



## Relações entre os indícios de Pensamento Matemático Avançado e a aprendizagem interpretadas a partir de pesquisas na licenciatura em Matemática

Oswaldo Inarejos<sup>1</sup>

Angela Marta Pereira das Dores Savioli<sup>2</sup>

**Resumo:** Este artigo apresenta resultados de um levantamento de pesquisas fundamentadas no referencial teórico do Pensamento Matemático Avançado (PMA) no contexto da licenciatura em Matemática, que resultou em um *corpus* de dezessete estudos que utilizaram o referencial teórico do PMA para verificar indícios de pensamento matemático em produções de estudantes. A partir da análise desse *corpus*, procurou-se entender como essas pesquisas relacionam a aprendizagem em Matemática com os indícios de pensamento matemático. São apresentadas concepções diferentes, mas não contraditórias, tais como: que a aprendizagem pode ser avaliada pelo desenvolvimento do PMA; que o PMA é necessário para a aprendizagem de Matemática Avançada e que o referencial teórico do PMA pode auxiliar o professor a diagnosticar dificuldades e contribuir para a aprendizagem de seus alunos.

**Palavras-chave:** Pensamento Matemático Avançado. Educação Matemática. Licenciatura em Matemática. Aprendizagem. Avaliação.

## Relationships interpreted from Mathematics teacher education researches between learning and evidence of Advanced Mathematical Thinking

**Abstract:** This article presents the results of a survey of researches based on the theoretical framework of Advanced Mathematical Thinking (AMT) in the context of the pre-service mathematical teacher education, which resulted in a corpus of seventeen studies that used the theoretical framework of the AMT to verify evidence of mathematical thinking in the students' productions is delimited. From the analysis of the corpus, we tried to understand how these researches relate learning in Mathematics with evidence of mathematical thinking. Different, but not contradictory, conceptions are presented, such as: that learning can be assessed by the development of the AMT; that the AMT is necessary for the learning of Advanced Mathematics and that the AMT theoretical framework can help the teacher to diagnose difficulties and contribute to the learning of their students.

**Keywords:** Advanced Mathematical Thinking. Mathematical Education. Pre-Service Teacher Education. Learning. Assessment.

## Relaciones interpretadas a partir de investigaciones de licenciatura en Matemáticas entre el aprendizaje y la evidencia del Pensamiento Matemático Avanzado

**Resumen:** Este artículo presenta los resultados de un relevamiento de

<sup>1</sup> Mestre em Matemática Aplicada e Computacional. Professor da Universidade Estadual de Londrina (UEL), Paraná, Brasil. ✉ [inarejos@uel.br](mailto:inarejos@uel.br)  <https://orcid.org/0000-0002-4753-6115>.

<sup>2</sup> Doutora em Matemática. Professora do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática da Universidade Estadual de Londrina (UEL). Paraná, Brasil. ✉ [angelamarta@uel.br](mailto:angelamarta@uel.br)  <https://orcid.org/0000-0002-5624-6398>.

investigaciones basadas en el marco teórico del Pensamiento Matemático Avanzado (PMA) en el contexto de la licenciatura en Matemáticas, que resultó en un corpus de diecisiete estudios que utilizaron el marco teórico del PMA para verificar evidencias del pensamiento matemático en las producciones estudiantiles. A partir del análisis de este corpus, se busca comprender cómo estas investigaciones relacionan el aprendizaje en Matemática con la evidencia del pensamiento matemático. Se presentan concepciones diferentes, pero no contradictorias, tales como: que el aprendizaje puede ser evaluado por el desarrollo del PMA; que el PMA es necesario para el aprendizaje de Matemáticas Avanzadas y que el marco teórico del PMA puede ayudar al docente para diagnosticar dificultades y contribuir al aprendizaje de sus alumnos.

**Palabras clave:** Pensamiento Matemático Avanzado. Educación Matemática. Licenciatura en Matemáticas. Aprendiendo. Evaluación.

## 1 Introdução

Este artigo é parte integrante de uma pesquisa em desenvolvimento, que abrange o estudo do Pensamento Matemático Avançado (PMA) relacionado à formação de professores. Assim, com foco na formação inicial de professores de Matemática, realizamos um levantamento de pesquisas que envolveram cursos de licenciatura em Matemática e basearam-se no referencial teórico do PMA.

Foram encontradas pesquisas que utilizaram o referencial teórico do PMA (TALL; VINNER, 1981; TALL, 2002; DREYFUS, 2002; DUBINSKY, 2002; DOMINGOS, 2003) de maneiras diferentes, sendo o uso mais recorrente para avaliação, ao discutirem os indícios de pensamento matemático de estudantes na aprendizagem em Matemática Avançada<sup>3</sup>.

Essa avaliação da aprendizagem de estudantes por meio do desenvolvimento de seu pensamento matemático durante o processo de ensino e aprendizagem indica que há relações entre os indícios de pensamento matemático e a aprendizagem em Matemática.

Assim, para discutir essas relações, selecionamos, para esta análise, pesquisas que utilizaram o referencial teórico do PMA para verificar indícios de pensamento matemático em produções de estudantes como forma de avaliar a aprendizagem em Matemática ou entendendo o PMA como um aporte para a aprendizagem.

A análise dessas pesquisas nos permite promover reflexões a respeito da

---

<sup>3</sup> Nesta pesquisa, consideramos a Matemática Avançada como a Matemática estudada em nível de graduação, pós-graduação ou pesquisa.

formação de professores, do processo de ensino e aprendizagem em Matemática Avançada e da forma como o PMA tem sido interpretado por pesquisadores, permitindo apontamentos que possam delinear sugestões para pesquisas futuras.

A seção seguinte resume algumas concepções do referencial teórico do PMA. Posteriormente, são apresentados os procedimentos metodológicos da pesquisa e, na sequência, os trabalhos encontrados. Então, serão apresentadas as análises e os resultados.

## **2 O Pensamento Matemático Avançado**

Considerando a extensão do referencial teórico do PMA, selecionamos as concepções mais recorrentes no levantamento de pesquisas, que são resumidas a seguir. Dreyfus (2002) descreve alguns processos de pensamento matemático, como representar, deduzir, especializar, generalizar, abstrair, formalizar, conjecturar, analisar, sintetizar, traduzir e modelar, considerando o PMA um pensamento complexo que envolve um grande número de processos que interagem de formas intrincadas.

Alguns desses processos de pensamento matemático, tais como representação, abstração, generalização e síntese, permitem gerenciar a complexidade de uma situação matemática, pois possibilitam o movimento de um nível de detalhe a outro. Portanto, de acordo com Dreyfus (2002), esses são processos característicos do PMA.

Ainda segundo Dreyfus (2002), representações são sinais com significado. Representar um conceito é gerar uma instância simbólica ou mental. O processo de mudança de representações envolve o domínio de cada representação e a ligação entre elas, estruturas complexas com muita informação a ser tratada.

A abstração requer que o estudante explicita as conexões entre os conceitos, desviando a atenção do próprio objeto para a estrutura das suas propriedades e relações. Assim, a abstração está ligada à generalização, pois envolve resultados gerais, independentemente das propriedades específicas de cada objeto. O processo de abstração também favorece a realização de sínteses, pois permite descrever, de forma unificadora, uma grande quantidade de situações, compondo partes de maneira a formarem uma única imagem na qual vários conteúdos são incluídos e inter-relacionados (DREYFUS, 2002).

Tall (2002) descreve a transição do Pensamento Matemático Elementar (PME) para o Pensamento Matemático Avançado, que requer uma reconstrução cognitiva dos estudantes com abstrações formais, geralmente ao enfrentarem o primeiro ano da universidade. Segundo Tall (2002), a possibilidade de dedução e definição formal é o que distingue o PMA do PME. Enquanto o PME favorece o foco na descrição, no convencimento, na coerência; no PMA, há a precisão da definição, da prova, com base lógica nessas definições, e da consequência, baseada nas deduções e definições formais.

Nessa transição, é comum ocorrerem conflitos cognitivos, o que requer que os estudantes participem de todo o ciclo do processo criativo para desenvolverem seu pensamento matemático, ao invés de serem apresentados ao conteúdo primeiramente em seu aspecto mais formal (TALL, 2002).

