Recebido: 24/02/2022 ■ Aprovado: 11/08/2022 ■ Publicado: 31/10/2022

eISSN 2179-426X
10.26843/rencima.v13n5a15

RENCIMA Revista de Ensino de Ciências e Matemática

Taxa de variação a partir dos infinitésimos no esboço de curvas de funções do Ensino Médio

Bárbara Cristina Pasa[1]

Méricles Thadeu Moretti[2]

Resumo: Com o intuito de compreender efetivamente uma curva e o fenômeno que ela retrata, Raymond Duval propõe esboçar curvas de funções a partir da abordagem de interpretação global de propriedades figurais, que consiste em identificar unidades significativas nos registros de representação gráfico e algébrico da curva e articulá-las. Ancorado nessa abordagem, um caminho alternativo para esboçar curvas que utiliza como recurso de articulação entre unidades significativas a taxa de variação instantânea da função calculada e compreendida a partir da noção de infinitésimo, em substituição à ideia de derivada, que é um assunto do ensino superior, é apresentado e trilhado. Além de possibilitar o entendimento da relação entre variação da função e esboço da curva, verificou-se que polinômios do segundo e terceiro graus se mostraram convenientes para o estudo, uma vez que os cálculos implementados na execução das atividades no esboço de curvas estão ao alcance dos alunos nesse nível de ensino.

Palavras-chave: Interpretação Global de Propriedades Figurais. Variabilidade da Função. Noção de Infinitésimo. Representações Semióticas.

Rate of change from the infinitesimals in the sketch of High School function curves

Abstract: In order to effectively understand a curve and the phenomenon it portrays, Raymond Duval proposes to sketch function curves from the approach of global interpretation of figural properties, which consists of identifying significant units in the graphic and algebraic representation of the curve and articulating them. them. Anchored in this approach, an alternative way to sketch curves that uses as a resource of articulation between significant units the instantaneous rate of variation of the function calculated and understood from the notion of infinitesimal, replacing the idea of derivative that is a subject of higher education, is displayed and tracked. In addition to making it possible to understand the relationship between the variation of the function and the curve sketch, it was found that polynomials of the second and third degrees proved to be convenient for the study, since the calculations implemented in the execution of activities in the sketch of curves are within reach. of students at this level of education.

Keywords: Global Interpretation of Figural Properties. Function Variability. Notion of Infinitesimal. Semiotic Representations.

Tasa de cambio de los infinitesimales en el bosquejo de las curvas de función de la Escuela Secundaria

Resumen: Para comprender efectivamente una curva y el fenómeno que representa,

[1] Doutora em Educação Científica e Tecnológica. Professora do Programa de Pós-Graduação em Educação da Universidade Federal da Fronteira Sul (UFFS). Rio Grande do Sul, Brasil. ✉ bapasa1@hotmail.com https://orcid.org/0000-0001-5439-2060.

[2] Doutor em Educação Matemática. Professor do Programa de Pós-Graduação em Educação Científica e Tecnológica da Universidade Federal de Santa Catarina (UFSC). Santa Catarina, Brasil. ✉ mthmoretti@gmail.com https://orcid.org/0000-0002-3710-9873.

Raymond Duval propone dibujar curvas de función desde el enfoque de interpretación global de propiedades figurativas, que consiste en identificar unidades significativas en la representación gráfica y algebraica de la curva y articularlas. Anclado en este enfoque, surge una forma alternativa de trazar curvas que utiliza como recurso de articulación entre unidades significativas la tasa de variación instantánea de la función calculada y entendida desde la noción de infinitesimal, reemplazando la idea de derivada que es objeto de estudio en la educación superior, se muestra y rastrea. Además de permitir comprender la relación entre la variación de la función y el trazo de la curva, se encontró que los polinomios de segundo y tercer grado resultaron convenientes para el estudio, ya que los cálculos implementados en la ejecución de actividades en el dibujo de las curvas están al alcance de los alumnos de este nivel educativo.

Palabras clave: Interpretación Global de Propiedades Figurativas. Variabilidad de Funciones. Noción de Infinitesimal. Representaciones Semióticas.

