Recebido: 31/15/2022 ■ Aprovado: 20/09/2022 ■ Publicado: 01/10/2022

eISSN 2179-426X
10.26843/rencima.v13n5a08

RENCIMA Revista de Ensino de Ciências e Matemática

Modelo exploratório de resolução de problemas na formação inicial de professores de Matemática

Flávia Sueli Fabiani Marcatto[1]

Resumo: Este artigo trata da implementação de estudos em Educação Matemática, mais especificamente, do Modelo Exploratório de Resolução de Problemas (MERP), na formação inicial de professores de matemática, na abrangência das horas de prática como componente curricular. A metodologia de pesquisa baseada em design apoiou este processo de implementação. As tarefas de resolução de problemas, baseadas na perspectiva do MERP, constituíram uma proposta relevante na formação inicial de professores, pois os estudantes tiveram a oportunidade de conjecturar, explicar e produzir argumentos matemáticos e justificá-los; construir ideias, partindo das ideias uns dos outros, contribuindo para o desenvolvimento de sua capacidade e da vontade de se engajar com a matemática, resultando em uma identidade positiva como produtor de matemática e dando sentido aos processos de ensino por meio dos discursos dos colegas universitários.

Palavras-chave: Tarefas de Resolução de Problemas. Prática como Componente Curricular. Experimento de Design. Estudos de Implementação em Educação Matemática.

Exploratory model problem-solving for initial teacher formation in Mathematics

Abstract: This paper deals with the implementation of studies in Mathematics Education, more specifically, the Exploratory Model Problem Solving (EMPS), in the initial formation of mathematics teachers, in the scope of the hours of practice as a curricular component. The design-based research methodology supported this implementation process. The problem solving tasks, based on the EMPS perspective, constituted a relevant proposal, in initial teacher education, because the students had the opportunity to conjecture, explain and produce mathematical arguments and justify them; construct ideas, starting from each other's ideas, contributing to the development of their capacity and willingness to engage with mathematics, resulting in a positive identity as a mathematics producer and giving meaning to the teaching processes through the discourses of their university colleagues.

***Keywords**:* Problem-Solving Tasks. Practice as a Curricular Component. Design Experiment. Implementation Studies in Mathematics Education.

Modelo exploratorio de resolución de problemas en la formación inicial de profesores de Matemáticas

Resumen: Este artículo aborda la implementación de los estudios en Educación Matemática, más específicamente, el Modelo Exploratorio de Resolución de Problemas (MERP), en la formación inicial de los profesores de matemáticas, en el ámbito de las horas de práctica como componente curricular. La metodología de investigación basada en el diseño apoyó este proceso de aplicación. Las tareas de resolución de problemas, basadas en la perspectiva MERP, constituyeron una propuesta relevante, en la formación inicial del profesorado, porque los estudiantes

---

[1] Doutora em Educação Matemática. Professora da Universidade Federal de Itajubá (UNIFEI). Minas Gerais, Brasil. ✉ flaviafmarcatto@gmail.com https://orcid.org/0000-0002-9998-5705.

tuvieron la oportunidad de conjeturar, explicar y producir argumentos matemáticos y justificarlos; construir ideas, partiendo de las ideas de los demás, contribuyendo al desarrollo de su capacidad y disposición para comprometerse con las matemáticas, resultando en una identidad positiva como productor de matemáticas y dando sentido a los procesos de enseñanza a través de los discursos de los colegas universitarios.

Palabras clave: Tareas de Resolución de Problemas. La Práctica como Componente Curricular. Experimento de Diseño. Estudios de Implementación en Educación Matemática.

1 Introdução

Nos últimos anos, o ensino e a aprendizagem de matemática têm mudado de um modelo onde o professor apresenta a maioria, senão todas, as ideias matemáticas e os procedimentos por meio de instrução direta, em direção à instrução orientada para a investigação e o discurso matemático, sendo, uma das possibilidades, envolver os estudantes em atividades de exploração de problemas desafiadores, oportunidade de interação e discussão das ideias matemáticas entre alunos e entre alunos e professor.

Os processos de Resolução de Problemas (RP) podem promover a compreensão conceitual dos alunos e estimular sua capacidade de raciocinar e de se comunicar matematicamente quando adequadamente planejados, buscando antecipar o pensamento matemático dos estudantes e gerando melhores oportunidades de aprendizagem para todos eles (LILJEDAHL e CAI, 2021). A pesquisa recomenda que os alunos sejam expostos a tarefas desafiadoras, não rotineiras, para que a criação de sentido matemático seja praticada (NCTM, 1991). Problemas matemáticos que envolvem matemática significativa têm o potencial de fornecer os contextos intelectuais para o desenvolvimento matemático dos alunos.

Segundo Liljedahl e Cai (2021), a Educação Matemática tem se concentrado na resolução de problemas há mais de 50 anos. Desde então, muita pesquisa tem sido feita e muito foi publicado sobre RP, o que gerou uma crença compartilhada de que ela é, e deve ser, uma parte importante do que significa ensinar e aprender matemática. A RP vem se incorporando aos currículos ao redor do mundo, tanto como uma habilidade a ser ensinada quanto uma forma através do qual a matemática é aprendida (LILJEDAHL e CAI, 2021). No Brasil, ela está inserida na Base Nacional Comum Curricular (BNCC) como uma perspectiva do desenvolvimento de habilidades e competências (BRASIL, 2017). No entanto, a RP ainda é uma fonte de dificuldades para professores e alunos.

Além de assumir um compromisso com a Resolução de Problemas no currículo de matemática, os professores precisam ser estratégicos na seleção de tarefas apropriadas e na orquestração do discurso da sala de aula, para maximizar as oportunidades de aprendizagem. Em particular, os professores devem envolver os alunos em uma variedade de atividades de RP: (1) encontrar várias estratégias para resolver um determinado problema, (2) engajar-se na formulação de problemas e exploração matemática, (3) proporcionar argumentos para suas soluções e (4) fazer generalizações (LESTER e CAI, 2015).

Este estudo faz parte de um projeto de pesquisa sobre o Desenvolvimento do Raciocínio Matemático através de tarefas de Resolução de Problemas. Os objetivos que contemplam este artigo são:

A) Implementar o Modelo Exploratório de Resolução de Problemas (MERP) (KOICHU, 2019) nas horas de Prática como Componente Curricular (PCC) de um curso de formação de professores de Matemática.

B) Contribuir para tornar a Resolução de Problemas parte integral da aprendizagem matemática e que não deve ser ensinada como um tópico separado no currículo de matemática.

C) Colaborar na construção de uma base de dados sobre a cadeia de implementação da Resolução de Problemas e do MERP.

Para Jankvist et al. (2021), a implementação de pesquisa em Educação Matemática no ensino de matemática ocorre como uma perturbação na ecologia de um determinado sistema educativo através do apoio gradual à inovação em conjunto com um plano de ação destinado a resolver um problema, que é percebido por pelo menos uma das partes interessadas. Uma característica importante que define a implementação é a interação que ocorre entre aqueles que propõem e aqueles que se adaptam à inovação, mudando gradualmente a prática de modo a acomodar a inovação (JANKVIST et al., 2021).

