmetro dos círculos, à área das regiões limitadas pelos quadrados, bem como cálculos de diferença e de divisão (1.2) (1.4) (5.1) (7.2) (7.3) (7.4) (8.2). Calcular e contar foram ações realizadas com os casos particulares mostrados nas figuras (2.7) (2.8) (3.2) (4.3) (7.3), permitindo aos sujeitos notar/perceber regularidades e relações (1.3) (1.6) (1.7) (2.2) (2.4) (2.7) (6.2) (7.3) (7.4) (7.5) (8.3) (8.5) e, sobre elas, fazer suposições (2.5) (8.4) (8.5), refutá-las (2.9) (7.5) e tirar conclusões (2.3) (4.3).

Nesse movimento, as suposições e conclusões foram sendo expressas com tabelas (1.5), com diferentes representações matemáticas (2.6) (3.1) (4.2) e, predominantemente, com a linguagem algébrica (1.8) (1.9) (1.10) (2.7) (2.8). Com isso, os sujeitos estabeleceram proposições gerais que generalizaram o pensado (3.2) (4.3). Esse movimento, iniciado com os casos particulares dispostos nas figuras e terminado com o estabelecimento de proposições gerais, foi denominado, por S2, de indução (2.3).

Com a articulação daquilo que foi visto, percebido e descrito nesta seção, efetuei um movimento de reflexão intencional, buscando transcender a descrição e estabelecer compreensões sobre o interrogado com o que se mostrou com o movimento fenomenológico-hermenêutico, com a literatura e com a minha experiência vivida; esse é o conteúdo da seção 5.

5 Metatexto interpretativo

Os conhecimentos matemáticos que se constituíram na vivência com a Investigação Matemática são função, taxa de variação, sequência numérica e progressão aritmética. Os conhecimentos sobre proporcionalidade, raio, diâmetro, diagonal, área, perímetro, círculo e circunferência, se mostraram já constituídos e serviram de aporte ao processo constitutivo de novos conhecimentos, ao serem mobilizados. Isso revela uma interdependência entre os conhecimentos já constituídos e os conhecimentos a serem constituídos, conforme exemplificam as seguintes unidades de significado: *o sujeito achou a medida do raio dos círculos em função do número de círculos em cada figura. (1.7); o sujeito notou que a soma das áreas dos quadrados menores em cada figura é, respectivamente,* $1, \frac{1}{4}, \frac{1}{9}$ *(2.4); o sujeito fez a divisão da área do quadrado maior pela área dos círculos nele contidos, e foi percebendo que a proporção era constante. (7.4)*

A unidade de significado (1.7) revela que a relação entre a medida do raio dos círculos (conhecimento geométrico) e o número de círculos em cada figura (conhecimento numérico) constitui o conhecimento de função, notadamente situado no campo da álgebra. Com a unidade (2.4), revela-se que o conhecimento sobre área (conhecimento geométrico) permitiu ao sujeito construir uma sequência numérica (conhecimento numérico). E, com a unidade (7.4), revela-se que o quociente entre a área da região limitada pelo quadrado maior e a área dos círculos nela contidos (conhecimento geométrico) constituiu o conhecimento de proporção, relativo ao campo numérico. Desse modo, há razões para supor que os conhecimentos matemáticos se constituíram em consonância com uma perspectiva intradisciplinar. O prefixo *intra* significa interior (FEREEIRA, 2010) e, portanto, as relações estabelecidas, ainda que entre áreas específicas, são internas à matemática.

Um olhar atento às unidades de significados mostra que os conhecimentos imediatamente mobilizados (os conhecimentos já constituídos) são, majoritariamente, pertencentes ao campo da geometria (1.1) (2.1) (3.2) (5.1) (8.1). Outros sujeitos, porém, mobilizaram conhecimentos pertencentes ao campo numérico (4.1) (6.1), e outros, mobilizaram conhecimentos pertencentes a ambos (3.3) (8.3). De certo modo, esses conhecimentos estão visíveis na estrutura enunciativa da tarefa, havendo razões para supor que o modo como a tarefa se estrutura direcionou o início da investigação, e deu indícios acerca dos conhecimentos a serem mobilizados.