Por isso, Tall (2002) e Dreyfus (2002) criticam a forma como o conteúdo matemático é geralmente apresentado no Ensino Superior, mais próximo a uma teoria acabada do que a uma forma que permita ao estudante participar do ciclo criativo. Os autores defendem estratégias didáticas em que o estudante desenvolva ativamente os processos de pensamento matemático.

Propondo a abstração reflexiva como método de construção dos conceitos no PMA, Dubinsky (2002) criou a Teoria APOS, que diz respeito ao desenvolvimento de construções mentais decompostas em ação (A), processo (P), objeto (O) e esquema (S, de *schema*). Conforme Dubinsky (2002), as ações com objetos conhecidos são interiorizadas em processos, quando o indivíduo responde a uma situação construindo um processo mental relacionado a um processo matemático. Os processos são encapsulados em objetos, que podem integrar ações a serem interiorizadas em processos em um nível superior. Um esquema é uma coleção de objetos e processos que um sujeito pode invocar para lidar ou dar sentido a uma situação, relacionando-o a outros esquemas em uma organização complexa.

Tall e Vinner (1981) consideram que o cérebro humano não é puramente lógico. Ao conceito matemático é associada uma estrutura cognitiva que inclui todas as imagens mentais, propriedades e processos que emergem na mente do estudante quando o conceito é estimulado por sua consciência. A essa estrutura mental é dado

o nome de conceito imagem<sup>4</sup>. Por sua vez, os autores utilizam o termo conceito definição como uma descrição precisa utilizada para especificar um conceito. O conceito definição varia de acordo com o indivíduo e é parte do conceito imagem que um estudante possui de um objeto matemático, diferentemente da definição formal de um conceito, que é necessariamente aceita por uma comunidade de matemáticos.

Esses mesmos autores (TALL; VINNER, 1981) ressaltam, para a aprendizagem matemática, a importância de que os estudantes possuam conceitos imagem fortalecidos e coerentemente relacionados entre si. Além disso, os autores discutem a importância de o conceito definição dos estudantes estar de acordo com a definição formal do conceito, especialmente para a realização de provas. Identificamos essas características como indícios de PMA dos estudantes considerados por pesquisadores, conforme apontam as análises do *corpus* de pesquisas selecionadas.

Domingos (2003) analisou a compreensão de conceitos de sequências, funções e cálculo diferencial de estudantes do primeiro ano de cursos de graduação, caracterizando desempenhos escolares típicos de alguns estudantes. A partir de categorias formadas na análise de dados, o autor estabeleceu três níveis de conceito imagem: incipientes, instrumentais e relacionais.

Segundo Domingos (2003), o conceito imagem incipiente refere-se a objetos elementares que não traduzem o conceito pretendido; o conceito imagem instrumental permite a utilização de objetos matemáticos que estão na base do conceito em estudo, mas os processos realizados sobre eles não são encapsulados em novos objetos; e o conceito imagem relacional representa uma compreensão estrutural dos conceitos, abordados como objetos matemáticos com uma existência para além dos processos que os originaram.

Realizados esses apontamentos teóricos, que fundamentarão nossas análises, passamos a descrever os procedimentos metodológicos referentes ao levantamento das pesquisas.

### 3 Procedimentos metodológicos

Esta pesquisa caracteriza-se como histórico-bibliográfica (FIORENTINI;

---

<sup>4</sup> Há variações nas traduções de *concept image* e *concept definition*, como imagem de conceito e definição de conceito, imagem conceitual e definição conceitual, conceito imagem e conceito definição, ou até mesmo variações na forma: conceito-imagem e conceito-definição.

LORENZATO, 2006). As principais pesquisas da área do Pensamento Matemático Avançado encontram-se em teses, dissertações, artigos de periódicos, anais de eventos e capítulos de livros. Assim, o *corpus* de análise de nossa pesquisa é formado por materiais bibliográficos, ou seja, materiais que já receberam um tratamento analítico (GIL, 2002).

Empenhamo-nos para que nenhuma pesquisa que tivesse investigado o PMA no contexto da licenciatura em Matemática passasse despercebida nas buscas, para, então, caso obtivéssemos muitas, escolhêssemos as mais recentes (últimos cinco anos) para o *corpus* de análise. Nesse procedimento, realizamos buscas por meio do mecanismo de pesquisa do Google Acadêmico, no portal de periódicos e no catálogo de teses e dissertações da CAPES, posteriormente, nos periódicos de Qualis A1 e A2 específicos da Educação Matemática e nos acervos digitais de teses e dissertações dos programas de pós-graduação em Educação Matemática que se destacaram em nossas buscas iniciais (no caso de ao menos duas pesquisas de um programa terem sido selecionadas).

Esse levantamento foi realizado no período de fevereiro a junho de 2021. Em todos os mecanismos de busca, utilizamos as palavras-chave “pensamento matemático avançado” e “licenciatura” e depois as palavras-chave *advanced mathematical thinking* e *prospective teachers*, além de *advanced mathematical thinking* e *pre-service teacher education*.

Nos resultados gerados por essas buscas, selecionamos as pesquisas que investigaram o PMA no contexto da licenciatura em Matemática ou em algum curso em nível de graduação voltado à formação de professores de Matemática (especialmente em pesquisas realizadas no exterior). Para isso, verificamos o título e o resumo dos resultados encontrados. Se isso não fosse suficiente para decidir quanto à seleção, verificamos a introdução e os procedimentos metodológicos. Considerando nosso foco na licenciatura em Matemática, descartamos pesquisas que investigaram o PMA no Ensino Superior em geral, até mesmo que promoveram estudos em cursos de licenciatura em Matemática e em algum outro curso, pois, ao ampliarem seu olhar para outros cursos e formações de outros profissionais, essas pesquisas não focaram a formação específica de professores de Matemática. Os trabalhos de levantamento encontrados foram reservados para verificarmos as pesquisas citadas, ainda que nenhum levantamento de pesquisas do PMA encontrado tivesse foco na licenciatura.

O mecanismo de busca do Google Acadêmico gerou trezentos e dois resultados com as palavras-chave “pensamento matemático avançado” e “licenciatura”, dos quais foram verificados os cem primeiros. Em todas as buscas, a verificação foi interrompida quando, em dez ou mais resultados seguidos, nenhum foi selecionado. Assim, contando com seis pesquisas encontradas em citações de levantamentos, encontramos trinta e oito pesquisas que satisfazem os requisitos, sendo três estrangeiras.

Devido ao sucesso da busca em português no Google Acadêmico em relação às demais buscas em português, decidimos utilizar essa ferramenta para testar palavras-chave em inglês que retornem resultados relacionados à formação inicial de professores, considerando que não há uma palavra específica para “licenciatura” na língua inglesa. Assim, utilizamos no Google Acadêmico as palavras-chave “*advanced mathematical thinking*” com “*teacher training*”, com “*teacher instruction*”, com “*prospective teachers*”, com “*teacher education*”, com “*teacher education programs*” e com “*pre-service teacher education*”. As palavras-chave que mais retornaram pesquisas selecionadas foram utilizadas nas buscas pelos demais mecanismos.

Essas buscas em inglês pelo Google Acadêmico geraram, somadas (com interseção de resultados), três mil, quatrocentos e dezenove resultados, dos quais verificamos cento e trinta e cinco e selecionamos doze pesquisas.

A busca em português pelo portal de periódicos da Capes gerou treze resultados, sendo nove constituídos por artigos de periódicos revisados por pares. Selecionamos cinco pesquisas que investigaram o PMA em cursos de licenciatura em Matemática, embora duas delas já houvessem sido localizadas pelo Google Acadêmico. Com palavras-chave em inglês, o portal gerou trinta e quatro resultados, nenhum selecionado.

Utilizando as palavras-chave “pensamento matemático avançado” e “licenciatura” no catálogo de teses e dissertações da Capes, houve seis mil, quatrocentos e vinte e oito resultados. Selecionamos seis dissertações ao verificar os quarenta primeiros resultados, além de reconhecer uma tese e seis outras dissertações que já haviam sido selecionadas em outras buscas. Buscando com palavras-chave em inglês, obtivemos mais cinquenta pesquisas e reconhecemos sete selecionadas em outras buscas, porém nenhuma inédita.