Koichu, Cooper e Winder (2022) defendem a importância de desenvolver uma estrutura conceitual da cadeia de implementação da Resolução de Problemas (CI-RP) e a consideram como uma sequência complexa de interações que começam com o desenvolvimento de um novo recurso, por pesquisadores, com o qual futuros professores se envolvem em um ambiente de formação profissional e que professores

REnCiMa, São Paulo, v. 13, n. 5, p. 1-23, out./dez. 2022

e alunos da Educação Básica possam, no futuro, fazer uso. Os recursos podem evoluir na interação entre pesquisadores, futuros professores, professores e alunos em salas de aulas reais. Nesse processo, é fundamental identificar os fatores que influenciam a implementação da RP em salas de aulas reais e as oportunidades de aprendizagem que emergem das tensões das distintas perspectivas sobre RP das diferentes partes envolvidas.

2 O contexto deste estudo

Este trabalho foi desenvolvido em um curso de formação inicial de professores de matemática, em uma disciplina de Prática de Ensino em Matemática, no contexto das horas de PCC, durante a pandemia do Covid-19 e através de Ensino Remoto (ER), utilizando uma plataforma digital para interação e um aplicativo de troca de mensagens.

O ensino e a aprendizagem dos futuros professores de matemática estão, em muitos cursos de Licenciatura em Matemática no Brasil, ancorados nas horas de Prática como Componente Curricular (PCC), que se constituem como facilitadoras do autêntico desenvolvimento profissional (MARCATTO, 2012). Nesse sentido, a implementação do MERP, um modelo de exploração matemática, no contexto da aprendizagem profissional, era pertinente, com vistas a promover uma discussão sobre esse modelo, a gerar dados de implementação e constituir, no âmbito da formação, um ambiente investigativo com a intenção de alcançar a Educação Básica.

Uma preocupação gerada durante o planejamento das atividades da disciplina foram as possibilidades de interação entre a docente e os discentes matriculados na disciplina devido à pandemia. Os discentes matriculados foram consultados, através de questionário enviado no google forms, sobre: condições de acesso à internet, dispositivos para participação nas aulas como smartphones, notebooks e outros e ambiente adequado para a participação das aulas on-line. Todos responderam ao questionário e afirmaram que tinham acesso à internet, mas apenas 70% consideravam a conexão com a internet boa e estável. Os dispositivos utilizados para a interação eram smartphones e notebooks, e 60% dos estudantes revelaram que possuíam os dois equipamentos. Sobre o ambiente adequado para participação nas aulas on-line - no período do dia compreendido entre 19 e 22 horas - apenas seis alunos responderam que se sentiam confortáveis. Foi também criado um grupo em um aplicativo de troca de mensagens para melhor dinamizar a interação entre todos

REnCiMa, São Paulo, v. 13, n. 5, p. 1-23, out./dez. 2022

durante o desenvolvimento da disciplina.

3 Enquadramento Teórico

Apoiados pela definição de Koichu, Cooper e Winder (2022), que consideram a Resolução de Problemas como o envolvimento com situações matemáticas às quais o estudante atribui problematicidade e não tem um caminho de solução prontamente disponível, mas tem um pano de fundo apropriado para encontrar a solução. Resolver problemas é entendido como um meio para ajudar os alunos a aprender a pensar matematicamente e, por isso, faz parte dos currículos de matemática em quase todos os países, incluindo o Brasil.

Os processos de Resolução de Problemas, podem ser caracterizados por sua estrutura interna ou externa. De acordo com Rott, Specht e Knipping (2021), a estrutura interna refere-se a processos metacognitivos, como heurísticas, verificações ou crenças do resolvedor em relação ao tópico. A estrutura externa refere-se a ações observáveis que podem ser caracterizadas em fases, como a compreensão dos problemas, a elaboração de um plano de solução e aquelas que envolvem a resolução.

Quase todos os modelos de RP são normativos, ou seja, representam processos idealizados e derivam, principalmente, de considerações teóricas (ROTT, SPECHT e KNIPPING, 2021). Esses processos são caracterizados por fases distintas em uma sequência predeterminada, e o sequenciamento dessas fases são idealizados como norma do processo. Geralmente, os modelos normativos compreendem no mínimo três fases ou mais, mas o número de fases não é importante e sim as atividades que estão envolvidas em cada uma delas. Eles são usados como uma ferramenta pedagógica para orientar os processos de RP dos alunos e ajudá-los a se tornarem melhores resolvedores de problemas (ROTT, SPECHT e KNIPPING, 2021).

No entanto, os processos reais de resolução de problemas, conforme defendido por Rott, Specht e Knipping (2021), parecem acontecer de maneiras diferentes da forma como foram idealizados, não são lineares, pois contém desvios, erros e ciclos que muitas vezes não seguem a sequência pré-determinada do modelo normativo, envolvem passos à frente e retornos entre analisar, planejar e explorar um problema.

Nesse sentido, Ball, Thames e Phelps (2008) defendem que, ao atribuir uma

REnCiMa, São Paulo, v. 13, n. 5, p. 1-23, out./dez. 2022

tarefa de RP, os professores precisam antecipar o que os estudantes podem fazer, o que são suscetíveis de pensar, como irão resolver, e se eles vão achar difícil ou confuso. Os mesmos autores definem o ‘conhecimento de conteúdo e dos estudantes’ como o conhecimento que combina o conhecimento sobre os estudantes e os conhecimentos de matemática.

Durante a etapa de planejamento e antecipação de como seria o envolvimento dos futuros professores, em uma tarefa que envolvia o MERP, na disciplina de prática de ensino, no ensino on-line, foi destacada a importância do envolvimento deles com a tarefa e as características de uma abordagem exploratória, que eram desejadas na perspectiva da disciplina. A preocupação era que os licenciandos tivessem oportunidades de aprender a ensinar matemática na Educação Básica, não por meio de uma prática de ensino de instrução direta, atropelando etapas importantes como a discussão de ideias entre os alunos, e sim como um sistema de dimensões inter-relacionadas: (1) a natureza das tarefas da sala de aula, (2) o papel do professor, (3) a cultura da sala de aula, (4) as ferramentas matemáticas para auxiliar o aprendizado, e (5) a preocupação com a equidade e acessibilidade (LESTER e CAI, 2015). Essa perspectiva, parece ser importante, uma vez que articula planejamento e atividade em sala de aula com posterior reflexão, o que pode apoiar a implementação da RP no currículo.

É necessário compreender como se organiza uma aula desta natureza e perceber os aspectos envolvidos na sua condução desde a escolha de tarefas e modelos de RP apropriados para promover um ambiente de discussão e aprendizagem na sala de aula. Planejar e conduzir uma aula exploratória é ainda mais desafiante para os futuros professores que ainda não têm experiência no ensino da matemática. É fundamental que os cursos de formação inicial criem estas oportunidades de reflexão sobre a prática (MARTINS, MATA-PEREIRA e PONTE, 2021). Deste modo, tornou-se essencial discutir modelos de Resolução de Problemas, que fossem adequados ao contexto e sem muitas dificuldades para adaptá-los em uma plataforma digital de colaboração.

Koichu (2018, 2019) sugere um Modelo Exploratório de Resolução de Problemas - MERP, conceituando a RP orientada para o discurso matemático. Neste modelo, a RP, na instrução matemática é um processo moldado socioculturalmente, é colaborativa, entendida como uma ação conjunta entre o indivíduo e o grupo enquanto trabalham em direção a um objetivo que resulta em uma solução que é negociada e endossada pelos membros do grupo. Nesse modelo, um problema é uma tarefa atribuída e recebida em uma situação social, construída conjuntamente pelos participantes envolvidos na mesma (KOICHU, 2019). Na abordagem exploratória, a instrução matemática acontece através de discurso matemático individual, privado ou público ou pela interpretação dos recursos compartilhados entre os resolvedores conforme apropriado para alcançar o objetivo.