Todavia, durante a atividade dos sujeitos, os conhecimentos imediatamente mobilizados se mostraram propulsores de outros, como por exemplo, contar o número de círculos em cada figura permitiu construir uma sequência numérica (3.3); contar o número de círculos em um dos lados da região limitada pelo quadrado maior, permitiu construir uma progressão aritmética (6.2); dividir a área da região limitada pelo quadrado maior, pela área dos círculos nela contidos, constituiu uma proporção (7.4); conhecer a medida dos raios dos círculos e a quantidade de círculos em cada figura constituiu uma função (1.7).

Com o exposto, revela-se que, ainda que a estrutura enunciativa da tarefa possa ter influenciado nos conhecimentos matemáticos imediatamente mobilizados, ela não determinou o desfecho da investigação, uma vez que as atividades dos sujeitos tomaram direções que extrapolaram os contextos geométrico e numérico, nos quais os conhecimentos inicialmente mobilizados se inserem; conduzindo-os a avistarem outros conhecimentos e outros contextos, como por exemplo, o algébrico.

Com as unidades de significados (1.5) (1.6) (1.7) (1.8) (1.10) (2.1) (2.5) (2.7) (2.8) (3.2) (4.1) (4.3) (5.1) (6.1) (7.4), revela-se que *perceber, chegar, encontrar* uma relação, que ao se mostrar biunívoca remete à ideia de função, é afirmação recorrente dos sujeitos; e nas unidades de significado relativas ao sujeito S.8 essa afirmação aparece explicitamente. Também recorrente são as afirmações sobre *perceber, achar, construir* uma sequência numérica, conforme mostram as unidades (2.2) (2.3) (2.4) (3.3) (3.4) (3.5) (6.2) (6.3) (8.3) (8.4). A recorrência com que esses conhecimentos matemáticos (função e sequência numérica) foram expressos abre, hermeneuticamente, a pergunta: seriam, esses conhecimentos matemáticos, imanentes à tarefa proposta?

No que tange aos entes geométricos que compõem as figuras da tarefa, algumas unidades de significados mostram que eles foram interpretados como quadrado, círculo e circunferência. Do ponto de vista matemático, os entes *círculo* e *circunferência* são distintos, porém, alguns sujeitos mostraram não se preocupar com isso. Particularmente, o sujeito S1 expressa, em linguagem escrita, que a área total das circunferências inscritas é $\frac{\pi}{4}$, sem explicitar a unidade de medida, conforme mostra

REnCiMa, São Paulo, v. 13, n. 4, p. 1-21, jul./set. 2022

a respectiva composição, no Quadro 1. Contudo, em linguagem falada, S1 expressa *que a soma das áreas dos círculos que compõem as figuras sempre vai chegar em* $\frac{\pi}{4}$ *(1.11)*, sem explicitar a unidade de medida.

O sujeito S5, expressa, ora *uma conta envolvendo a diferença entre a área do quadrado maior e a soma das áreas dos círculos, em cada figura (5.1)*, e ora um *pensar sobre a área da circunferência na 1ª figura (5.3)*. Isso revela que os entes *círculo* e *circunferência* não estão claros para esses sujeitos, que os interpretaram como iguais. Especificamente, S5 busca pela área da circunferência que, de acordo com a definição matemática de circunferência[6], não é possível de ser encontrada.

De forma análoga, as *regiões limitadas pelos quadrados* foram interpretadas pelos sujeitos S2, S5, S7 e S8 como *quadrados*, conforme mostram as unidades de significados (2.1) (2.4) (2.5) (2.7) (5.1) (7.4) e (8.1). Todavia, matematicamente, um *quadrado* é definido como sendo um quadrilátero plano convexo que possui os quatro lados, bem como os quatro ângulos congruentes (DOLCE; POMPEO, 2005). Note-se, então, que o *quadrado* é definido em termos de quadrilátero que, por sua vez, é um polígono com quatro segmentos (lados). Dada a definição de polígono[7], o ente *quadrado* se refere apenas à reunião dos segmentos que o formam, e não à reunião desses segmentos (polígono) com o seu interior, cuja definição é de *região poligonal*.