1 Introdução[3]

A sociedade contemporânea demanda dos cidadãos habilidades e conhecimentos científicos que possibilitem acompanhar o desenvolvimento tecnológico e lidar com situações complexas diárias, bem como aprendizagens contínuas e massivas relacionadas à interpretação, argumentação, reflexão, resolução de problemas da realidade, utilização de modelos matemáticos em situações diversas e conhecimentos sobre diferentes tecnologias. Nesse cenário, ações que perpassam a compreensão da Matemática, mais precisamente dos objetos matemáticos e da sua relação com os objetos do universo material, a qual permite consideráveis ações concernentes a processos e fenômenos físicos das ciências naturais e humanas (DUVAL, 2003), são fundamentais. No entanto, apesar da premência e crescente demanda no que tange à compreensão da Matemática atualmente, o contexto escolar é permeado por diversos problemas relacionados à aprendizagem dos estudantes e as particularidades relativas ao acesso e à apreensão dos objetos matemáticos podem ser algumas das causas desses problemas.

As dificuldades de acesso perceptível e instrumental aos objetos matemáticos fizeram com que fosse criada, ao longo da história humana, uma variedade significativa de formas de representá-los. De acordo com Duval (2003), um objeto matemático pode ser dado e acessado somente mediante representações, as quais podem ser muito distintas. Porém, uma representação não é o objeto matemático e se torna essencial, para a compreensão de um objeto matemático, jamais confundi-lo

[3] Este artigo é recorte de uma tese de doutorado defendida no Programa de Pós-Graduação em Educação Científica e Tecnológica da Universidade Federal de Santa Catarina, escrita pela primeira autora e orientada pelo segundo autor.

com suas representações. Essas características tornam o ensino e a aprendizagem matemáticos peculiares e distintos de outras áreas da ciência.

Nesse contexto, o objeto matemático esboço de curvas, enquanto forma de representação de fenômenos ou de situações cotidianas, é cada vez mais utilizado, o que torna seu ensino e aprendizagem, no âmbito escolar, essenciais. Por isso, o esboço de curvas é o foco das reflexões suscitadas neste trabalho. Reflexões essas que se apoiam na teoria cognitiva de Duval, no sentido de que a compreensão de um objeto matemático está vinculada à articulação de diferentes registros de representação semiótica e, no caso do esboço de curvas, a uma abordagem capaz de propiciar a interpretação global de propriedades figurais.

Segundo Duval (2011a), Mattos Filho e Menezes (2010) e Rezende (2003), a abordagem de esboço de curvas comumente utilizada no ensino, chamada abordagem ponto a ponto, na maioria das vezes impede que os estudantes percebam a transformação, o movimento e o dinamismo existentes nesse conceito, além de não possibilitar atividades cognitivas fundamentais para a aprendizagem. Em artigo intitulado "Gráficos e equações: a articulação de dois registros", Duval (2011a) apresenta e discute a abordagem de interpretação global de propriedades figurais para esboçar curvas, que consiste em identificar unidades básicas simbólicas do registro algébrico e variáveis visuais ou unidades básicas gráficas, no registro gráfico, e, mais do que isso, perceber de que forma modificações em um registro influenciam o outro. Essa apresentação é feita analisando a função afim $y = ax + b$, utilizando os coeficientes a e b como unidades básicas simbólicas e a inclinação da reta e os ângulos com os eixos como as variáveis visuais.

Pasa e Moretti (2016) e Pasa (2017) apresentam, com base na abordagem de interpretação global de propriedades figurais, um caminho alternativo de esboço de curvas utilizando, como recurso para a articulação entre as unidades significativas de cada registro, a análise infinitesimal da taxa de variação da função. A taxa de variação é muito utilizada no Ensino Médio, porém é aprofundada e compreendida somente no ensino superior a partir de uma construção formal via derivada. O caminho alternativo perpassa a compreensão das taxas de variação via noção de infinitésimos e o esboço da curva é possível pela análise da taxa de variação.

As taxas de variação de uma função são elementos que carregam informações importantes para o esboço e interpretação de uma curva, perpassando o

REnCiMa, São Paulo, v. 13, n. 5, p. 1-24, out./dez. 2022

entendimento de diversos fenômenos físicos, químicos, biológicos, econômicos, matemáticos. O estudo das taxas de variação de funções também possibilita dar significado ao estudo das funções no Ensino Médio. Contudo, trabalhar a variabilidade de funções na perspectiva do ensino superior, a partir de limites, é inviável para estudantes do Ensino Médio devido ao excesso de formalismo e à linguagem matemática requerida para tal.