Para Koichu (2019) o problema matemático existe como tal em um meio onde professor e estudantes têm suas agendas próprias e interpretam as ações e intenções uns dos outros, operando com os recursos individuais e aqueles compartilhados entre os estudantes sobre o problema proposto. O mesmo autor defende que, nesse processo, não só as ideias e recursos matemáticos que estão disponíveis antes do estudante se engajar com o problema, mas novos recursos podem ser tornados públicos, criados ou promovidos, frutos da interação e do compartilhamento de ideias.

Schoenfeld (2014) assume, como dimensões da prática de matemática em sala de aula, as oportunidades que os estudantes devem ter de: conjecturar, explicar e produzir argumentos matemáticos, construir ideias a partir das ideias uns dos outros, de maneira que contribua para o desenvolvimento da sua vontade de se engajar com as tarefas de RP propostas e, dessa forma, estabelecer uma identidade positiva de si mesmo como produtor de matemática.

O MERP, segundo Koichu (2019), é uma sequência de mudanças de atenção estimulada pela disponibilidade de três tipos de recursos: i) os individuais do resolvedor ou a reorganização dos recursos existentes através da interação com o problema; ii) os da turma toda, ou seja, conectado aos recursos individuais existentes com os de outros resolvedores do mesmo problema, sempre com base na interação, com os pares que compartilham ideias matemáticas e heurísticas que se complementam de forma produtiva; iii) aqueles baseados na interação com uma fonte externa de conhecimento sobre a solução, por exemplo, fazendo uma busca na internet ou um colega mais avançado no curso.

Portanto, nesse modelo, os movimentos discursivos dos estudantes, enquanto resolvem o problema, são os meios de inferir os seus deslocamentos de atenção e de ideias heurísticas. A noção de “ideia heurística é explicada no modelo como uma peça do discurso matemático de nível de conteúdo sugestivo de uma possível forma de

REnCiMa, São Paulo, v. 13, n. 5, p. 1-23, out./dez. 2022

resolver o problema" (KOICHU, 2018, p. 310).

Neste estudo, foram definidas três etapas principais na perspectiva do MERP. A primeira envolve o planejamento da atividade, o estudo do conteúdo, a seleção da tarefa adequada ao contexto da sala de aula, que considere o conhecimento e os interesses dos alunos, devendo ter uma demanda cognitiva adequada e a antecipação dos principais caminhos que os alunos podem adotar para a resolução da tarefa. A segunda abrange a proposição da tarefa para os estudantes e os movimentos do professor em busca do compartilhamento colaborativo de ideias e da promoção do discurso matemático. Na terceira, há uma reflexão sobre o desenvolvimento de toda a atividade.

Para Gordeau (2019), a tarefa de resolução de problemas matemáticos deve proporcionar aos estudantes a possibilidade de se envolverem em discussões colaborativas, onde o professor permanece afastado das discussões iniciais, oportunizando que os alunos experimentem a partilha e a interação com outros. Podem surgir abordagens diferentes, múltiplas formas de ver e de analisar o problema. A promulgação de ideias sobre o problema, durante a discussão colaborativa, pode promover avanços em que alguns estudantes tinham dificuldades. Nas discussões sobre a tarefa proposta, alguns podem expressar ceticismo nas ideias matemáticas apresentadas por outros colegas. Geralmente, os estudantes parecem se sentir autorizados a questionar o colega enquanto a maioria provavelmente não se sentiria à vontade para questionar um argumento apresentado pelo professor da turma. Nesse sentido, o MERP pode se constituir como Resolução de Problemas colaborativa.

Desta forma, os problemas foram propostos na pasta trabalhos da Plataforma Teams e os alunos tiveram um período de sete dias para enviar suas soluções no formato digital. Os estudantes, nesse intervalo, poderiam utilizar o 'espaço de colaboração' da plataforma para propor e discutir ideias entre eles. As interações entre aluno e professor, nesse período, foram realizadas através do bloco de anotações do aluno e no chat.

4 As horas de PCC e a implementação do MERP

As horas de PCC estão organizadas em disciplinas que, em alguns cursos de Licenciatura em Matemática, são chamadas de Prática de Ensino em Matemática. Essas horas são consideradas atividades formativas, estabelecidas nas Diretrizes para Formação de Professores, que definem o mínimo de 400 horas de prática nos currículos de formação de professores no Brasil.

Estas atividades formativas devem acontecer ao longo de todo o processo da formação de professores, inseridas no currículo, tendo como referência fundamentos teóricos onde se propõe a produzir algo no âmbito do ensino, discutindo, entre outras questões, como os professores aprendem a ensinar nas condições da sociedade do século XXI com grupos de alunos cada vez mais diversificados (MARCATTO, 2020).

Para Cochram-Smith (2014), alguns princípios devem nortear a prática de professores que envolvem o uso de evidências para melhorar e estruturar o ensino. A concepção e a implementação de oportunidades de aprendizagem em ambientes de sala de aula, focados na aprendizagem, atenciosos, respeitosos e de apoio, que conectem os alunos, suas vidas e suas experiências, o que inclui identificar e reconhecer as culturas domésticas e comunitárias dos alunos e fazer conexões entre trabalhos de casa e da escola, planejando e implementando com instrução e avaliações sensíveis à linguagem e à cultura. Estes princípios amparam este estudo de implementação e geram dados que podem permitir a ampliação da sua implementação em outros contextos.

Existem várias maneiras de contribuir para o trabalho colaborativo em sala de aula, em especial nas horas de PCC. Entre elas: planejamento das ações, tarefas relevantes e autenticas para o contexto, movimentos do professor que promovam o discurso matemático e que garanta a participação de todos. Os alunos não contribuirão com o discurso em sala de aula a menos que se sintam seguros para fazê-lo. É importante garantir que todos os estudantes possam gerar ideias, testar e refletir sobre elas, buscar conexões, justificativas e esclarecimentos, além de organizar as contribuições, pois, mesmo que a contribuição seja imperfeita, elas são enriquecedoras. É fundamental que seja fornecida flexibilidade para promover o aprendizado em ritmo próprio.

As dimensões da prática para as salas de aula de matemática proposta por Schoenfeld (2014) são defendidas, nesse trabalho, que devam ser consideradas nas horas de PCC. A matemática discutida em sala de aula deve ter o foco na aprendizagem, ser coerente, buscando estabelecer conexões entre procedimentos, conceitos e contextos. Os futuros professores devem ter oportunidade de aprender matemática com conteúdo e práticas relevantes para desenvolver hábitos

REnCiMa, São Paulo, v. 13, n. 5, p. 1-23, out./dez. 2022

matemáticos produtivos. As interações em sala de aula devem criar e manter um ambiente de desafio intelectual produtivo, propício ao desenvolvimento matemático dos alunos.