Com isso, compreendo que o ente *quadrado* é diferente do ente *região poligonal quadrada* e, portanto, o cálculo de área só é possível com essas regiões, descritas na tarefa como *regiões limitadas pelos quadrados*, o que permite inferir que os entes *quadrado* e *região poligonal quadrada* não se mostraram claros para os sujeitos S2, S5, S7 e S8. Porém, Dolce e Pompeo (2005), dizem que

> sob uma ou outra orientação [...] o ente *polígono* corresponde ao que denominamos *superfície poligonal* ou *região poligonal*; o ente *poligonal fechada* ou *contorno do polígono* corresponde ao que chamamos de *polígono*. As conclusões práticas a que se chega com uma outra orientação são as mesmas. (DOLCE e POMPEO, p. 135)

Nesse sentido, em termos práticos – como entendo ser o cálculo de área – a diferenciação entre os entes *quadrado* e *região poligonal quadrada* pretendida não é relevante e, portanto, interpretá-las como entes geométricos iguais, como fizeram os

[6] Cf. Dolce e Pompeo (2005).
[7] Idem nota 6.

sujeitos S2, S5, S7 e S8, é plausível. Para os demais sujeitos, os dados não permitem fazer inferências similares, uma vez que não investigaram a tarefa sob o enfoque do cálculo de área.

Os conhecimentos matemáticos que se revelaram com a categoria C1, se constituíram com um movimento que teve um *como* acontecer, o que direciona a interpretação para os modos constituintes desses conhecimentos, conteúdo da categoria C2. Enceto a interpretação dessa categoria retomando trechos que indicam o momento inicial da atividade dos sujeitos significativos. Dizem os sujeitos: *"a primeira coisa que eu pensei foi sobre o raio"; "eu pensei, basicamente, em você contar quantos círculos têm, por exemplo, têm nove círculos e saber qual é o raio de cada círculo"; "eu pensei na proporção"; "eu pensei sobre o número de círculos dentro do quadrado maior"; "eu tinha pensado de acordo com a posição da figura, quantos círculos iam aumentar"; "eu não consegui pensar, ainda, como fazer".* Com esses dizeres, a primeira pergunta que hermeneuticamente se abre é: qual é o sentido do *pensar*, explicitado pelos sujeitos que estiveram com a Investigação Matemática?

Os trechos acima expostos mostram que a palavra *pensar* foi utilizada pelos sujeitos para falar sobre o que pensaram; mostram uma coisa (um conhecimento) pensada. Todavia, os sujeitos buscaram, também, por modos de pensar sobre a coisa pensada e, portanto, o *pensar* do qual nos falam revela não só a coisa pensada, mas as ações desencadeadas durante a atividade; revela um "movimento, idas e vindas, o fazer e refazer, uma marcha que interroga [a coisa pensada e] o próprio proceder" (SOUZA, 2020, p. 22, inserção minha). No contexto dessa pesquisa, é um movimento que calcula (4.4) (5.1) (7.2) (7.3) (8.2), conta (1.4), percebe (1.3) (1.6) (6.2) (7.4) (7.5) (8.3) (8.5), analisa (2.7) (2.8), representa (2.6) (3.1) (4.2), relaciona (2.1) (4.3), supõe (2.5) (8.4) (8.5), refuta (2.9) (7.5), generaliza (1.8) (1.9) (1.10) (2.3) (2.7) (2.8) (3.2) (4.3) e conclui (1.11) (2.3) (4.3) (7.3).

Ao expressarem os modos de pensar, os sujeitos dizem: *"aqui dá pra ver que ele tá aumentando de dois em dois em relação ao anterior"; "eu fiz a conta e acabei não detalhando a fórmula, mas a conta mostrou que, pelo menos para aquelas quatro figuras, a área que está inscrita nos círculos continua constante"; "eu também tinha visto sobre a área"*. Isso indica que o que se mostrou visto foi diferente para cada um dos sujeitos, e ensejou possibilidades de investigação (modos de se mostrar) também diferentes, as quais serviram como aberturas para *ver* aquilo que somente com a estrutura enunciativa da tarefa não se podia *ver*.