Por essa razão, as construções apresentadas e discutidas neste artigo, algumas já registradas em Pasa (2017), trilham o caminho alternativo, também profunda e amplamente exposto nesta tese, trabalhando com conceitos intuitivos do Cálculo no Ensino Médio, utilizando-os como recursos para o esboço da curva, sem a formalização das noções de limite e derivada, mas por meio da noção de infinitésimo. De acordo com Pasa e Moretti, “esta noção, trabalhada de forma intuitiva para o cálculo e compreensão da variação instantânea de funções, pode proporcionar uma compreensão inicial sobre a variabilidade, essencial para o entendimento de fenômenos neste nível de ensino” (2016, p. 7). O caminho alternativo analisado perpassa a articulação de unidades básicas simbólicas referentes à taxa de variação da função e de unidades básicas gráficas referentes à variabilidade, crescimento e decrescimento, pontos críticos e concavidade.

As produções apresentadas neste artigo foram coletadas em um trabalho pedagógico realizado em 2017 com estudantes do terceiro ano do Ensino Médio, cujo foco foi desenvolver o pensamento variacional na perspectiva do caminho alternativo, com o propósito de compreender e esboçar curvas de funções polinomiais do segundo e do terceiro graus. As construções produzidas são base para as discussões e análises realizadas a respeito da aprendizagem, da abordagem de interpretação global, do caminho alternativo e dos discursos utilizados pelos estudantes.

2 Caminho alternativo de esboço de curvas de funções

O caminho alternativo para esboçar curvas de funções no âmbito do Ensino Médio baseia-se no cálculo, por meio da noção de infinitésimo, e na análise das taxas de variação instantâneas da função a ser esboçada. Assim, são identificadas unidades simbólicas na expressão algébrica da taxa de variação e unidades gráficas referentes à variabilidade da função.

REnCiMa, São Paulo, v. 13, n. 5, p. 1-24, out./dez. 2022

2.1 Taxa de variação de uma função na direção da interpretação global de propriedades figurais

As taxas de variação de uma função e a relação destas com a compreensão e o esboço de curvas são somente trabalhadas, de forma mais aprofundada, no Ensino Superior, especificamente nos cursos de Cálculo Diferencial e Integral. Esses cursos têm sido foco de recorrentes pesquisas (BARUFI, 1999; CAVASOTTO, 2010; CURY, 2007; OLIVEIRA e RAAD, 2012; REZENDE, 2003; SARUBBI e SOARES, 2009), devido aos altos índices de reprovações e dificuldades no ensino e na aprendizagem. Para essas dificuldades de aprendizagem nesse nível de ensino, os trabalhos de Ávila (2006), Duclos (1992), Oliveira (2010), André (2008), Pereira (2009), Rezende (2003) e De Souza *et al.* (2013) apontam – como solução ou uma possível forma de minimizá-las — o estudo de noções do Cálculo no Ensino Médio.

David Tall (1980, 1982, 2010), pesquisador do desenvolvimento cognitivo do pensamento matemático avançado, discute o ensino de Cálculo e, em seu trabalho *A Sensible approach to the Calculus*, propõe uma abordagem para o estudo do Cálculo ancorado na evidência dos sentidos humanos usando esses *insights* como uma base significativa para desenvolvimentos posteriores (2012, p. 1). Sua abordagem não é necessariamente baseada em conceitos conhecidos, mas propõe que ideias fundamentais do cálculo sejam desenvolvidas naturalmente numa sequência que faça sentido para o aluno para fins gerais e, também, para apoiar intuições em aplicações e fornecer um significado ao conceito de limite e/ou de infinitesimais, posteriormente.

De acordo com Tall (2010), o desenvolvimento do pensamento matemático pode ser categorizado em três mundos. O primeiro mundo ocorre a partir de nossas percepções naturais e ações humanas, construindo imagens mentais verbalizadas de maneira cada vez mais sofisticada e que se tornam entidades mentais perfeitas em nossa imaginação. O segundo, nomeado de mundo simbólico *proceptual,* é o mundo dos símbolos que usamos para cálculos e manipulação em aritmética, álgebra, cálculo e perpassa as ações que realizamos e traduzimos em computação e manipulação simbólicas. O terceiro mundo, o mundo axiomático formal, evolui no âmbito das formulações de definições lógicas e desenvolvimento de estruturas de prova formal.