A fim de levantar artigos de periódicos, procuramos na Plataforma Sucupira por

revistas da área de Ensino e selecionamos as revistas de classificação Qualis A1 e A2, classificadas no quadriênio 2013-2016 (avaliação disponível no período da consulta), da área de Educação Matemática ou que aceitam artigos na área. Assim, pesquisamos nas revistas *Bolema*, *Ciência & Educação*, *Educação e Pesquisa*, *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *International Journal of Science and Mathematical Education*, *Pro-posições*, *Revista Brasileira de Educação*, *Teaching Mathematics and its Applications*, *The Journal of Mathematical Behavior*, *Acta Scientiae*, *Amazônia*, *Educação Matemática em Revista*, *Educação Matemática em Revista (RS)*, *Educação Matemática Pesquisa*, *Jornal Internacional de Estudos em Educação Matemática*, *PNA (Revista de Investigación en Didáctica de la Matemática)*, *REDIMAT (Revista de Investigación en Didáctica de las Matemáticas)*, *RENCIMA (Revista de Ensino de Ciências e Matemática)*, *Research in Mathematics Education*, *REVEMAT (Revista Eletrônica de Educação Matemática)*, *Revista de Educação, Ciências e Matemática*, *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *Vidya* e *Zetetiké*, nas quais selecionamos três artigos e reconhecemos outros três selecionados em buscas anteriores.

Ao verificar os indexadores com metadados vinculados a algumas revistas, notamos o Portal Brasileiro de Publicações Científicas em Acesso Aberto (denominado Oasisbr), do Instituto Brasileiro de Informação em Ciência e Tecnologia (Ibict). Uma busca no Oasisbr gerou vinte resultados, dos quais selecionamos uma tese e reconhecemos treze pesquisas já selecionadas.

Analisando as teses e dissertações encontradas, procuramos por grupos de pesquisa, programas de pós-graduação ou orientadores em comum, para então nos orientar pelos programas em busca de mais pesquisas. Nas páginas de sete programas, realizando buscas ou filtrando por orientador, verificamos duzentos e setenta e nove resumos dos quais selecionamos cinco pesquisas.

Por fim, por meio de referências, pesquisas de levantamento, alertas no Google Acadêmico e buscas menos sistemáticas ou com outras palavras-chave, outras quinze pesquisas foram selecionadas.

Com esses mecanismos de busca, selecionamos oitenta e três pesquisas que investigaram o PMA na licenciatura em Matemática, sendo nove teses de doutorado, vinte e oito dissertações de mestrado, vinte e nove artigos de periódicos e dezessete artigos de anais de eventos; sessenta e seis pesquisas brasileiras, quinze

estrangeiras e duas luso-brasileiras.

Acreditamos que o número baixo de pesquisas estrangeiras encontradas deve-se ao formato das graduações. Em alguns países, a formação de professores abrange cursos pedagógicos realizados após o bacharelado na área (no caso, Matemática). Assim, há pouca chance de uma pesquisa estrangeira especificar se os graduandos envolvidos estão se formando matemáticos ou professores de Matemática, diferente das pesquisas realizadas no Brasil, onde a graduação em Matemática se diferencia em licenciatura ou bacharelado.

Em relação ao recorte das pesquisas para análise, como normalmente acontece em uma pesquisa qualitativa (FIORENTINI; LORENZATO, 2006), nossos critérios foram se modificando e ganhando consistência conforme realizávamos o levantamento e percebíamos similaridades e possíveis dualidades na classificação das pesquisas encontradas. Inicialmente, pretendíamos analisar as pesquisas que avaliaram a aprendizagem por meio de indícios de PMA. No entanto, tornou-se cada vez mais difícil diferenciar essas pesquisas das que verificaram processos de PMA em produção escrita de estudantes, utilizando o referencial teórico para justificar a importância do desenvolvimento desses processos de pensamento para a aprendizagem.

Sendo assim, lemos os trabalhos levantados e identificamos sessenta e seis pesquisas que utilizaram o referencial teórico do PMA para verificar indícios de pensamento matemático em produções de estudantes como forma de avaliar a aprendizagem em Matemática ou entendendo o PMA como um aporte para a aprendizagem. Dessas pesquisas, selecionamos para o *corpus* de análise as dezessete completas e mais recentes (realizadas nos últimos cinco anos, a partir de 2017): duas teses, três dissertações e doze artigos de periódicos. Algumas das pesquisas selecionadas para o *corpus* tiveram outras metas além de verificar indícios de pensamento matemático, como elaborar e propor formas de trabalho no Ensino Superior, conforme descrevemos a seguir.

#### **4 Análise do *corpus* de pesquisas**

A fim de oferecer um panorama inicial das pesquisas que constituem o *corpus* e de como utilizaram o referencial teórico do PMA, destacamos, no Quadro 1, um resumo dos procedimentos adotados pelos pesquisadores para verificar indícios de pensamento matemático dos estudantes.

Quadro 1: Critérios e procedimentos de avaliação adotados nas pesquisas do *corpus*

<p><b>Autores:</b> Amorim, Pietropaolo, Powell e Silva (2020). <b>Título:</b> Concepções de Estudantes de um Curso de Licenciatura em Matemática sobre Argumentações e Provas. <b>Conceitos do PMA utilizados na análise de dados:</b> Conceito imagem e conceito definição propostos por Tall e Vinner. <b>Critérios e procedimentos de Avaliação:</b> A partir de questões sobre experiências e concepções de argumentações e provas dos estudantes, os autores discutiram as concepções e o conceito imagem de futuros professores a respeito de argumentações e provas para ensinar e aprender Matemática.</p>
<p><b>Autores:</b> Broetto e Santos-Wagner (2017a). <b>Título:</b> Conhecimentos Relativos a Números Racionais e Irracionais de uma Aluna Ingressante na Licenciatura em Matemática. <b>Conceitos do PMA utilizados na análise de dados:</b> Conceito imagem e conceito definição propostos por Tall e Vinner; compreensão incipiente conforme Domingos. <b>Critérios e procedimentos de Avaliação:</b> Os autores analisaram as resoluções de uma estudante de questões envolvendo números racionais e irracionais em dois questionários, comentando evidências de seu conceito imagem, conceito definição, conflitos cognitivos e níveis de compreensão.</p>
<p><b>Autores:</b> Broetto e Santos-Wagner (2017b). <b>Título:</b> Um Modelo para Analisar a Imagem do Conceito de Estudantes Universitários: o caso dos números irracionais. <b>Conceitos do PMA utilizados na análise de dados:</b> Conceito imagem e conceito definição propostos por Tall e Vinner. <b>Critérios e procedimentos de Avaliação:</b> Os autores identificaram o conceito imagem, o conceito definição e exemplos protótipos evidenciados nas resoluções de uma estudante de questões envolvendo números racionais e irracionais.</p>
<p><b>Autoras:</b> Flôres, Fonseca e Bisognin (2020). <b>Título:</b> Processos do Pensamento Matemático Avançado Revelados nas Resoluções de Tarefas Envolvendo Números Racionais. <b>Conceitos do PMA utilizados na análise de dados:</b> Processos de PMA propostos por Dreyfus. <b>Critérios e procedimentos de Avaliação:</b> As autoras verificaram se três estudantes evidenciaram ou não, no desenvolvimento de questões, os processos de mudança de representação, tradução entre representações, percepção de padrões, generalização, sintetização e abstração.</p>
<p><b>Autores:</b> Fonseca e Henriques (2018). <b>Título:</b> Compreensão da Definição Formal de Limite: um estudo na formação inicial de professores de Matemática. <b>Conceitos do PMA utilizados na análise de dados:</b> Conceito imagem e conceito definição propostos por Tall e Vinner; definição formal conforme Tall. <b>Critérios e procedimentos de Avaliação:</b> Com base em conceitos imagem e conceitos definição evocados por estudantes em suas resoluções, os autores verificaram os significados dados ao conceito matemático. Em seguida, verificaram a coerência entre a definição formal e as representações e conversões entre elas evidenciadas pelos estudantes. Por fim, verificaram a mobilização do conhecimento da definição formal na resolução de problemas.</p>
<p><b>Autores:</b> Fonseca e Henriques (2020). <b>Título:</b> <i>Learning with Understanding the Continuity Concept: a teaching experiment with Brazilian pre-service Mathematics teachers.</i> <b>Conceitos do PMA utilizados na análise de dados:</b> Conceito imagem e conceito definição propostos por Tall e Vinner. <b>Critérios e procedimentos de Avaliação:</b> Os autores analisaram o conceito imagem de estudantes por meio de respostas obtidas oralmente e por escrito, de forma a discutir o significado atribuído ao conceito de continuidade.</p>
<p><b>Autora:</b> Fontenele (2018). <b>Título:</b> Contribuições da Sequência Fedathi para o Desenvolvimento do Pensamento Matemático Avançado: uma análise da mediação docente em aulas de Álgebra Linear. <b>Conceitos do PMA utilizados na análise de dados:</b> Processos de PMA propostos por Dreyfus; conceito imagem e conceito definição propostos por Tall e Vinner. <b>Critérios e procedimentos de Avaliação:</b> A autora buscou evidências dos processos de representação, generalização, síntese e abstração, além do conceito imagem e conceito definição, e as relações entre a ação docente e o desenvolvimento dos processos de PMA.</p>
<p><b>Autores:</b> Jesus e Savioli (2019). <b>Título:</b> Concepções Manifestadas por Licenciandos em Matemática ao Lidarem com Tarefas Envolvendo o Conceito de Anel. <b>Conceitos do PMA utilizados na análise de dados:</b> Teoria APOS proposta por Dubinsky. <b>Critérios e procedimentos de Avaliação:</b> Os autores descreveram, discutiram e interpretaram resoluções de estudantes, buscando identificar as componentes de construção mental da Teoria APOS de cada estudante.</p>
<p><b>Autor:</b> Jorge (2017). <b>Título:</b> Teoria de Conjuntos: processos manifestados do Pensamento Matemático Avançado. <b>Conceitos do PMA utilizados na análise de dados:</b> Processos de PMA propostos por Dreyfus. <b>Critérios e procedimentos de Avaliação:</b> O autor analisou a compreensão</p>