Por exemplo, os sujeitos explicitaram *ver* o raio da circunferência; contudo, o raio não está visualmente presente na tarefa, mas está na circunferência, porque, por definição matemática, a circunferência não pode ser circunferência sem o raio. Além disso, ao se mostrar que *mais por lógica do que por cálculo, o sujeito achou a medida do raio dos círculos em função do número de círculos em cada figura (1.7)* e que *o sujeito concluiu, por aquilo que chama de por indução, que a medida do diâmetro dos círculos de cada figura segue uma ordem (2.3)*, compreendo que características invariantes vistas primeiramente na apreensão visual se constituíram em conhecimentos matemáticos que não estavam explícitos na tarefa e, portanto, impossíveis de serem vistos nessa apreensão primeira.

Nesse sentido, o *pensar* do qual nos falam os sujeitos é um *ver* em direção ao que poderia emergir com a tarefa, para que compreensões pudessem ir acontecendo e conhecimentos matemáticos se constituindo. Esse *ver* não foi apenas uma experiência sensorial biológica isolada, mas um ver perceptivo que extrapolou as características visuais da tarefa e que proporcionou antever conjecturas e predições. Com isso, compreendo que a constituição do conhecimento matemático com a Investigação Matemática envolveu "um voltar-se do sujeito para as possibilidades. Quais possibilidades: aquelas que lhe faz sentido, que lhe impulsiona a busca, que o faz levantar hipóteses tomando como solo o já conhecido" (SOUZA, 2020, p. 79, inserção minha).

A unidade de significado (5.2) explicita que *"o sujeito diz não ter pensado, ainda, no resultado que vai chegar"*. Isso revela o não pensado ou o *a-se-pensar* que, por sua vez, já anuncia um pensar, ainda que o sujeito não esteja familiarizado com o que o pensamento pensou propriamente (HEIDEGGER, 2012). Dito de outro modo, ao dizer que não pensou, o sujeito expressa um pensar que ainda não lhe possibilitou familiarizar-se com o elemento pensado e, do ponto de vista da constituição do conhecimento matemático com a Investigação Matemática, resta-lhe "manter-se alerta [...] no interior do já pensado em direção ao impensado, que ainda se guarda e se encobre no já pensado" (HEIDEGGER, 2012, p. 120).

Como parte do *pensar* expresso pelos sujeitos, está a ação de perceber (1.3) (1.6) (6.2) (7.4) (7.5) (8.3) (8.5). Segundo Heidegger (2012), *percepção* significa "captar algo presente; e, captando algo, destacá-lo e, assim, tomá-lo como vigente.

Este perceber que destaca é um re-presentar, no sentido simples, amplo e, ao mesmo tempo, essencial de deixar algo vigente estar e pôr-se diante de nós tal como está e se põe" (p. 121). Assim, ao dizerem o que perceberam, os sujeitos trazem à clareza o conhecimento matemático que, diante deles se pôs e se constituiu, ou seja, a percepção mostrou-se, nesta vivência, possibilitadora do "ver claro, aberto como possibilidade [...] desdobrada [...] em termos de pensamento em movimento" (BICUDO, 2010, p. 33).

No contexto desta pesquisa, essa interpretação assim se presentifica: ao perceber uma relação entre o número de círculos e a medida dos respectivos raios (1.6), o sujeito constitui o conhecimento de função; ao perceberem uma sequência no número de quadradinhos por linha (8.3), e que o número de círculos em um dos lados da região limitada pelo quadrado maior cresce segundo a sequência 1, 2, 3, 4... (6.2), os sujeitos constituem o conhecimento de progressão aritmética; ao perceber uma constância na proporção por ele construída, o sujeito refuta sua hipótese inicial (7.5).

Outro aspecto revelado nesse movimento do pensar é a generalização das regularidades e relações percebidas (1.3) (1.6) (1.7) (2.2) (2.4) (2.7) (6.2) (7.3) (7.4) (7.5) (8.3) (8.5), ao *analisar as três primeiras figuras (2.7)* ou *pelo menos para as figuras visíveis no enunciado da tarefa (7.3)*. Com isso, revela-se que a constituição do conhecimento matemático ao estar com a Investigação Matemática iniciou com o pensar sobre os casos visíveis e se encaminhou na direção do pensar sobre os casos invisíveis; movimento que o sujeito S2 chama de indução (2.3), ou seja, um pensar acompanhado da "operação de estabelecer uma proposição geral com base no conhecimento de dados singulares" (FERREIRA, 2010, p. 422).