Dessa forma, concordando com a perspectiva de Carrillo e Flores (2020), que valoriza e dá sentido à presença social, cognitiva e a do professor na sala de aula e propõe que a aprendizagem está ancorada nas 'três presenças' no ambiente instrucional em qualquer circunstância, mas, em especial, no ensino emergencial on-line:

a) Presença social: relacionada à capacidade dos estudantes de se envolverem afetivamente uns com os outros e com o professor e de se comunicar. Participação ativa e ponderada, com o propósito de desenvolver relacionamentos interpessoais.

b) Presença cognitiva: envolve a oportunidade de participação colaborativa de todos, a construção de significado por meio da reflexão consigo e com outros. O engajamento cognitivo durante as atividades é um investimento que significa considerar e desejar entender ideias complicadas e dominar habilidades que os desafia.

c) Presença docente: envolve o planejamento da unidade de ensino, movimentos pedagógicos e a facilitação em direção aos processos sociais e cognitivos, e a reflexão permanente sobre eles, com o propósito de alcançar os objetivos de aprendizagem.

Os professores precisam entender o conteúdo que ensinam de modo diferente daquele que aprenderam quando eram alunos. Por exemplo, eles precisam dar significados, conhecer conceitos e estabelecer conexões entre eles, e não apenas prover informação e cobrar a realização de procedimentos. Necessitam ainda enxergar maneiras pelas quais as ideias se conectem entre os conteúdos e com a vida cotidiana para que, assim, possam selecionar e utilizar apropriadamente atividades de investigação nos contextos adequados.

Frente ao exposto, o MERP se apresenta como uma proposta que pode unir o conhecimento de como a RP ocorre com o conhecimento de como apoiar e aprimorar a resolução de problemas em diferentes ambientes instrucionais proporcionados nas horas de PCC, nos cursos de formação de professores de matemática.

REnCiMa, São Paulo, v. 13, n. 5, p. 1-23, out./dez. 2022

5 Metodologia da pesquisa

O processo formativo em que foram recolhidos estes dados foi desenvolvido na disciplina de Prática de Ensino de Matemática II, que compõe as horas de PCC, com 19 licenciandos de um curso de formação de professores de Matemática. Devido ao estado de emergência sanitária, as aulas aconteceram de forma remota, na plataforma Microsoft Teams. Dessas, foram realizadas 30 reuniões on-line, com duração de uma hora cada. As reuniões foram gravadas com os recursos da plataforma. A interação se deu de forma síncrona e assíncrona através da Plataforma e do grupo da turma no aplicativo de mensagens WhatsApp.

Para garantir as discussões em sala de aula, as interações aconteceram através da participação on-line com abertura dos microfones através do *chat*, compartilhamento de tela, compartilhamento de resoluções individual e coletiva no ambiente da plataforma. Discussões sobre as atividades também aconteceram através do aplicativo WhatsApp. Os encontros foram dinamizados de forma a conciliar momentos de trabalhos: (i) individuais, (ii) em pequenos grupos e (iii) em discussões coletivas. A participação dos alunos matriculados nas reuniões on-line na plataforma foi de 90% e, através do aplicativo de mensagens, no formato assíncrono, foi de 100%.

Esta pesquisa tem cunho qualitativo e interpretativo. Qualitativo porque valoriza processos didáticos em ambiente natural (BOGDAN e BIKLEN, 1994) e interpretativo quando procura compreender, no contexto do ensino, os modos pelos quais professores e alunos constituem ambientes uns para os outros (ERICKSON, 1986). O estudo se apoiou na metodologia de Pesquisa Baseada em Design-PBD (COBB et al., 2003). Os estudos baseados em design fornecem oportunidades para estudar inovações no currículo e abordagens de ensino e como elas afetam as formas de aprendizagem nas complexas ecologias da sala de aula. O objetivo da pesquisa baseada em design não é testar se o design funciona, mas explorar a implementação para fornecer uma análise da maneira como o design foi realizado e os meios de apoiar essa realização para aqueles que desejam adaptar o design para os seus contextos (COBB et al., 2003). Os estudos de PBD podem ser conduzidos em uma ampla gama de configurações. Em estudos de design iniciais do tipo um a um, como é caso deste artigo, um pesquisador conduz uma série de sessões de ensino, com uma turma de alunos, para estudar os processos de aprendizagem em um domínio particular (COBB, JAKSON e DUNLAP, 2016).

Segundo Prediger (2019), os experimentos de design se estabeleceram, na Educação Matemática, nos últimos 25 anos, como uma metodologia de pesquisa que combina dois objetivos: (1) melhorar o ensino em sala de aula, projetando arranjos de ensino-aprendizagem para um determinado tópico e (2) gerar contribuições teóricas locais através de pesquisa empírica, para compreender os processos de ensino-aprendizagem iniciados para um determinado tema. Os experimentos de design, em particular, são alimentados pela interatividade entre a experimentação guiada pela teoria e a geração de teorias locais.

Durante o planejamento da experiência de ensino, são desenvolvidas as conjecturas. Algumas delas são refutadas e novas conjecturas são desenvolvidas e experimentadas. Isso resulta em um processo interativo e cumulativo, no qual podemos discernir microciclos que consistem na antecipação das experiências de pensamentos e na intervenção em ambientes de aprendizagem seguidas de reflexão sobre todo o processo de instrução. Um novo microciclo se inicia após a análise retrospectiva. Essa metodologia é adequada ao propósito de implementação de estudos em Educação Matemática, em especial ao MERP, pois o objetivo não é aceitar ou rejeitar o modelo, mas sim, refiná-lo, revisá-lo e ajustá-lo ao contexto.

Para Cobb et al. (2003), a PBD promove uma maior compreensão da 'ecologia da aprendizagem', a qual os autores definem como um sistema complexo, interativo e que envolve múltiplos elementos de diferentes tipos e níveis, pois projeta elementos e antecipa como eles interagem para apoiar o aprendizado. Os elementos da 'ecologia da aprendizagem' considerados nesse estudo incluem: as tarefas de RP propostas aos alunos da disciplina, as normas de participação estabelecidas em sala de aula, os tipos de discurso encorajados, o ambiente de investigação que se estabelece na sala de aula, as ferramentas e os meios materiais fornecidos e os meios práticos pelos quais se orquestrou as relações entre esses elementos. A 'ecologia da aprendizagem' é conceituada como um sistema em interação, e não como uma coleção de atividades fragmentadas ou uma lista de fatores que influenciam a aprendizagem.

A PBD se constitui em um processo de pesquisa que envolve a pessoa que conhece (a pesquisadora em questão), o contexto em causa (a sala de aula da prática de ensino na formação de professores (FP) de matemática) e a atividade que participa (o experimento de design), tendo como objetivo estudar processos de implementação do MERP (estratégias de RP) ou de mudança e a forma (tarefas de RP) de os

REnCiMa, São Paulo, v. 13, n. 5, p. 1-23, out./dez. 2022

promover em contextos naturais (FP de matemática). Dessa forma, justifica-se a escolha dessa metodologia para a presente pesquisa.

As etapas de investigação seguiram a orientação das fases de: planejamento, intervenção e análise retrospectiva. Na fase inicial, buscou-se delimitar os objetivos para a aprendizagem dos futuros professores de matemática, especificando-se o percurso de aprendizagem previsto e colocando-se o estudo num contexto teórico, discutindo o MERP, na perspectiva desse estudo. Na etapa seguinte, foi realizado o momento da intervenção com os futuros professores de matemática, realizando reflexões regulares, analisando e interpretando os registros, bem como o planejamento de atividades futuras.