de estudantes dos símbolos e representações utilizados na Teoria de Conjuntos e verificou se foram desenvolvidos processos como modelação, comutação de representações e tradução, síntese e generalização.

**Autora:** Lopes (2019). **Título:** Formação e Reelaboração de Imagens e Definições de Conceito Relacionadas ao Ensino de Vetores em Geometria Analítica. **Conceitos do PMA utilizados na análise de dados:** Conceito imagem e conceito definição propostos por Tall e Vinner; definição formal e transição do PME para o PMA conforme Tall. **Critérios e procedimentos de Avaliação:** A partir de atividades no contexto geométrico e algébrico que visaram à evocação de conceitos imagem, a autora verificou o conceito definição reelaborado pelos participantes e a transição do PME para o PMA, conforme Tall.

**Autores:** Mateus-Nieves e Jimenez (2020). **Título:** *Mathematical Generalization from the Articulation of Advanced Mathematical Thinking and Knot Theory*. **Conceitos do PMA utilizados na análise de dados:** Processos de PMA, com base em trabalhos de pesquisa, que se fundamentaram em Tall, Dreyfus e outros autores. **Critérios e procedimentos de Avaliação:** Os autores identificaram habilidades de PMA desenvolvidas pelos estudantes durante um seminário.

**Autor:** Menezes (2018). **Título:** O Ensino do Cálculo Diferencial e Integral na Perspectiva da Sequência Fedathi: caracterização do comportamento de um bom professor. **Conceitos do PMA utilizados na análise de dados:** Caracterizações de PMA propostas por Tall; processos de PMA propostos por Dreyfus. **Critérios e procedimentos de Avaliação:** O autor analisou soluções de estudantes em um pré-teste e em um pós-teste de acordo com subcategorias elencadas com amparo do PMA: representação, generalização, abstração, intuição e rigor, síntese, análise e os mundos da matemática.

**Autora:** Rodrigues (2019). **Título:** Contribuições de uma Sequência de Atividades para a Compreensão do Conceito de Comprimento de Curva. **Conceitos do PMA utilizados na análise de dados:** Conceito imagem e conceito definição propostos por Tall e Vinner; níveis de conceito imagem conforme Domingos. **Critérios e procedimentos de Avaliação:** Em um teste diagnóstico, a autora classificou cada resposta como correta, parcialmente correta ou incorreta. Em uma atividade posterior, as respostas dos participantes foram categorizadas de acordo com os níveis de conceito imagem: incipiente, instrumental e relacional.

**Autoras:** Sousa e Almeida (2017). **Título:** *Mathematical Thinking in Mathematical Modelling Activities*. **Conceitos do PMA utilizados na análise de dados:** Processos de PMA propostos por Tall e Dreyfus. **Critérios e procedimentos de Avaliação:** As autoras identificaram processos de PMA desenvolvidos por um estudante e indícios de transição para o PMA em atividades de modelagem matemática.

**Autores:** Teófilo, Lima e Menezes (2020). **Título:** Cálculo Diferencial e Integral: da Sequência Fedathi ao Pensamento Matemático Avançado. **Conceitos do PMA utilizados na análise de dados:** Conceito imagem e conceito definição propostos por Tall e Vinner. **Critérios e procedimentos de Avaliação:** Os autores verificaram a presença ou ausência de conceitos imagem e conceitos definição em resoluções de estudantes.

**Autoras:** Vidotti e Kato (2018). **Título:** Um Estudo sobre Conflitos no Processo de Aprendizagem de Limite de Funções de Várias Variáveis. **Conceitos do PMA utilizados na análise de dados:** Conceito imagem e conceito definição propostos por Tall e Vinner. **Critérios e procedimentos de Avaliação:** Inicialmente, as respostas a um teste foram classificadas como “corretas”, “parcialmente corretas”, “incorretas” ou “em branco”, e dessa classificação emergiram classes de erros. Os conceitos de PMA foram utilizados para investigar dificuldades em algumas estratégias de resolução, mais especificamente fatores de conflito potencial, investigando possíveis causas para os erros dos estudantes.

**Autores:** Vieira, Souza e Imafuku (2020). **Título:** Sobre Justificativas em Questões do Tipo Verdadeiro/Falso de Estudantes de Licenciatura em Matemática. **Conceitos do PMA utilizados na análise de dados:** Processos de PMA propostos por Dreyfus. **Critérios e procedimentos de Avaliação:** As respostas dos participantes, para cada uma das questões, foram analisadas com base na análise de erros, com discussões embasadas na interação de aspectos algorítmicos, intuitivos e formais, nas noções de aspecto intuitivo numérico e de aspecto lógico-formal e no desenvolvimento de processos de PMA.

Em resumo, os objetivos dessas pesquisas envolviam identificar processos de PMA mobilizados por estudantes (FLÔRES; FONSECA; BISOGNIN, 2020; JORGE, 2017; SOUSA; ALMEIDA, 2017); fazer uma avaliação diagnóstica (BROETTO; SANTOS-WAGNER, 2017a; VIDOTTI; KATO, 2018); analisar compreensões ou concepções de um conceito (AMORIM *et al.*, 2020; FONSECA; HENRIQUES, 2018, 2020; JESUS; SAVIOLI, 2019; VIEIRA; SOUZA; IMAFUKU, 2020); investigar um processo de ensino (MENEZES, 2018), contribuições de uma sequência de atividades (LOPES, 2019; RODRIGUES, 2019), uma metodologia de ensino (TEÓFILO; LIMA; MENEZES, 2020) ou a mediação docente em uma sequência de ensino (FONTENELE, 2018); propor um espaço de formação disciplinar (MATEUS-NIEVES; JIMENEZ, 2020); ou, ainda, construir um modelo de análise de dados (BROETTO; SANTOS-WAGNER, 2017b).

Os procedimentos metodológicos envolveram, em geral, coleta de dados na produção dos participantes. Algumas pesquisas contaram com abordagens ou experimentos de ensino, produções escritas por meio de tarefas ou questionários, entrevistas, observações ou gravações em áudio ou vídeo.

Identificamos três principais relações estabelecidas entre as ideias do referencial teórico do PMA e a aprendizagem do conteúdo nas dezessete pesquisas desse *corpus*. Em algumas pesquisas, as análises dos indícios de PMA permitem diagnosticar dificuldades de aprendizagem e prever obstáculos (BROETTO; SANTOS-WAGNER, 2017a, 2017b; JORGE, 2017; VIDOTTI; KATO, 2018); em outras, os indícios de PMA revelam compreensão do conceito (AMORIM *et al.*, 2020; FONSECA; HENRIQUES, 2018, 2020; JESUS; SAVIOLI, 2019; MENEZES, 2018; TEÓFILO; LIMA; MENEZES, 2020; VIEIRA; SOUZA; IMAFUKU, 2020); e, por fim, algumas pesquisas utilizaram o referencial teórico do PMA para investigar o processo de ensino e aprendizagem ou a mediação docente (FLÔRES; FONSECA; BISOGNIN, 2020; FONTENELE, 2018; LOPES, 2019; MATEUS-NIEVES; JIMENEZ, 2020; MENEZES, 2018; RODRIGUES, 2019; SOUSA; ALMEIDA, 2017; TEÓFILO; LIMA; MENEZES, 2020).