Essas proposições gerais foram expressas em linguagem algébrica para comunicar, por exemplo, a medida do raio dos círculos em função do número de círculos em cada figura, que conforme mostra a unidade de significado (1.8) foi expressa como $\frac{1}{2\sqrt{n}}$; a medida dos lados das regiões limitadas pelos quadrados menores (quadradinhos, na linguagem do sujeito) com relação à posição que a figura ocupa na sequência, expressa por $\frac{1}{n}$ (3.2); e para relacionar a quantidade de círculos dispostos na figura com a posição por ela ocupada, expressa por n^2 (4.3).

6 Algumas considerações metacompreensivas

Ao retomar a interrogação: *o que se revela sobre a constituição do* *conhecimento matemático de futuros professores de matemática, ao estarem com a Investigação Matemática?,* é possível inferir que ela se revelou mediada pelos conhecimentos já constituídos, com os quais foi possível *ver* em direção ao que poderia emergir com a tarefa, constituindo os conhecimentos novos. Nesse *ver em direção*, os caminhos foram se fazendo junto ao movimento do pensar, o que revela uma pluralidade nos modos constituintes, uma vez que os sujeitos mostraram pensar de modos distintos e mobilizaram diferentes conhecimentos já sabidos, aspectos dependentes do modo como eles estiveram com a tarefa de Investigação Matemática.

Com Souza (2020), compreendo que o modo como a constituição dos conhecimento matemático se mostrou sendo colocada em curso, requereu um "estar atento às escolhas que se faz e aos atos que se desencadeiam, pois são eles que nos levam a agir" (p. 95). No contexto da vivência aqui enfocada, foram essas escolhas que ensejaram uma interação dos sujeitos com a tarefa e,

> de modo espontâneo, os fez dialogar acerca do que percebiam, compreendendo e interpretando [...]. Esse pensamento em movimento é o que possibilita a análise e a reflexão que, por sua vez, faz com que o sujeito se dê conta do que faz, do que percebe e procure modos de expressar o percebido, abrindo-se ao diálogo. O diálogo permeia a tarefa, pois os alunos procuram expor o modo pelo qual analisam o que [...] lhes aparece. (MONDINI, MOCROSKY e PAULO, 2018, p. 160-161)

Embora distinto, o *pensar* exposto pelos sujeitos envolveu aspectos do fazer matemático, tais como conjecturar, testar e generalizar; porém, não foi, por ele, condicionado. A constituição do conhecimento matemático iniciou com a subjetividade daquele que se dispôs a investigar, e que, ao ser no mundo, já é intersubjetividade. Hermeneuticamente, isso possibilita compreender que a constituição do conhecimento foi circunstanciada pela realidade mundana e, portanto, as experiências vividas por esses sujeitos contribuíram para o modo como atribuíram significados ao que constituíram.

Além disso, com o movimento de interrogar constantemente *o que se revela*, vi se revelar a ausência da demonstração matemática, de modo que a validação das conjecturas esteve ligada a explicações intuitivas acerca do que foi percebido nos casos particulares. Considerando que os sujeitos da vivência são alunos de um curso de licenciatura em matemática, há razões para supor que esse aspecto do fazer matemática do matemático faz parte do mundo — o da Universidade — em que eles habitam, o que pressupõem alguma familiaridade desses sujeitos com a demonstração.

A ausência do aspecto dedutivo das demonstrações na vivência aqui exposta, mas presente nos discursos corriqueiros acerca da Investigação Matemática — a exemplo de Ponte, Brocardo e Oliveira (2013) — revela um desapego do modo acadêmico (científico) de constituir conhecimento matemático no ensino superior. Na perspectiva da Educação Matemática isso é salutar, porque contribui para que possamos "nos desprender do senso comum que nos leva a acreditar que o conhecimento matemático que devemos produzir é somente (ou mais importante) o que é estabelecido pela 'matemática acadêmica'" (ROSA; BICUDO, 2018, p. 16).