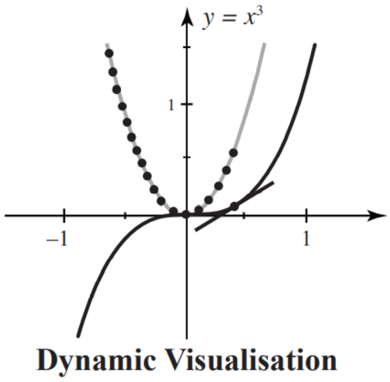
Segundo Tall (2010), os gráficos e a noção de inclinação habitam o mundo corporificado de objetos e suas propriedades (primeiro mundo), sugerindo um trabalho em termos do que o autor chama de continuidade natural e retidão local. Nessa

REnCiMa, São Paulo, v. 13, n. 5, p. 1-24, out./dez. 2022

proposta, a base para desenvolver o Cálculo é a maneira como nós pensamos naturalmente sobre as ideias. Em particular, considera como nós desenvolvemos por meio de nossas percepções, operações e uso da linguagem para formular ideias cada vez mais sofisticadas.

Diante disso, a ideia de retidão local é desenvolvida como base para o entendimento da inclinação de uma curva. Inicialmente, o autor (2012) sugere "ver" a retidão local a partir da observação de uma pequena parte do gráfico, percebendo como a inclinação da curva muda suavemente ao longo de seu comprimento. Posteriormente, utiliza a tecnologia de um *software* para traçar os dados numéricos e calcular a inclinação em pontos específicos. Assim, sua proposta se ancora na utilização simultânea da visualização dinâmica proporcionada por um *software* e da operação simbólica para que o aluno compreenda a ideia de retidão local, relacionada com a inclinação da curva. Um exemplo dessa correspondência entre visualização dinâmica e simbolismo está apresentado na Figura 1, em que o autor encontra a inclinação da curva da função $y = x^3$ a partir a ideia de $\frac{dy}{dx}$ como um quociente das componentes do vetor tangente.

Figura 1: Estudo da inclinação de uma curva a partir da visualização dinâmica e simbolismo.



Slope from x to $x+h$

$$= \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$= \frac{(x^3+3x^2h+3xh^2+h^3)-x^3}{h}$$

$$= 3x^2+3xh+h^2$$

For small h,
the slope stabilises to $\mathbf{3x^2}$.

Symbolism

Fonte: Tall (2010, p. 13).

Ancorados nas ideias dos autores supracitados, Pasa e Moretti (2016) apresentam e Pasa (2017) detalha e aprofunda uma alternativa de esboçar curvas no Ensino Médio em que o estudo das taxas de variação instantâneas da função ocorre na perspectiva do simbolismo[4] de Tall (2010) e por meio da compreensão e utilização da noção de infinitésimo. Essa noção se aproxima das ideias de Milani (2004) e Cabral e Baldino (2006), os quais fundamentam a construção das noções iniciais de Cálculo

[4] Tall (2010) utiliza a correspondência entre visualização dinâmica (tecnologia) e simbolismo para a compreensão da inclinação da curva. Neste trabalho, utilizou-se apenas o simbolismo para, a partir dele, concluir sobre a curva.

REnCiMa, São Paulo, v. 13, n. 5, p. 1-24, out./dez. 2022

para não matemáticos profissionais no uso de infinitésimos. Para esses autores, a construção dos conceitos centrais utilizando infinitésimos é mais intuitiva do que a obtida a partir de limites, pois a simbologia dos infinitésimos é mais simples, por não recorrer a processos infinitos, evita muitas dificuldades de aprendizagem. A noção de infinitésimos, aplicada de forma intuitiva para o cálculo e a compreensão da variação instantânea de funções polinomiais do segundo e terceiro graus, por sua vez, proporciona o esboço da curva e uma percepção sobre a variabilidade de funções, essencial para o entendimento de fenômenos.

2.2 A noção de infinitésimo

Os infinitésimos permearam a construção do Cálculo ao longo da história da ciência, apesar das inconsistências teóricas e das diferentes concepções desenvolvidas. Na Matemática, porém, seu retorno aconteceu com a apresentação de uma nova teoria para a análise matemática por Abraham Robinson (1918-1974), baseada nos infinitésimos e no uso da teoria de modelos. Um esboço dessa teoria foi apresentado em 1960 em um seminário na Universidade de Princeton, Estados Unidos, e depois, em janeiro de 1961, no encontro anual da *Association for Symbolic Logic*, quando é, então, publicada, nos *Proceedings of the Royal Academy of Sciences of Amsterdam*, sob o título *Non-Standard Analysis*. Após, em 1966, essa publicação foi editada como livro e sua segunda edição — revisada por Robinson — lançada em 1974, é reeditada em 1996.