Procuramos entender como cada pesquisa revela uma compreensão da importância do PMA para a aprendizagem em Matemática ou da importância da aprendizagem dos conceitos para o desenvolvimento do PMA. Seria coerente interpretar que as pesquisas que verificaram indícios de PMA para concluir que houve

uma aprendizagem consideraram que a aprendizagem pode ser inferida a partir do desenvolvimento do PMA e, nesse caso, que o PMA desenvolvido implica que houve aprendizagem, ou seja, que a aprendizagem dos conceitos matemáticos é necessária para o desenvolvimento do PMA. Por outro lado, é coerente afirmar que as pesquisas que identificaram dificuldades de aprendizagem por meio das análises dos indícios de PMA tenham considerado que, para a aprendizagem, é necessário ter o PMA bem desenvolvido. Há, ainda, as pesquisas que destacam contribuições do referencial teórico do PMA para a abordagem de ensino; que valorizam, por exemplo, a importância de a Matemática ser reconstruída em sala de aula, conforme orientações de Tall (2002) e Dreyfus (2002).

Buscando nos textos do *corpus*, identificamos essas compreensões e outras similares, porém sem uma correspondência exata entre os textos que trazem essas compreensões e os textos que se enquadram nas três principais relações que elencamos. Sendo assim, podemos esclarecer melhor as compreensões dos pesquisadores comentando o que foi encontrado em cada uma dessas pesquisas, em uma ordem adequada para conectar essas compreensões e correspondências.

Vidotti e Kato (2018) utilizaram conceito imagem e conceito definição (TALL; VINNER, 1981) para investigar dificuldades, mais especificamente fatores de conflito potencial, no processo de aprendizagem de limite de funções de várias variáveis. Segundo os autores, foi possível identificar “que os conceitos imagem de função e de função limitada, importantes nesse conteúdo, estão em desacordo com o conceito formal o que potencializa alguns erros relacionados ao limite” (VIDOTTI; KATO, 2018, p. 930). Nessa perspectiva, as imagens conflitantes geram dificuldades de aprendizagem, indicando que o desenvolvimento do PMA (conceito imagem e conceito definição coerentes, com o conceito definição de acordo com a definição formal) é necessário para a aprendizagem.

Similarmente, Broetto e Santos-Wagner (2017a) fizeram um diagnóstico dos conhecimentos referentes a números racionais e irracionais trazidos por uma estudante, considerando que o conceito imagem permite diagnosticar dificuldades de aprendizagem e prever obstáculos. Desse modo, o desenvolvimento do PMA seria importante para a superação dos obstáculos. Além disso, os autores consideram “de suma importância que o professor conheça a imagem do conceito e a definição do conceito dos alunos antes de iniciar a discussão de qualquer assunto” (BROETTO;

SANTOS-WAGNER, 2017a, p. 72).

Em outro trabalho, Broetto e Santos-Wagner (2017b) desenvolveram um modelo, baseado em Tall e Vinner (1981) e outros referenciais, e exemplificaram sua utilização no diagnóstico de conceito imagem de números racionais e irracionais de uma estudante. Segundo os autores, “o uso desse modelo possibilita compreender as dificuldades relacionadas à construção de um conceito matemático não elementar como os números irracionais e, portanto, pode contribuir para o ensino e aprendizagem de matemática” (BROETTO; SANTOS-WAGNER, 2017b, p. 352). Assim, os autores consideram a utilidade do PMA na avaliação realizada pelo professor e reafirmam, nesse outro trabalho, a posição de que o conceito imagem permite diagnosticar dificuldades de aprendizagem dos estudantes.

Jorge (2017) também utilizou indícios de PMA para identificar dificuldades de aprendizagem, concluindo que a maioria dos estudantes da pesquisa não demonstrou uma abstração, segundo o referencial teórico, e que as dificuldades apresentadas referem-se a conteúdos de Educação Básica. Conforme o mesmo autor, um trabalho que focasse essas dificuldades poderia levar ao processo de abstração, o que indica uma concepção de que a análise dos processos de PMA ajuda na identificação de dificuldades (portanto, o referencial teórico do PMA pode auxiliar o professor) e que, ao superar essas dificuldades, os estudantes terão condições de desenvolver o PMA, evidenciando uma concepção de que a aprendizagem decorrente da superação das dificuldades leva ao desenvolvimento do PMA. Na introdução, o autor ainda revela que algumas disciplinas da graduação necessitam desse nível de pensamento mais avançado, indicando uma concepção de que desenvolver o PMA é necessário para a aprendizagem da Matemática Avançada.

Logo, em uma mesma pesquisa, Jorge (2017) demonstra algumas concepções: que a aprendizagem leva ao PMA; que o PMA é necessário para a aprendizagem de Matemática Avançada e que esse referencial teórico pode auxiliar o professor a diagnosticar dificuldades. Essas concepções não são contraditórias, uma vez que se pode pensar que o desenvolvimento do PMA e a aprendizagem dos conteúdos de Matemática Avançada (ou mesmo de Matemática Elementar) podem caminhar juntos, um contribuindo para o outro.

Essa mesma perspectiva pode ser verificada na pesquisa de Jesus e Savioli (2019), que identificam, em cada componente da Teoria APOS (DUBINSKY, 2002),

as possíveis concepções que os estudantes têm do conceito. As diferentes concepções dos estudantes indicam, para os autores, diversas possibilidades de compreensão do conceito, o que ressalta a importância de entender tais diferenças para que o docente possa intervir adequadamente no processo de ensino e aprendizagem.

Identificar as concepções de cada estudante participante também nos permitiu perceber que são diversas as possibilidades de compreensão de um conceito matemático. Os estudantes são diferentes, não somente no tempo que levam para aprender, mas também no modo como a aprendizagem ocorre, o que nos leva a acreditar que também não existe uma única decomposição genética para um conceito, ou seja, a construção de um conceito não é única. Entender, valorizar e discutir essas diferenças tornam-se ações necessárias ao professor em sua prática docente, possibilitando, assim, intervir e interagir no processo de ensino e aprendizagem quando necessário (JESUS; SAVIOLI, 2019, p. 22).

Assim, a aprendizagem implica na concepção (ação, processo, objeto, esquema) que o estudante passa a ter do conceito e, reciprocamente, o desenvolvimento de uma concepção mais próxima a um esquema significa um avanço na aprendizagem, ainda que esse avanço possa ocorrer, de acordo com Jesus e Savioli (2019), de diversos modos. A ideia de que não existe uma única decomposição genética para a construção de um conceito, válida para todos os estudantes, é apoiada por Dubinsky (2002), que ressalva que sua decomposição é um caminho razoável que os estudantes podem seguir para construir um conceito.

Outra pesquisa que analisou a compreensão de um conceito evidenciada por estudantes por meio de significados atribuídos ao conceito matemático foi a de Fonseca e Henriques (2018). Segundo os autores, esses significados “podem ser caracterizados por conceitos-imagem corretos e apropriados à situação em questão” (FONSECA; HENRIQUES, 2018, p. 1033). Fonseca e Henriques concluíram que

A diversidade de significados corretos que a generalidade dos estudantes atribui ao limite e que emergem dos seus conceito-imagem (TALL; VINNER, 1981), nomeadamente, o limite como um processo de aproximação ao objeto, como resultado da igualdade dos limites laterais e como resultado de uma correspondência implicativa baseada na noção de vizinhança, evidencia uma concepção adequada sobre a simbologia contida na definição formal de limite [...] (FONSECA; HENRIQUES, 2018, p. 1046).

Concluíram, também, que a “facilidade nas conversões e tratamentos entre as representações [...] evidencia compreensão do mesmo” (FONSECA; HENRIQUES, 2018, p. 1046).