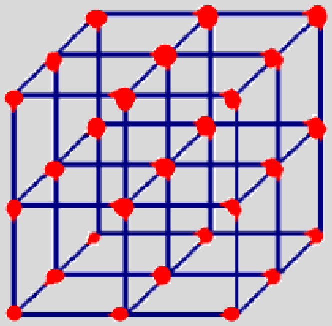
As unidades de análise foram os episódios documentados nos quais o tema matemático era o foco da atividade e o discurso em sala de aula considerado relevante para o contexto do estudo. Nesse sentido, os episódios críticos para a análise foram aqueles que apoiaram ou refutaram o paradigma inicial. Esses episódios podem não parecer importantes por si só, mas tornam-se críticos quando vistos em ordem cronológica com outros episódios.

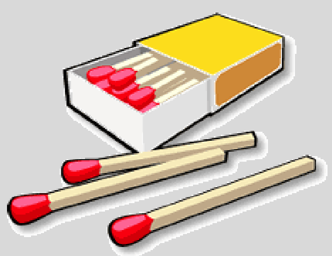
Apresentando uma análise geral de registros gerados pelas resoluções e sínteses reflexivas dos futuros professores, o problema selecionado foi a Malha de Fósforos (quadro 1), pois envolve o trabalho com figuras tridimensionais que implica uma maior exigência em termos do raciocínio espacial.

Quadro 1: A tarefa de resolução de problemas com Malha de Fósforos

Resolvam o problema procurando justificar as estratégias que utilizarem.

Problema Malha de Fósforos: Fábio começou a construir uma malha de pequenos cubos, feita com fósforos. Cada aresta de um pequeno cubo é formada por um único fósforo, como ilustra a figura abaixo. Até agora, apenas criou uma malha composta por 8 cubos pequenos, mas o seu objetivo é construir uma malha cúbica de 1000 cubos pequenos. De quantos fósforos Fábio irá precisar para essa construção?





Fonte: adaptado de Campeonato de Matemática Sub12. Disponível em http://www.fctec.ualg.pt/matematica/5estrelas/10-11/subs/sub12.htm

Além disso, atendia um dos objetivos da ementa da disciplina de Prática de Ensino em Matemática, que era a abordagem da Geometria Espacial na Educação Básica de diferentes formas.

6 Apresentação e discussão dos resultados

Nesse artigo, discute-se as resoluções dos estudantes no processo de implementação do MERP. As resoluções serão analisadas no que diz respeito aos recursos: i) esforço individual; ii) interação com outros resolvedores; iii) interação com uma fonte externa. Esses três recursos se dedicam a abranger todas as situações frequentes de RP em ambiente de instrução e podem ser empregados separadamente ou se complementarem na RP.

Destaca-se a forma como os licenciandos estruturaram espacialmente as malhas cúbicas, ou seja, as representações mentais que construíram sobre estes objetos. A construção de representações incluiu a interpretação visual da informação (como perceberam a organização dos fósforos), a identificação de subconjuntos do objeto (como realizaram a decomposição e/ou composição em pequenos cubos unitários ou, ainda, em "camadas de fósforos"), a coordenação de subconjuntos do objeto (como perceberam se há fósforos que se encontram em mais de um cubo ou camada) e a integração dos subconjuntos do objeto (como construíram a imagem da malha cúbica a partir do conhecimento de cada cubo ou camada de cubos).

A análise, a transformação e a operação com modelos mentais compreendeu a observação e a análise de imagens mentais (como identificar o número de fósforos em torno de um vértice), a transformação de imagens mentais em outras imagens mentais (como identificar a camada resultante de uma seção da malha cúbica) e a transformação de imagens mentais em outro tipo de informação (como generalizar que o número de fósforos de uma fileira corresponde ao número de fósforos de um cubo mais o produto do número de cubos de uma fileira pelo número de fósforos acrescentados a cada cubo enfileirado).

Os licenciandos postaram dez resoluções na plataforma digital. Três estavam incorretas, já que eles interpretaram de forma equivocada o problema e apresentaram soluções simplificadas (ao realizarem a decomposição e/ composição em pequenos cubos, não observaram arestas em comum e finalizaram suas soluções por meio de regra de três simples). Com base na diversidade encontrada, apresentamos trechos

REnCiMa, São Paulo, v. 13, n. 5, p. 1-23, out./dez. 2022
REnCiMa
Revista de Ensino de Ciências e Matemática

de quatro resoluções corretas que foram discutidas na reunião on-line, de modo síncrono, durante a etapa de orquestração das discussões matemáticas da situação-problema, sendo valorizadas pelos licenciandos que se surpreenderam pelas diferenças de raciocínios e estratégias utilizadas. Devido à extensão, serão relatadas partes das resoluções, levando em conta que, em todas elas, os alunos identificaram que a malha de 1000 cubos pequenos correspondia a um cubo de aresta 10.

Quadro 2: Número de fósforos para uma fileira com 10 cubos

O primeiro cubo será formado por 12 fósforos, a partir daí temos que a cada novo cubo formado desde o primeiro terá 8 fósforos, pois quatro serão as arestas em comum com o primeiro cubo, e assim sucessivamente. Obs.: Cada cubo completo terá 12 fósforos, para sabermos o total de fósforos necessário ao próximo cubo basta retirarmos as arestas em comum a eles. Então temos nos primeiros 10 cubos: ▪ 12+(9x8) =12+72 =84 fósforos

Fonte: Acervo da Autora

Fazendo uso de representação verbal e simbólica, a resolução (Quadro 2) inicia contando, de uma forma organizada, quantos fósforos há na fileira composta por dez cubinhos. Para isso, conta o número de fósforos (arestas) de um cubinho e observa que, a cada novo cubinho conectado, adicionam-se mais oito fósforos, totalizando 84 fósforos. Este raciocínio é repetido para as outras fileiras e, dada a regularidade e tridimensionalidade, conclui-se que a base, composta por cem cubos, possui 561 fósforos (Quadro 3).

Quadro 3: Completando a base

Agora resolvi completar a base, colocando os 10 cubos que já calculei e encontrei o total de fósforos nos cubos das fileiras ao lado: 1ª fileira: os 10 cubos que encontrei • 12-8-8-8-8-8-8-8-8-8 Agora observei que colocando a 2ª fileira teremos também temos arestas em comum, sendo 4 arestas comuns no primeiro e 7 nos demais, ficando assim o total de fósforo em cada cubo: • 8-5-5-5-5-5-5-5-5-5 O que equivale também as outras 8 fileiras da base, logo temos então: • 12 + (8x9) + 9 x (8+5x9) = 561 fósforos na base da malha cúbica.

Fonte: Acervo da Autora

No que se refere aos processos mobilizados, a resolução baseou-se, sobretudo, na identificação dos subconjuntos dos objetos, particularmente, dos fósforos que estão na horizontal e na vertical. A resolução continuou usando processos aritméticos a partir da generalização da estratégia usada anteriormente (Quadro 4).

Quadro 4: Encontrando camadas

Agora encontraremos as camadas de cima, que também terão arestas em comum.

O primeiro cubo terá 4 arestas em comum, precisando de oito fósforos para ser completo, o segundo terá sete, assim como o terceiro, quarto...

Ficando então:

1ª fileira da segunda camada:

- 8-5-5-5-5-5-5-5-5-5

Como na base que achamos primeiro, a 2ª fileira da 2ª camada também terá arestas em comum com a primeira e a base que está abaixo.