No trabalho de Robinson, o tratamento dispensado às quantidades infinitesimais reflete de forma precisa as ideias originais de Leibniz. Nele, Robinson estabelece um modelo *não standard* de ordem superior para a aritmética e um modelo *não standard* para a análise, os quais preservam suas operações e propriedades usuais. O primeiro baseia-se numa extensão não *standard* do conjunto dos números naturais, $\mathbb{N}$, denotada por $^*\mathbb{N}$, cujos elementos, que incluem números naturais infinitos, são chamados números hipernaturais. O segundo baseia-se numa extensão do conjunto dos números reais, $\mathbb{R}$, denotada por $^*\mathbb{R}$, que inclui números reais infinitos e infinitésimos, denominados números hiper-reais (CARVALHO e D'OTTAVIANO, 2006).

Na perspectiva dessa nova teoria, o cálculo infinitesimal[5] pressupõe, como

[5] Aprofundamento sobre o Cálculo Infinitesimal pode ser encontrado em Keisler (2011).

REnCiMa, São Paulo, v. 13, n. 5, p. 1-24, out./dez. 2022

estrutura básica, os números hiper-reais, *ℝ, os quais são constituídos pelos reais, ℝ, acrescidos dos infinitésimos ($\varepsilon \in$ *ℝ, cujo módulo é menor que todos os reais positivos), dos infinitos ($\Omega \in$*ℝ, cujo módulo é maior que todos os reais positivos) e das mônadas. A mônada de um $x \in \mathbb{R}$ é constituída por todos os $y \in$ *ℝ que estão infinitamente próximos de x, ou seja, pelos y tais que $y - x$ é infinitésimo (KEISLER, 2011).

Diante disso e na perspectiva das considerações anteriores sobre desenvolvimento do Cálculo, no que tange à compreensão e ao esboço de curvas no âmbito do Ensino Médio, torna-se significativo considerar e refletir sobre o potencial didático dos infinitésimos não no sentido de seu rigor e formalização, mas no sentido de construir uma percepção de infinitésimo pertencente ao mundo corporificado de Tall (2010) e que possibilite o entendimento de variação, fundamental no esboço de curvas.

A noção de infinitésimo a que nos referimos está relacionada às concepções espontâneas dos estudantes identificadas, por Cornu (1983), como ideias, imagens, processos e palavras que os estudantes têm sobre um conceito e que não são fruto do ensino organizado sobre esse conceito. No caso dos infinitésimos, são as concepções espontâneas infinitesimais, como, por exemplo a ideia de que “infinitésimos são pontos muito pequenos e desprezíveis” (MILANI, 2004, p. 5). No trabalho pedagógico do qual foram coletados os dados, foi estimulado o aparecimento das concepções infinitesimais para que estas fossem legitimadas. No decorrer dos encontros, a definição de infinitésimo evocada e apresentada aos alunos foi: Infinitésimo é um número menor que qualquer número real positivo. Assim, a concepção de infinitésimo como sendo um número tornou-se uma definição para os estudantes, constituindo parte da imagem conceitual (TALL e VINNER, 1981) de infinitésimo. Conscientes, porém, de que essa não é a definição formal aceita pela Análise Não *Standard*, consideramos que tal definição, construída a partir da percepção dos estudantes sobre infinitésimos, faz mais sentido no Ensino Médio cumpre o papel de definição formal no contexto do trabalho pedagógico.

2.3 Taxa de variação instantânea e o caminho alternativo para esboço de curvas de funções polinomiais do segundo e terceiro graus

As taxas médias de variação de funções são utilizadas, nas diversas áreas do

REnCiMa, São Paulo, v. 13, n. 5, p. 1-24, out./dez. 2022

conhecimento, de diferentes formas. Por exemplo, a velocidade média de um móvel que pode ser expressa em quilômetro por hora; as taxas de crescimento de populações, expressas normalmente em porcentagem por ano; a precipitação mensal média de chuva, expressa em centímetros mensais. Nesses exemplos, a "taxa média de variação de uma quantidade, no decorrer de um certo período, é a variação sofrida pela quantidade, dividida pelo tempo em que tal variação levou para processar" (THOMAS JR e FINNEY, 1988, p. 67). A taxa de variação instantânea, por sua vez, é a variação sofrida por uma quantidade em um determinado momento (instante). A partir desses entendimentos, o caminho alternativo concebe o esboço de uma curva a partir da análise do sinal da taxa de variação instantânea — $TVI(x)$ da função, a qual é encontrada por meio da taxa média de variação: $TMV = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$, sendo Δx um infinitésimo e $\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$ um quociente de infinitésimos, aproximando-se da ideia de Tall (2010).