Em outro estudo, Fonseca e Henriques (2020) reafirmam essa concepção:

De fato, os diversos significados corretos que a maioria dos estudantes atribuiu à continuidade, que emergem de seu conceito imagem e conceito definição evocados (Tall & Vinner, 1981) [sic], evidenciam uma concepção adequada dos estudantes sobre esse conceito e necessária para sua compreensão (FONSECA; HENRIQUES, 2020, p. 14, tradução nossa).

Ainda na perspectiva de Fonseca e Henriques (2020), o desenvolvimento do PMA se faz necessário para a compreensão correta dos conceitos, uma vez que conceitos imagem conflitantes limitam a aprendizagem:

Os significados podem, ainda, ser inexistentes ou conflitantes quando os conceitos imagem são evocados pelos estudantes em desconexão com o conceito definição, criando um conflito cognitivo. Assim, concepções inadequadas podem atuar como um obstáculo à aquisição de novos conhecimentos, limitando a aprendizagem de novos conceitos e sua compreensão [...] (FONSECA; HENRIQUES, 2020, p. 4, tradução nossa).

Vieira, Souza e Imafuku (2020) entendem que a elaboração de provas, justificativas e contraexemplos de afirmações matemáticas é fundamental para o desenvolvimento do PMA. Nesse sentido, os autores argumentam como as dificuldades na elaboração de provas dificultam o desenvolvimento do PMA.

Entendemos que todas as incompreensões, erros e limitações dos estudantes na elaboração de justificativas e argumentações em Matemática são dificultadores do desenvolvimento de processos mais sofisticados do Pensamento Matemático Avançado, como generalização e síntese, uma vez que tendem a restringir a expansão de resultados e de domínios de validade e inviabilizam a composição de conhecimentos fragmentados (VIEIRA; SOUZA; IMAFUKU, 2020, p. 16).

Teófilo, Lima e Menezes (2020), ao investigarem uma metodologia de ensino, consideraram que a análise dos indícios de PMA serviria de auxílio para evidenciar a aprendizagem dos estudantes.

[...] buscou-se investigar se a aplicação, por parte do professor da metodologia de ensino Sequência Fedathi, com os alunos matriculados no Grupo de Estudos desenvolveram aspectos cognitivos específicos sobre o Pensamento Matemático Avançado, que serviria de auxílio na análise de resultados para entender analisando a existência de uma aprendizagem significativa, buscando evidenciar a eficácia dessa metodologia (TEÓFILO; LIMA; MENEZES, 2020, p. 3).

Para entender se houve aprendizagem, com base no conceito imagem e no conceito definição dos estudantes, os autores consideraram a importância de ambos

e a coerência entre eles.

É importante entender que se o aluno apenas verbalizar uma Definição Conceitual Formal não podemos dizer que aquele conceito foi entendido por ele. Para que haja traços de construção de conhecimento o estudante deve possuir construções de Conceitos Imagens, ou seja, projetar em sua mente esquemas, experiências ou propriamente imagens sobre determinado conceito, como também, apresentar Conceito Definição Pessoal que esteja de acordo com a definição formal (TEÓFILO; LIMA; MENEZES, 2020, p. 11).

Nesse sentido, o desenvolvimento do PMA, caracterizado por conceitos imagem coerentes e conceito definição de acordo com a definição formal, é indicativo de construção de conhecimento. Os autores concluíram que, ao desenvolver aspectos cognitivos de PMA, a metodologia de ensino investigada contribuiu para a aprendizagem dos discentes, demonstrando uma concepção de que o desenvolvimento do PMA contribui para a aprendizagem.

Sousa e Almeida (2017), ao investigarem processos de PMA mobilizados em atividades de modelagem, apresentam uma concepção de que a aprendizagem de conceitos e métodos matemáticos pode resultar no desenvolvimento do pensamento matemático: “[...] nos referimos ao conhecimento da pessoa a respeito de conceitos matemáticos e ferramentas matemáticas, que podem resultar no desenvolvimento do pensamento matemático” (SOUSA; ALMEIDA, 2017, p. 712, tradução nossa). Além disso, as autoras consideram que o PMA pode ser a finalidade de um processo de ensino e é necessário para a aprendizagem em Matemática.

Em termos gerais, podemos argumentar que a atividade de modelagem matemática tem o potencial de desencadear processos cognitivos relacionados ao pensamento matemático elementar, bem como ao pensamento matemático avançado.  
[...] a sofisticação dos processos cognitivos e do pensamento foi necessária para a articulação entre os conceitos e na sua utilização para a abordagem da situação-problema (SOUSA; ALMEIDA, 2017, p. 722, tradução nossa).

Lopes (2019) considera que uma atividade que representa potencial de investigação para a formação de conceitos imagem e conceitos definição apoia a aprendizagem do conceito.

[...] a maneira como o conteúdo é explanado pode representar um rico potencial de investigação para a formação de imagens e definições de conceito por parte dos estudantes no curso de Licenciatura em Matemática. Nesse sentido, as atividades elaboradas no decorrer dessa dissertação podem ser parte de um conjunto de sugestões para apoiar a aprendizagem sobre operações de vetores no ensino superior (LOPES, 2019, p. 6).

Dessa afirmação, podemos interpretar que o referencial teórico do PMA pode auxiliar no planejamento do processo de ensino, ao contribuir na elaboração de atividades com potencial para a investigação dos indícios de PMA, como as atividades elaboradas por Lopes (2019).

No objetivo específico “Identificar se os participantes da pesquisa apresentam um pensamento matemático compatível com a compreensão necessária para operar geométrica e algebricamente com vetores” (LOPES, 2019, p. 18), percebe-se a ideia de que o pensamento matemático é necessário para a aprendizagem do conteúdo matemático.

A autora considera, ainda, que o PMA pode auxiliar “na transição da representação geométrica (concreto, palpável) para a representação algébrica (abstrata, puramente mental), superando dificuldades de estudantes em relação a Vetores” (LOPES, 2019, p. 30). A mudança de representação é, de acordo com Dreyfus (2002), um processo complexo, pois envolve muita informação a ser tratada.

Amorim *et al.* (2020, p. 390) entendem que um conceito imagem rico dos licenciandos com relação a provas é “[...] condição necessária para proporcionar aos seus futuros alunos a oportunidade de construção de uma imagem conceitual igualmente rica sobre esse tema”. Segundo os autores, “a imagem conceitual de um tema não é apenas o domínio das noções envolvidas, mas, também, perceber as relações entre elas”. Para desenvolver esse conceito imagem relativo a provas nos futuros professores, um caminho favorável, conforme os autores, seria um que envolvesse experimentações para testar conjecturas, verificação empírica, tentativa e erro e que permitisse aos licenciandos vivenciar a atividade matemática de validação de seus resultados.

Rodrigues (2019) elaborou uma sequência de atividades a respeito do comprimento de curvas planas e investigou as contribuições de sua aplicação. As atividades foram analisadas por meio de níveis de conceito imagem (DOMINGOS, 2003). Segundo a autora, o referencial teórico ressalta

[...] a importância de um conceito matemático não ser ensinado apenas por meio de sua definição formal, e sim a partir das imagens conceituais que os estudantes possuem a respeito do conceito. Acredita-se que, desse modo, a aprendizagem torna-se mais eficaz para o aluno construir a definição formal do conceito (RODRIGUES, 2019, p. 13).

Essa consideração de Rodrigues (2019) está de acordo com as ideias de Tall (2002) de que o conteúdo não deve ser apresentado primeiramente em seu aspecto mais formal.

Outra pesquisa que se baseou nas considerações do referencial teórico do PMA quanto ao processo de ensino e aprendizagem foi a de Menezes (2018). O autor elaborou caracterizações de "bom professor" e "bom aluno", correspondentes a posturas docentes e discentes adequadas de acordo com a Sequência Fedathi e o referencial teórico do PMA. Algumas dessas posturas referem-se a considerações dos teóricos a respeito da mediação docente em sala de aula, tais como estimular o pensamento do estudante ao invés de fornecer o produto final do pensamento matemático; valorizar o erro, a investigação, e valorizar o ato criativo, da formulação de conjecturas ao estágio final de refinamento e prova (TALL, 2002; DREYFUS, 2002).