O primeiro cubo com 7 arestas iguais, e os demais com 9, o que ocasiona:

- 5-3-3-3-3-3-3-3-3-3

Equivalendo também as outras 8 fileiras, enfim, teremos como total de fósforos na segunda camada então:

- 8+(5x9) +9x(5+3x9) =341 fósforos

Seguindo o mesmo esquema, fui para a 3ª camada, onde observei que ela e as demais que a sucedem terão as mesmas arestas em comum que a 2ª camada, assim teremos então:

- 8x{8+(5x9) +9x(5+3x9)} =2.728

Enfim, somando agora todas as camadas chegaremos ao total de fósforos que deverá ser utilizado para termos 1000 cubos.

561+341+2.728=3.630 fósforos.

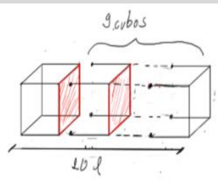
Fonte: Acervo da Autora

Os registros utilizados nessa resolução recorrem sempre às representações verbal e simbólica, na forma da linguagem natural e por expressões numéricas. Porém, foi possível observar, pela estratégia utilizada, os processos e subprocessos de raciocínio espacial que emergiram.

A segunda resolução diferiu da anterior no que se refere à representação, fazendo uso, além da verbal e da simbólica, da representação visual (Quadros 5 e 6).

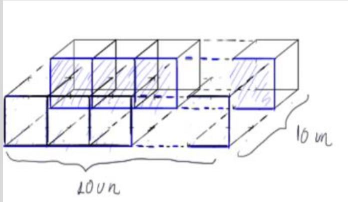
Quadro 5: Atividade que envolve o número de fósforos para uma fileira e para uma base

Vamos construir o comprimento de 10 un. com 10 cubos: o primeiro cubo terá 12 palitos, o segundo terá 8 palitos, pois um lado seu é comum ao primeiro, o terceiro também terá 8 palitos, pois um lado é comum ao segundo (lado em vermelho da figura abaixo), e assim por diante, assim teremos 84 fósforos no total, para construir uma fileira com 10 cubos.



$F_{10} = 12 + (9 \cdot 8) = 84$

Agora, vamos adicionar mais 9 fileiras adjacentes a esta acima, para formar a largura: a primeira fileira possui 10 cubos pequenos, e 84 fósforos, a segunda fileira terá 10 cubos e 53 novos palitos, pois ela compartilhará um “lado” em comum com a primeira fileira (lado pintado em azul na figura abaixo), a terceira adicionará mais 53 palitos pelo mesmo motivo anterior., e assim por diante, assim tendo 561 fósforos no total para construir uma “base” com 100 cubos.



$$B_{10} = 84 + (9 \cdot 53) = 561$$

Fonte: Acervo da Autora

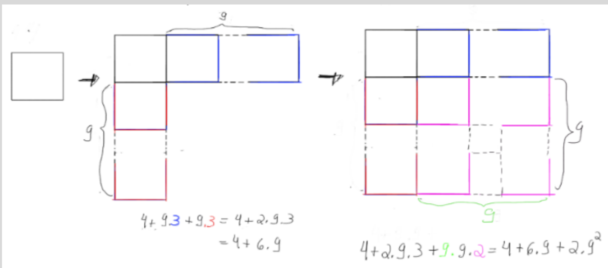
Assim como na Resolução 1, esse grupo que apresentou a segunda resolução começou a usar uma estratégia que aplicou a um cubo e, na sequência, replica-a para uma fileira com 10 cubos. A esse resultado, acrescentam-se os fósforos que se ligam à fileira anterior (fileira com 10 cubos), formando o que chamam de "base". Assim, a contagem do número de fósforos decorre de um modelo mental organizado a partir da identificação dos subconjuntos de objetos: as bases (em que contam nove "em acima" da 1ª. base) e o processo de construção de cada base sobreposta (representada pelas planificações dos cubos por cores na Quadro 6). Estes subconjuntos estão bem coordenados, o que é perceptível em toda a Resolução 2 pela preocupação de não repetir fósforos. É ainda evidente a integração dos subconjuntos que geraram o cubo de aresta 10, conduzindo ao resultado correto.

Quadro 6: Adicionando bases para formar a malha de 1000 cubos

Se retiramos do total (561 fósforos) para formar uma "base", a quantidade de fósforos do lado em comum, temos que são 341 novos palitos de fósforo:

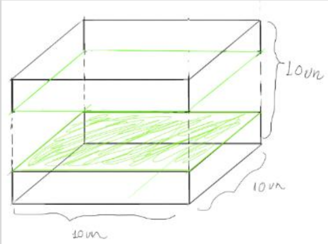
$$Nova\ Base\ = 561 - \ (4 + \ 2 \cdot 9 \cdot 3 + 2 \cdot 9^2) = 561 - 220 = 341\ fósforos$$

Para contar os fósforos do lado em comum, primeiro construímos 1 quadrado, ou seja, usamos 4 palitos de fósforo, em seguida fazemos uma fileira da mesma forma que o anterior adicionando 3 palitos, só que agora precisamos fazer esta fileira para dois lados, por isso multiplicamos por 3, e por fim precisamos fechar a área adicionando em cada fileira 2*9 palitos, só que temos 9 fileiras, por isso 2*9². Na figura abaixo, mostramos o processo de construção desta região comum entre duas bases.



Adicionando mais 9 bases "em cima" da construída anteriormente, para obtermos a altura de 10 un., e assim formar uma malha de 1000 cubos: a primeira base tem 561 palitos de fósforos, a segunda base terá mais 100 cubos, mas por ter um "lado" em comum com o primeiro (pintado em verde na figura abaixo) terá 341 novos fósforos e assim por diante, logo para construir uma malha de 1000 cubos pequenos precisamos de 3630 fósforos no total.

REnCiMa, São Paulo, v. 13, n. 5, p. 1-23, out./dez. 2022



$$M_{10} = 561 + (9 \cdot 341) = 3630$$

Fonte: Acervo da Autora

Nesta resolução observamos o raciocínio espacial, mas também o pensamento algébrico. As representações visuais evidenciam a presença de regularidades geométricas, mas a identificação de um padrão numérico parece ter um papel fundamental para chegarem à generalização. Além da utilização da simbologia através da qual é apresentada a generalização, que chamam forma geral, associando a uma sequência (Quadro 7), observa-se ainda a manipulação algébrica com que alguns elementos do grupo estão familiarizados pela sua formação escolar. Parece evidente a compreensão sobre o significado das expressões e a presença de pensamento funcional.

Quadro 7: Generalizando

De forma geral, temos que para construir uma Fileira com **n cubos** precisamos de F_n palitos que é descrito por:

$$F_n = 12 + [(n-1) \cdot 8]$$

Para que seja construído uma base de **n² cubos** precisamos de B_n palitos, que é dado por:

$$B_n = F_n + (n-1)[F_n - 4 - 3(n-1)]$$

E para uma malha de n³ cubos precisamos de $M_n$palitos, da seguinte forma:

$$M_n = B_n + (n-1)[B_n - 4 - 6(n-1) - 2(n-1)^2]$$

Fonte: Acervo da Autora

A Resolução 3 articula o pensamento aritmético e algébrico (Quadro 8). Não apresentou representações visuais, mas pareceu ter significado para o grupo (apesar de não estar escrito na resolução apresentada por eles).