O caminho alternativo possibilita o esboço de uma curva a partir da análise da taxa de variação instantânea de primeira ($TVI_1(x)$) e de segunda ordem ($TVI_2(x)$)[6]. Tomando, por exemplo, uma função polinomial do segundo grau genérica na forma $y = ax^2 + bx + c,$ com $a \neq 0$, a $TVI_1(x)$ — em um valor qualquer de x — será $TVI_1(x) = 2ax + b$. Utilizando o mesmo processo, encontra-se a $TVI_2(x) = 2a$, que não é necessária para esboçar essas funções, mas permite concluir sobre a concavidade: se $a > 0$, concavidade da parábola voltada para cima; se $a < 0$, concavidade da parábola voltada para baixo.

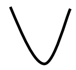
A partir de $TVI_1(x)$ e $TVI_2(x)$ da função polinomial do segundo grau, são analisadas diversas e importantes variáveis relativas à função. Na tabela 1, constam dados sobre as variáveis visuais gráficas e as unidades simbólicas da função quadrática tendo por base a $TVI_1(x)$ e a $TVI_2(x),$ que culminam no esboço da curva.

Com relação às conversões expostas na Tabela 1, cabe salientar que o relevante, na perspectiva do caminho alternativo, é a conversão, que permite uma compreensão global de propriedades fundamentais relacionadas à variabilidade: crescimento, decrescimento, valor máximo e mínimo, concavidade. Esse olhar

[6] Para fins de organização de nomenclatura, foi utilizado $TVI(x)$ ou $TVI_1(x)$ como a taxa de variação instantânea de primeira ordem de uma função. O índice "1" é necessário, pois será utilizada a ideia de variação da taxa de variação instantânea, ou taxa de variação instantânea de segunda ordem da função, representada por $TVI_2(x)$, relacionada à concavidade de uma curva.

diferenciado para o esboço de curvas proporciona uma aprendizagem de funções condizente com os objetivos atuais do ensino.

Tabela 1: Unidades simbólicas e gráficas de uma função polinomial do segundo grau.

<table>
<tr><th colspan="4">Unidades básicas simbólicas</th><th colspan="4">Unidades básicas gráficas</th></tr>
<tr><th>TVI_1</th><th>Valor de a</th><th>TVI_1</th><th>Valor de x</th><th>Reta Tangente</th><th>Concavidade (TVI_2)</th><th>Ponto crítico</th><th>Esboço curva</th></tr>
<tr><td rowspan="6">$2ax+b$</td><td rowspan="3">$a>0$</td><td><0</td><td>$x<-b/2a$</td><td>Decrescente</td><td rowspan="3">Para cima (positiva)</td><td rowspan="3">Mínimo absoluto em $x=-b/2a$</td><td rowspan="3"></td></tr>
<tr><td>$=0$</td><td>$x=-b/2a$</td><td>Constante</td></tr>
<tr><td>>0</td><td>$x>-b/2a$</td><td>Crescente</td></tr>
<tr><td rowspan="3">$a<0$</td><td><0</td><td>$x>-b/2a$</td><td>Crescente</td><td rowspan="3">Para baixo (negativa)</td><td rowspan="3">Máximo absoluto em $x=-b/2a$</td><td rowspan="3"></td></tr>
<tr><td>$=0$</td><td>$x=-b/2a$</td><td>Constante</td></tr>
<tr><td>>0</td><td>$x<-b/2a$</td><td>Decrescente</td></tr>
</table>

Fonte: Pasa (2017, p. 146).

No esboço de funções polinomiais de terceiro grau, além da análise da $TVI_1(x)$, é importante a análise da concavidade de uma curva. A concavidade de uma curva está relacionada ao comportamento da sua respectiva inclinação, ou seja, à variação da $TVI_1(x)$. Diante disso, a análise da concavidade ($TVI_2(x)$) se dá por meio da análise da variação da $TVI_1(x)$.