Menezes (2018) utilizou o referencial teórico do PMA na avaliação dos estudantes no pré-teste e no pós-teste, analisando se os estudantes apresentaram ou não os processos ou indícios de PMA. A partir da evolução no desenvolvimento dos indícios de PMA dos estudantes do pré-teste para o pós-teste, o autor reconheceu "o desenvolvimento da maioria dos alunos no conhecimento de taxas relacionadas, em particular, do entendimento e relação da derivada com o conteúdo das taxas relacionadas" (MENEZES, 2018, p. 80), admitindo que o desenvolvimento do PMA indica um desenvolvimento no entendimento e conhecimento do conceito.

Flôres, Fonseca e Bisognin (2020) analisaram processos de PMA mobilizados por estudantes ao realizarem tarefas exploratórias envolvendo representações de números racionais. As autoras consideram que as tarefas exploratórias favorecem o desenvolvimento do PMA, visto que possibilitam ao estudante situações em que ele deve observar, elaborar e testar conjecturas. Segundo as autoras, "Com essa prática, deixamos de apresentar o conhecimento matemático como um algo pronto, para possibilitar ao aluno sua descoberta" (FLÔRES; FONSECA; BISOGNIN, 2020, p. 219). Assim, as autoras justificam a importância da atividade exploratória para a aprendizagem do conteúdo e o desenvolvimento do PMA.

Entretanto, além desse desenvolvimento mútuo, não encontramos outras relações entre o PMA e a aprendizagem do conteúdo matemático estabelecidas por Flôres, Fonseca e Bisognin (2020). A investigação quanto aos processos de PMA não se mostrou relacionada a inferir uma aprendizagem, mas a verificar o desenvolvimento

do PMA considerando-o como a finalidade do processo de ensino. As autoras afirmam que a abstração “deve ser uma das preocupações quando se trata da Matemática em um nível superior” (FLÔRES; FONSECA; BISOGNIN, 2020, p. 217). Essa concepção está de acordo com Dreyfus (2002, p. 34), ao defender que, “Se um estudante desenvolve a habilidade de conscientemente fazer abstrações de situações matemáticas, ele alcançou um nível avançado de pensamento matemático. Alcançar essa capacidade de abstração pode muito bem ser o objetivo mais importante da educação matemática avançada”.

Mateus-Nieves e Jimenez (2020) identificaram processos de PMA dos estudantes para analisar um seminário eletivo, proposto por eles, para o desenvolvimento de habilidades de generalização matemática no estudo da Teoria dos Nós.

Articular alguns conceitos da Teoria dos Nós com o desenvolvimento de habilidades de Pensamento Matemático Avançado permite ampliar o processo de generalização matemática de forma a fortalecer a gama de estratégias didáticas que orientam o ensino e a aprendizagem da Matemática de uma maneira reflexiva e inovadora que possibilita a interação com vários cenários e níveis de formação (MATEUS-NIEVES; JIMENES, 2020, p. 66, tradução nossa).

Assim, percebemos contribuições do referencial teórico do PMA para a elaboração de estratégias de ensino. Além disso, Mateus-Nieves e Jimenez (2020) consideraram o desenvolvimento do processo de generalização matemática e das habilidades de PMA a ele relacionadas como finalidades do seminário proposto.

Fontenele (2018) buscou compreender a influência da mediação docente, apoiada em uma sequência de ensino, no desenvolvimento do PMA, considerando esse desenvolvimento como a finalidade do processo de ensino em suas análises. Contudo, a autora justificou a importância do desenvolvimento do PMA para a aprendizagem em Álgebra Linear.

[...] compreendemos, que um ensino que proporcione o desenvolvimento do PMA discente pode auxiliar a amenizar os problemas no ensino de Álgebra Linear, uma vez que seu domínio pressupõe habilidades que tornam o aluno mais apto a lidar com os conceitos e definições. Para tanto, é necessário que as atividades trabalhadas sejam planejadas considerando os processos que envolvem o PMA, de modo a permitir ao aluno atuar como sujeito de sua aprendizagem (FONTENELE, 2018, p. 15-16).

Ainda segundo Fontenele (2018, p. 138),

[...] os processos constitutivos do PMA precisam ser considerados desde a preparação das sessões didáticas, pois, assim, o professor terá claro em seus objetivos quais processos os alunos devem ser motivados a vivenciar e o que fazer para incentivar sua manifestação.

Desse modo, a autora considera que determinados processos de PMA são fundamentais no aprendizado de cada conteúdo matemático. Além disso, ao considerar a importância do desenvolvimento desses processos para a aprendizagem, a autora respalda a atitude exploratória em sala de aula, vinculada ao quadro teórico (DREYFUS, 2002).

Por fim, reunimos, no Quadro 2, as principais relações dos indícios de PMA com a aprendizagem que interpretamos a partir das afirmações dos autores do *corpus* de análise.

Quadro 2: Principais concepções identificadas nas pesquisas do *corpus*

Concepções identificadas	Referências
O desenvolvimento do PMA contribui para a aprendizagem dos conceitos matemáticos.	Broetto e Santos-Wagner (2017a, 2017b); Fonseca e Henriques (2020); Fontenele (2018); Jesus e Savioli (2019); Jorge (2017); Lopes (2019); Sousa e Almeida (2017); Teófilo, Lima e Menezes (2020); Vidotti e Kato (2018).
O PMA é necessário para a aprendizagem dos conceitos matemáticos.	Fonseca e Henriques (2020); Fontenele (2018); Jorge (2017); Lopes (2019); Sousa e Almeida (2017); Vidotti e Kato (2018).
A aprendizagem dos conceitos matemáticos pode ser inferida pelo desenvolvimento do PMA.	Amorim <i>et al.</i> (2020); Fonseca e Henriques (2018, 2020); Jesus e Savioli (2019); Jorge (2017); Menezes (2018); Teófilo, Lima e Menezes (2020); Vieira, Souza e Imafuku (2020).
A aprendizagem dos conceitos matemáticos contribui para o desenvolvimento do PMA.	Jesus e Savioli (2019); Jorge (2017); Sousa e Almeida (2017); Vieira, Souza e Imafuku (2020).
A finalidade de uma abordagem didática pode ser o desenvolvimento do PMA.	Flôres, Fonseca e Bisognin (2020); Fontenele (2018); Jorge (2017); Mateus-Nieves e Jimenez (2020); Sousa e Almeida (2017); Vieira, Souza e Imafuku (2020).
A aprendizagem dos conceitos matemáticos e o desenvolvimento do PMA ocorrem juntos.	Flôres, Fonseca e Bisognin (2020); Jesus e Savioli (2019); Jorge (2017).
A aprendizagem dos conceitos matemáticos e o desenvolvimento do PMA contribuem um para o outro.	Jesus e Savioli (2019); Jorge (2017); Sousa e Almeida (2017).
O referencial teórico do PMA auxilia o professor no diagnóstico de dificuldades.	Broetto e Santos-Wagner (2017a, 2017b); Jesus e Savioli (2019); Jorge (2017); Vidotti e Kato (2018).
O referencial teórico do PMA auxilia o professor no embasamento do processo de ensino e aprendizagem.	Amorim <i>et al.</i> (2020); Flôres, Fonseca e Bisognin (2020); Fontenele (2018); Jesus e Savioli (2019); Lopes (2019); Mateus-Nieves e Jimenez (2020, 2020); Menezes (2018); Rodrigues (2019).

Fonte: Dados da Pesquisa

A seguir, apresentamos algumas considerações a partir desses resultados.

## 5 Considerações Finais

Neste artigo, realizamos um levantamento de pesquisas que investigaram o Pensamento Matemático Avançado (PMA) no contexto da licenciatura em Matemática. Visando encontrar o máximo de pesquisas que nos fosse possível, utilizamos diversos mecanismos de busca, conforme descrevemos na seção de procedimentos metodológicos. Foram selecionadas dezessete pesquisas completas e recentes (realizadas a partir de 2017) para constituir o *corpus* de análise, em que procuramos entender como relacionam a aprendizagem em Matemática com os indícios de pensamento matemático.

Encontramos diferentes concepções, tais como: o PMA contribui ou é necessário para a aprendizagem dos conceitos; a aprendizagem dos conceitos pode ser inferida pelo desenvolvimento do PMA; a finalidade de uma abordagem pode ser o desenvolvimento do PMA; a aprendizagem dos conceitos e o desenvolvimento do PMA ocorrem juntos ou contribuem um para o outro; o referencial teórico do PMA auxilia o professor no diagnóstico de dificuldades ou no embasamento do processo de ensino e aprendizagem; entre outras.