Quadro 8: Resolução que articula aritmética e álgebra

Observando a construção deste cubo, observamos que este cubo possui 54 arestas, ou seja, 54 fósforos.

Com isso tentei encontrar uma fórmula para chegar a esse resultado, com isso tomei x sendo o número de cubos menores por face. Dividindo essa equação em 3 partes obtive que:

- A base do cubo era composta por 12 arestas, sendo $Bf(x) = 2x(x+1) = 2 * 2 * 3 = 12$. Chamei essa equação de Bf, que obtinha o número de arestas por base.
- Só que essa conta obtinha o número de uma única base, então precisava multiplicar pelo número de bases, sendo assim ficando $\mathrm{Ba(x)} = (\mathrm{x}+1) * \mathrm{Bf} = 3 * 12 = 36$.
- Agora só faltava contar o número de arestas que uniam essas bases, e seria 9 por “andar” no cubo, ficando então chamei de $\mathrm{Bh} = (x+1)^2 * \mathrm{x} = (3 * 3) * 2 = 18$.

Então chamei a função final de $\mathrm{B} = \mathrm{Ba} + \mathrm{Bh} = 18 + 36 = 54$ Com isso consegui o resultado de 54 arestas que era o esperado.

Unindo as partes então ficou:
Ficando então $\mathrm{B} = 2\mathrm{x}(x+1)^2 + (x+1)^2 * \mathrm{x}$.
Que simplificando fica $\mathrm{B} = 3x^3 + 6x^2 + 3\mathrm{x}$
Agora usando com um cubo de 10x10x10, ou seja, x^3com x = 10, temos:

$B = 3 * 10^3 + 6 * 10^2 + 3*10$

$B = 3 * 1000 + 6 * 100 + 3 * 10 = 3000 + 600 + 30$

B = 3630
Com isso Fábio precisará de 3630 fósforos.

Fonte: Acervo da Autora

Foi possível inferir, por meio da forma como encaminharam a resolução (Figura 8), utilizando da linguagem escrita e simbólica, que o grupo fez uso de processos do raciocínio espacial, em especial, no que se refere à transformação de imagens mentais em outro tipo de informação, por exemplo, ao generalizar o número de fósforos (número de arestas) da malha cúbica em função do número de cubos menores por face.

Na Resolução 4 (Quadro 9), observa-se uma sequência de mudanças de atenção de um licenciando estimulado pela disponibilidade de recurso à internet a um colega que está mais avançado no curso de formação de professores. Recorre à linguagem escrita e simbólica (representação tabelar) para resolver por meio de operações aritméticas.

Quadro 9: Resolução obtida em interação com outra fonte

1 cubo – 12 arestas (palitos)
2 cubos – 20 arestas
3 cubos – 28 arestas
4 cubos – 33 arestas
5 cubos – 40 arestas
6 cubos – 45 arestas
7 cubos – 49 arestas
8 cubos – 54 arestas

Por essas simples informações que tirei olhando pelo desenho, percebe-se que não há nenhuma sequência de proporcionalidade para que eu possa fazer uma regra de três para encontrar a quantidade de palitos que serão necessários para se montar 1000 cubos.

Comentei sobre a regra de três porque foi a primeira tentativa que fiz para tentar solucionar o problema mas como não deu certo tentei criar uma fórmula e cheguei na seguinte: P = $12n - n^2 + 1$, P sendo o número de palitos necessários e n o número de cubos. Mas percebi que essa fórmula só funcionava para $n \neq 0$ e $n \leq 4$. Como não consegui chegar em nenhum resultado compreensível e aceitável fui pesquisar o problema na internet e com colegas do 4º. ano da matemática. A melhor sugestão que me deram foi organizar uma tabela:

Malha Cúbica	no. arestas base	no. arestas planos horizontais	no. Arestas verticais	Total de arestas na malha cúbica
2x2x2	3x4=12	12x3=36	(3x3)x2=18	36+18=54
3x3x3	4x6=24	24x4=96	(4x4)x3=48	96+48=144
4x4x4	5x8=40	40x5=200	(5x5)x4=100	200+100=300
5x5x5	6x10=60	60x6=360	(6x6)x5=180	360+180=540
6x6x6	7x12=84	84x7=588	(7x7)x6=294	588+294=882
7x7x7	8x14=112	112x8=896	(8x8)x7=448	896+448=1344
8x8x8	9x16=144	144x9=1296	(9x9)x8=648	1296+648=1944
9x9x9	10x18=180	180x10=1800	(10x10)x9=900	1800+900=2700
10x10x10	11x20=220	220x11=2420	(11x11)x10=1210	2420+1210=3610

O no. de arestas por lado aumenta 1, no plano horizontal acrescenta-se 2 filas, o no. de planos horizontais aumenta 1, as arestas verticais aumentam de no. uma vez que as arestas, por lado, aumentam 1, o no. de andares aumenta 1.

Fonte: Acervo do autor

As mudanças de atenção desse futuro professor parecem ser caracterizadas por seus recursos matemáticos, heurísticos e afetivos convergentes, mas também divergentes. Identificamos aspectos próprios do raciocínio espacial e do pensamento algébrico, embora possamos considerar que: a primeira e a quarta resoluções tem um carácter mais aritmético; a segunda mais geométrico e algébrico; a terceira equilibra as abordagens aritméticas e algébricas. Essa identificação de estilos permite avançar, desde já, com uma conclusão relevante: esse tipo de tarefa de resolução de problemas permite ir ao encontro de diferentes estilos de aprendizagem e experiências que, num contexto de formação inicial de professores de matemática, é um aspecto significativo.

Como percebemos pelas resoluções, os licenciandos estão familiarizados de forma distinta com a linguagem algébrica, porém devemos considerar que a expressão das ideias algébricas pode ocorrer sem recurso à notação algébrica convencional, e é importante que esses futuros professores saibam desenvolver, com seus alunos, um percurso consistente até a utilização de uma linguagem mais formal.

Outro aspecto associado à diversidade de abordagens, diz respeito às representações usadas. As resoluções mostram diferentes tipos de representações — verbais, simbólicas e visuais — embora com diferentes níveis de desenvolvimento. Há, contudo, o estabelecimento de relações entre essas representações que ilustram as conexões entre a Aritmética, a Álgebra e a Geometria. As conexões podem favorecer uma visão integrada da Matemática e o recurso a diferentes perspectivas e abordagens.

7 Considerações finais

As tarefas de resolução de problemas devem ser convidativas, desafiadoras e apoiar o engajamento ativo de todos os alunos da turma em todas as fases da atividade proposta, algo que tem sido problemático, quando discutimos a implementação da RP como uma abordagem de ensino nos currículos de matemática. Eles devem sentir que podem contribuir no desenvolvimento da atividade, que seu raciocínio matemático, bem como de seus colegas seja reconhecido, favorecendo, desse modo, que todos tenham acesso ao conteúdo matemático discutido.