Portanto, sendo a função polinomial $y=ax^3+bx^2+cx+d$, as taxas de variação instantâneas de primeira e de segunda ordem, calculadas a partir da noção de infinitésimo, são $TVI_1(x)=3ax^2+2bx+c$ e $TVI_2(x)=6ax+2b$. O esboço da curva pode acontecer estudando-se apenas a $TVI_1(x)$ da função, ou, quando esse dado é insuficiente, analisando-se a $TVI_2(x)$.

3 Produções dos estudantes

As produções apresentadas e discutidas são oriundas de um trabalho pedagógico realizado com estudantes do 3º ano do Ensino Médio de uma escola estadual de Erechim/RS, organizado a fim de coletar dados para a tese intitulada *A Noção de Infinitésimo no Esboço de Curvas no Ensino Médio: por uma abordagem de interpretação global de propriedades figurais* (PASA, 2017). Elementos da Engenharia Didática, de Michèle Artigue (1996), balizaram a organização dos procedimentos metodológicos da pesquisa empírica, que contempla as dimensões teórica e experimental, possibilitando uma análise mais criteriosa do caminho alternativo para esboçar curvas. Dessa forma, a execução investigativa perpassou as quatro fases propostas pela Engenharia Didática: análises preliminares; concepção e análises *a priori*; aplicação de uma sequência didática; e, por fim, análises *a posteriori* e

REnCiMa, São Paulo, v. 13, n. 5, p. 1-24, out./dez. 2022

avaliação.

Este artigo apresenta reflexões das análises a *posteriori* das construções[7] dos estudantes na atividade de esboçar curvas de funções polinomiais do segundo e do terceiro graus, que perpassou o desenvolvimento de aspectos importantes na perspectiva do caminho alternativo, como estudo do sinal de funções do primeiro e segundo graus, taxa média de variação de uma função, taxa de variação instantânea de primeira e segunda ordem via infinitésimos, pontos críticos e a variação de funções. Nas análises, são pontuados aspectos da produção dos estudantes, relacionados às compreensões concebidas no âmbito da Teoria dos Registros de Representação Semiótica, no sentido de que levam em conta a identificação e a coordenação de unidades significativas dos registros algébrico e gráfico. Além disso, são evidenciadas questões relativas ao discurso utilizado pelos estudantes com base nas diferentes funções e operações do discurso de uso de uma língua no funcionamento do pensamento, referenciadas por Duval (2004): funções[8] de expansão discursiva, apofântica e referencial.

Esse tipo de análise do discurso proporciona compreensões a respeito do que é explícito ou não nas construções dos estudantes e do que foi mobilizado em termos de conhecimentos. As operações de expansão discursiva envolvem as explicações, descrições, narrações e raciocínios, os quais podem ser de natureza lógica ou natural e, ainda, podem se constituir por acumulação ou substituição, utilizando regras que podem estar explícitas ou não. As operações da função apofântica, de predicação ou locução, nos permitiram inferir sobre o valor lógico, epistêmico e/ou social do discurso utilizado pelos estudantes, ou seja, nos permitiu argumentar a favor da validade das construções. As operações da função referencial, por sua vez, serão destacadas quando evidenciando designações de objetos.

Na sequência didática aplicada que proporcionou as produções expostas, a noção de infinitésimo enquanto imagem conceitual foi construída a partir da legitimação das concepções infinitesimais dos estudantes, atingindo, durante os encontros, a definição de infinitésimos, anteriormente citada. Construída essa ideia, ela possibilitou a compreensão da taxa de variação instantânea de uma função na