Uma vez estabelecidas, podemos nos perguntar como se dão essas relações. Por exemplo: como podemos entender que o desenvolvimento do PMA indica que houve aprendizagem dos conteúdos matemáticos? Temos algumas pistas para promover explicações. Vieira, Souza e Imafuku (2020) argumentam que os processos de generalização e síntese requerem a expansão de resultados e de domínios de validade e a composição de conhecimentos fragmentados. Assim, além da importância de justificativas e argumentações que os autores apontam, é necessário que os estudantes compreendam os conceitos e relações entre eles para dominarem tais processos.

Conforme observamos na análise do *corpus*, explicações para as relações entre a aprendizagem e o desenvolvimento do PMA não costumam ser abordadas pelos pesquisadores, mas é algo que poderia ser explorado para esclarecer as contribuições do referencial teórico do PMA nas avaliações inclusas nas pesquisas.

Verificamos que a maioria das pesquisas encontradas, que utilizaram o referencial teórico do PMA em estudos na licenciatura em Matemática, analisaram

indícios de pensamento matemático na produção escrita dos estudantes. Encontramos, porém, pesquisas que apresentam outras formas de utilização do referencial teórico do PMA, tais como a fundamentação para a propositura de abordagens didáticas, a análise de materiais didáticos e discussões teóricas.

O referencial teórico do PMA utilizado como fundamentação para propostas didáticas e as considerações que elencamos neste artigo quanto a contribuições desse referencial no embasamento do processo de ensino e aprendizagem indicam possibilidades não somente para pesquisadores, como também para professores. Do mesmo modo, dependendo dos objetivos envolvidos, o embasamento de avaliações por meio desse referencial teórico é uma possibilidade para pesquisadores e professores. Conforme exemplificamos em Inarejos, Kirnev, Consani e Savioli (2022), diferentes referenciais teóricos podem enfatizar diferentes aspectos do pensamento do estudante na análise de uma produção escrita.

Assim, com as relações interpretadas a partir das pesquisas, esperamos ter contribuído para o entendimento de como o PMA pode ser um dos aportes teóricos a contribuir na avaliação da aprendizagem.

### **Agradecimentos**

Agradecemos à Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) e à Fundação Araucária pelo apoio.

### **Referências**

AMORIM, M. E.; PIETROPAOLO, R. C.; POWELL, A. B.; SILVA, A. F. G. Concepções de Estudantes de um Curso de Licenciatura em Matemática sobre Argumentações e Provas. **Práxis Educacional**, v. 16, n. 38, p. 386-401, 2020.

BROETTO, G. C.; SANTOS-WAGNER, V. M. P. Conhecimentos relativos a números racionais e irracionais de uma aluna ingressante na Licenciatura em Matemática. **Revista de Ensino de Ciências e Matemática**, v.8, n.1, p.67-82, 2017.

BROETTO, G. C.; SANTOS-WAGNER, V. M. P. Um modelo para analisar a imagem do conceito de estudantes universitários: o caso dos números irracionais. **Vidya**, Santa Maria, v. 37, n. 2, p. 335-354, 2017.

DOMINGOS, A. M. D. **Compreensão de Conceitos Matemáticos Avançados - a Matemática no Início do Superior**. 2003. 407 f. Tese (Doutorado em Ciências da Educação) — Faculdade de Ciências e Tecnologia, Universidade Nova de Lisboa, Lisboa.

DREYFUS, D. Advanced Mathematical Thinking Process. In: TALL, D. **Advanced**

**Mathematical Thinking**. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2002, p. 25-41.

DUBINSKY, E. Reflective abstraction in advanced mathematical thinking. In: TALL, D. **Advanced Mathematical Thinking**. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers. 2002, p. 95-123.

FIORENTINI, D.; LORENZATO, S. **Investigação em Educação Matemática: percursos teóricos e metodológicos**. 1ª ed. Campinas: Autores Associados, 2006.

FLÔRES, M. V.; FONSECA, J. A.; BISOGNIN, E. Processos do pensamento matemático avançado revelados nas resoluções de tarefas envolvendo números racionais. **Ensino da Matemática em Debate**, São Paulo, v. 7, n. 1, p. 217-238, 2020.

FONSECA, V.; HENRIQUES, A. Compreensão da Definição Formal de Limite: um estudo na formação inicial de professores de Matemática. **Bolema**, Rio Claro, v. 32, n. 62, p. 1030-1049, 2018.

FONSECA, V. G.; HENRIQUES, A. C. C. B. Learning with Understanding the Continuity Concept: A Teaching Experiment with Brazilian Pre-service Mathematics Teachers. **International Electronic Journal of Mathematics Education**, v. 15, n. 3, p. 1-17, 2020.

FONTENELE, F. C. F. **Contribuições da Sequência Fedathi para o desenvolvimento do Pensamento Matemático Avançado: uma análise da mediação docente em aulas de álgebra linear**. 2018. 192 f. Tese (Doutorado em Educação, Currículo e Ensino) - Universidade Federal do Ceará, Fortaleza.

GIL, A. C. **Como Elaborar Projetos de Pesquisa**. 4ª ed. São Paulo: Editora Atlas, 2002.

INAREJOS, O.; KIRNEV, D. C. B.; CONSANI, A. C. C.; SAVIOLI, A. M. P. D. Alguns Referenciais Teóricos Relacionados ao Pensamento Matemático Avançado. **Acta Scientiae**, Canoas, v. 24, n. 3, p. 216-243, 2022.

JESUS, M. S.; SAVIOLI, A. M. P. D. Concepções manifestadas por licenciandos em matemática ao lidarem com tarefas envolvendo o conceito de anel. **Educação Matemática Pesquisa**, São Paulo, v. 21, n.1, p. 1-24, 2019.

JORGE, J. L. **Teoria de Conjuntos: Processos Manifestados do Pensamento Matemático Avançado**. 2017, 132 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) — Universidade Estadual de Londrina, Londrina.

LOPES, L. M. L. **Formação e reelaboração de imagens e definições de conceito relacionadas ao ensino de vetores em geometria analítica**. 2019. 100 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Universidade Federal de Juiz de Fora, Juiz de Fora.

MATEUS-NIEVES, E. JIMENEZ, C. A. R. Mathematical generalization from the articulation of advanced mathematical thinking and knot theory. **Acta Scientiae**, Canoas, v. 22, n. 3, p. 65-82, 2020.

MENEZES, D. B. **O ensino do cálculo diferencial e integral na perspectiva da**

**Sequência Fedathi:** caracterização do comportamento de um bom professor. 2018. 128 f. Tese (Doutorado em Educação) — Universidade Federal do Ceará, Fortaleza.

RODRIGUES, E. B. **Contribuições de uma Sequência de Atividades para a Compreensão do Conceito de Comprimento de Curva.** 2019. 94 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática) - Universidade Franciscana, Santa Maria.

SOUSA, B. N. P. A.; ALMEIDA, L. M. W. Mathematical thinking in mathematical modelling activities. **Acta Scientiae**, Canoas, v. 19, n. 5, p. 709-724, 2017.

TALL, D. The Psychology of Advanced Mathematical Thinking. In: TALL, D. **Advanced Mathematical Thinking.** Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2002, p. 3-21.

TALL, D.; VINNER, S. Concept Image and Concept Definition in Mathematics with particular reference to Limits and Continuity. **Educational Studies in Mathematics**, Dordrecht, v. 12, p. 151-169, 1981.

TEÓFILO, K. M. Á.; LIMA, F. L. S.; MENEZES, D. B. Cálculo diferencial e integral: da sequência fedathi ao pensamento matemático avançado. **Research, Society and Development**, v. 9, n. 7, p. 1-19, 2020.

VIDOTTI, D. B.; KATO, L. A. Um Estudo sobre Conflitos no Processo de Aprendizagem de Limite de Funções de Várias Variáveis. **Acta Scientiae**, Canoas, v. 20, n. 5, p. 930-949, 2018.

VIEIRA, W.; SOUZA, V. H. G. de; IMAFUKU, R. S. Sobre Justificativas em Questões do Tipo Verdadeiro/Falso de Estudantes de Licenciatura em Matemática. **Ciência & Educação**, Bauru, v. 26, p. 1-17, 2020.