Enveredando-me para o encerramento desse texto, compreendo que os conhecimentos matemáticos se revelaram constituídos pelo encontro daquilo que os sujeitos já sabiam com aquilo que a tarefa sugeria em sua estrutura enunciativa e, portanto, o que foi constituído "carrega consigo o prévio, aquilo que se sabe, mas, também, o que pode ser despertado pela tarefa, de modo que [a constituição do conhecimento matemático se deu como] uma abertura para o devir" (WICHNOSKI, 2021, p. 161, inserção minha). Os modos pelos quais esses conhecimentos foram constituídos se revelaram expressões das articulações dos aspectos percebidos, sentidos e compreendidos com o corpo-encarnado dos sujeitos significativos, bem como com as relações estabelecidas subjetiva e intersubjetivamente ao estarem com a Investigação Matemática.

Referências

BARBOSA, Sandra Malta. A produção do conhecimento matemático: uma abordagem gráfica para a função composta. **Revista de Ensino de Ciências e Matemática**, v. 3, n. 1, p. 68-82, jan. 2012.

BICUDO, Maria Aparecida Viggiani. Aspectos da pesquisa qualitativa efetuada em uma abordagem fenomenológica. In: Bicudo, Maria Aparecida Viggiani. (Org.). **Pesquisa qualitativa segundo a visão fenomenológica**. São Paulo: Cortez, 2011, p. 29-40.

BICUDO, Maria Aparecida Viggiani. Filosofia da Educação Matemática segundo uma perspectiva fenomenológica. In: BICUDO, Maria Aparecida Viggiani. (Org.). **Filosofia da Educação Matemática:** fenomenologia, concepções, possibilidades didático-pedagógicas. São Paulo: Editora da UNESP, 2010, p. 23- 47.

DOLCE, Osvaldo; POMPEO, José Nicolau. **Fundamentos de matemática elementar:** geometria plana. 8. ed. São Paulo: Atual, 2005.

FERREIRA, Aurélio Buarque de Holanda. **Mini Aurélio:** o dicionário da Língua

Portuguesa. 8. ed. Curitiba: Positivo, 2010.

HEIDEGGER, Martin. **Ensaios de conferências**. 8. Petrópoles: Vozes, 2012.

HEIDEGGER, Martin. **Ser e Tempo**. 10. ed. Petrópolis: Vozes, 2015.

MONDINI, Fabiane; MOCROSKY, Luciane Ferreira; PAULO, Rosa Monteiro. O ensino de Cálculo Diferencial e Integral I: possibilidades de investigação. **Educação Matemática em Revista**, v. 23, n. 59, p. 150-162, 2018.

PAULO, Rosa Monteiro; FIRME, Ingrid Cordeiro; TONÉIS, Cristiano Natal. Tecnologias digitais *como* possibilidade *para* compreender a produção de conhecimento em matemática. **Revista Brasileira de Educação em Ciências e Educação Matemática**, v. 3, n. 1, p. 17-39, abr. 2019.

PONTE, João Pedro; BROCARDO, Joana; OLIVEIRA, Hélia Margarida. **Investigações Matemáticas na Sala de Aula.** 3. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2013.

ROSA, Maurício; BICUDO, Maria Aparecida Viggiani. Focando a constituição do conhecimento matemático que se dá no trabalho pedagógico que desenvolve atividades com tecnologias digitais. In: PAULO, Rosa Monteiro; FIRME, Ingrid Cordeiro; BATISTA, Carolina Cordeiro (Org.). **Ser professor com Tecnologias:** sentidos e significados. São Paulo: Cultura Acadêmica, 2018, p. 13-24.

SOUZA, Jesaías da Silva. **Abdução e a produção do conhecimento matemático**. 2020. 111 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) - Universidade Estadual Paulista, Rio Claro.

WICHNOSKI, Paulo. **Fenomenologia da Investigação Matemática na Educação Matemática**. 2021. 215 f. Tese (Doutorado em Educação em Ciências e Educação Matemática). Universidade Estadual do Oeste do Paraná. Cascavel.

WICHNOSKI, Paulo; KLÜBER, Tiago Emanuel. A (re)formulação de tarefas de Investigação Matemática. **Revista Eletrônica de Educação Matemática**, v.13, n.1, p.59-75, 2018.