Discussões on-line assíncronas e síncronas, apoiados pela tecnologia digital, têm ganhado atenção nos últimos anos e estudos e podem ser uma condição importante, devido as características dos processos de RP, necessitarem de mais tempo para serem concluídos, além do tempo em sala de aula. Koichu e Keller (2019) revelaram que elas permitem que os alunos usem seu conhecimento matemático de forma significativa, aprimorem suas habilidades de autorregulação e apoiem a construção do conhecimento. O tempo alongado para resolver problemas, os horários flexíveis de participação nas discussões e o incentivo da escrita explícita e precisa de suas ideias são características únicas das discussões on-line e favorecem a implementação de modelos de RP nos currículos

A RP colaborativa, no contexto deste estudo, possibilitou um ambiente rico em escolhas, que é um ambiente no qual os licenciandos têm o poder de "fazer escolhas informadas de um desafio a ser enfrentado, uma maneira de lidar com o desafio, um modo de interação, uma extensão de colaboração, e um agente com o qual aprender" (KOICHU e KELLER, 2019, p. 263).

Essa experiência realizada, nas horas de PCC, em um curso de formação de professores de matemática, sugere que as discussões de ideias matemáticas, mesmo no ensino remoto, são ricas em oportunidades para promulgar os três tipos de recursos, do MERP, para a RP: recursos individuais, recursos compartilhados com o grupo de licenciandos e recursos estipulados pelos membros do grupo (internet ou licenciando avançado no curso). Além disso, essas experiências podem dar novo sentido à forma como os futuros professores compreendem a natureza da resolução de problemas em sala de aula, favorecendo que estes processos de implementação cheguem às salas de aula através de inovações na formação inicial.

Os licenciandos tiveram a oportunidade de conjecturar, explicar e produzir argumentos matemáticos e justificá-los; construir ideias, partindo das ideias uns dos outros, contribuindo para o desenvolvimento de sua capacidade e da vontade de se engajar com a matemática, resultando em uma identidade positiva como produtor de matemática. No contexto da formação de professores, isso pode ser uma experiência em que os futuros professores dão sentido ao mundo do ensino, por meio dos discursos dos seus colegas universitários.

As limitações deste estudo envolvem a participação de 19 futuros professores de matemática, e este processo específico teve duração de um semestre.

Referências

BALL, Deborah Loewenberg; THAMES, Mark Hoover; PHELPS, Geoffrey Charles. Content knowledge for teaching what makes it special? **Journal of Teacher Education***,* EUA, 59 (5), 389–407, 2008.

BOGDAN, Robert; BIKLEN, Sari. **Investigação qualitativa em educação: uma introdução à teoria e aos métodos**. Porto: Porto Editora, 1994.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Básica. **Base Nacional Comum Curricular.** Brasília: MEC/SEB, 2017.

CARRILLO, Carmem; FLORES, Maria Assunção. COVID-19 and teacher education: a literature review of online teaching and learning practices, **European Journal of Teacher Education**, 43:4, 466-487, 2020.

COBB, Paul et al. Design Experiments in Education Research. **Educational Researcher**, EUA, v.32, no. 1, p. 9-13, jan/fev, 2003.

COBB, Paul; JACKSON, Kara; DUNLAP, Charlotte. Design Research: An analysis and critique. In L. D. English e D. Kirshner (Eds.), **Handbook of international research in mathematics education** (pp. 481-503). New York: Routledge, 2016.

COCHRAN-SMITH, Marilyn et al. The Challenge and Promise of Complexity Theory for Teacher Education Research. **Teacher College Record***,* EUA, v.116, p. 1-38, may, 2014.

ERICKSON, Frederick. Qualitative methods in research on teaching. In: WITTRICK, Merlin. C.(org.). **Handbook of research on teaching***,* New York: Macmillan, p. 119-161, 1986.

GOUDEAU, Frédéric. Problem Solving as a Subject and as a Pedagogical Approach, and the Ongoing Dialogue Between Mathematics and Mathematics Educational. In: FELMER, Patricio. LILJEDAHL, Peter e KOICHU, Boris. (Eds) **Problem Solving in Mathematics Instruction and Teacher Professional Development**. Research in Mathematics Education. Springer, Cham, 2019, p. 23-42.

JANKVIST Uffe Thomas; et al. Launching Implementation and Replication Studies in Mathematics Education (IRME), **Implementation and Replication Studies in Mathematics Education**, Israel, *1*(1), 1-19, 2021.

KOICHU, Boris. A Discursively Oriented Conceptualization of Mathematical Problem Solving. In: FELMER, Patricio. LILJEDAHL, Peter e KOICHU, Boris. (Eds) **Problem Solving in Mathematics Instruction and Teacher Professional Development**. Research in Mathematics Education. Springer, Cham, 2019, p. 34-66.

KOICHU, Boris. Mathematical problem solving in choice-affluent environments. In: KAISER, Gabriela. FORGASZ, Helen. GRAVEN, Mellony. KUZNIAK, Alain. SIMMT, Elaine e XU, Bianyan (Eds.), Invited Lectures from the 13th International Congress on Mathematics Education*.* **ICME-13***.* Monographs (pp. 307–324). Cham, Switzerland:

Springer, 2018.

KOICHU, Boris; COOPER, Jason; WIDDER, Mirela. Implementation of Problem Solving in School: From Intended to Experienced, **Implementation and Replication Studies in Mathematics Education**, Israel, *2*(1), 76-106, 2022.

KOICHU, Boris; KELLER, Nely. Creating and Sustaining Online Problem Solving Forums: Two Perspectives. In: FELMER, Patricio. LILJEDAHL, Peter e KOICHU, Boris. (Eds) **Problem Solving in Mathematics Instruction and Teacher Professional Development**. Research in Mathematics Education. Springer, Cham, 2019, p. 263-287.

LESTER JR, Frank K.; CAI, Jinfa. Can Mathematical Problem Solving Be Taught? Preliminary Answers from Thirty Years of Research. In: FELMER, P., KILPATRICK, J., e PEHKONNEN, E. (Eds.). **Posing and solving mathematical problems:** Advances and new perspectives. Buenos Aires: Springer, p. 2-30, 2015.

LILJEDAHL, Peter; CAI, Jinfa. Empirical research on problem solving and problem posing: a look at the state of the art. **ZDM Mathematics Education,** Berlim, 53**,** 723–735, 2021.

MARCATTO, Flavia Sueli Fabiani. **A prática como componente curricular em projetos pedagógicos de cursos de licenciatura em matemática**. 2012, 174f. Tese (Doutorado em Educação Matemática), Universidade Estadual Paulista, Rio Claro.

MARCATTO, Flavia Sueli Fabiani. Prática como componente curricular na licenciatura em matemática: uma experiência de ensino-aprendizagem exploratória. **Research, Society and Development**, Itabira-MG, v. 9, n. 9, p. 1-20, 2020.

MARTINS, Micaela; MATA-PEREIRA, Joana; PONTE, João Pedro da. Os Desafios da Abordagem Exploratória no Ensino da Matemática: aprendizagens de duas futuras professoras através do estudo de aula. **Bolema**, Rio Claro-SP, v. 35, n. 69, p. 343-364, 2021.

NATIONAL COUNCIL OF TEACHERS OF MATHEMATICS. **Professional standards for teaching mathematics**. Reston, VA: Author, 1991.

PREDIGER, Suzanne. Theorizing in Design Research: Array. **Avances de Investigación en Educación Matemática**, Espanha, n. 15, p. 5–27, 2019.

ROTT, Benjamin; SPECHT, Birte; KNIPPING, Christine. A descriptive phase model of problem-solving processes. **ZDM Mathematics Education,** Berlim, 53, 737–752, 2021.

SCHOENFELD, Alan H. Reflections on learning and cognition. **ZDM Mathematics Education,** Berlim, 46, p. 497–503, 2014.