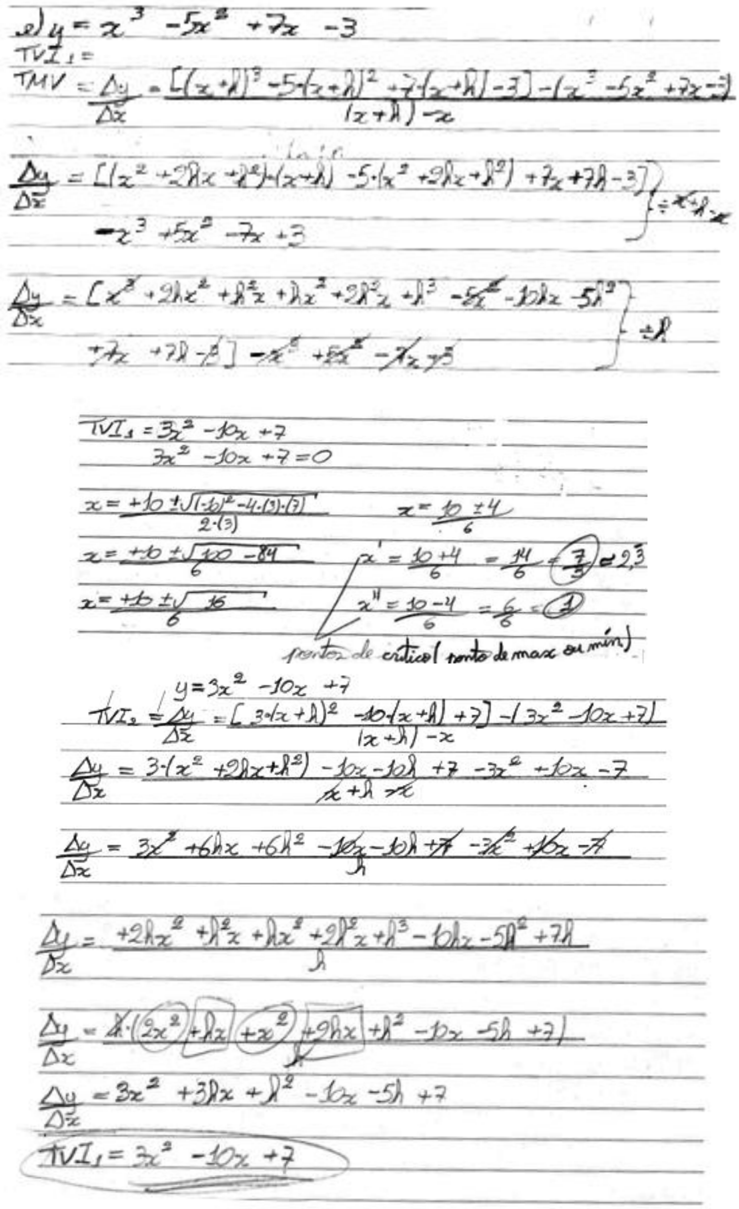
[7] As construções apresentadas foram recortadas para a melhor organização do artigo, todavia seu conteúdo e estrutura estão íntegros.
[8] Em Brandt, Moretti e Bassoi (2014), é possível identificar, compreender e clarificar as funções do discurso de Duval (2004) quando os autores discutem sobre as funções do discurso na resolução de problemas matemáticos.

REnCiMa, São Paulo, v. 13, n. 5, p. 1-24, out./dez. 2022

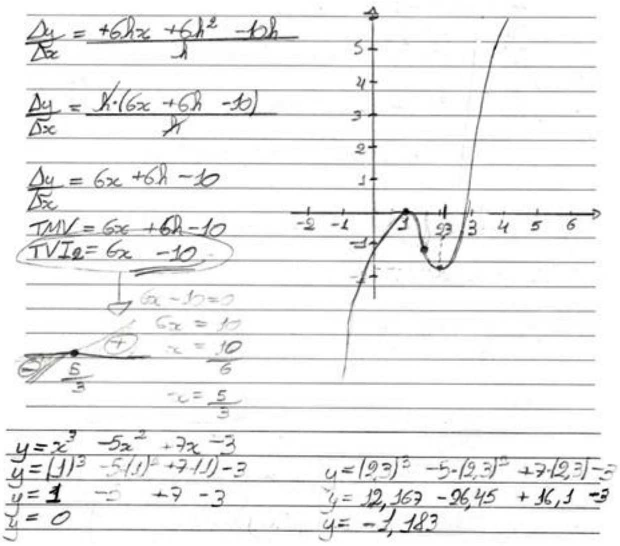
perspectiva unicamente simbólica.

Pontuadas essas questões, apresentamos e discutimos, com base na teoria cognitiva de Duval, as produções dos estudantes. Na figura 2, a seguir, consta o esboço da curva da função $y = x^3 - 5x^2 + 7x - 3$. Nesta construção, assim como na construção da figura 3, o estudante optou por utilizar h no lugar de Δx devido à facilidade na escrita e a fim de não confundir com x nos longos desenvolvimentos para encontrar as taxas de variação. Ademais, a $TVI_1(x)$ foi encontrada apenas para identificação dos pontos críticos, pois o gráfico é construído a partir da análise da $TVI_2(x)$, ou seja, da concavidade.

Figura 2: Esboço da curva da função $y = x^3 - 5x^2 + 7x - 3$.



REnCiMa, São Paulo, v. 13, n. 5, p. 1-24, out./dez. 2022

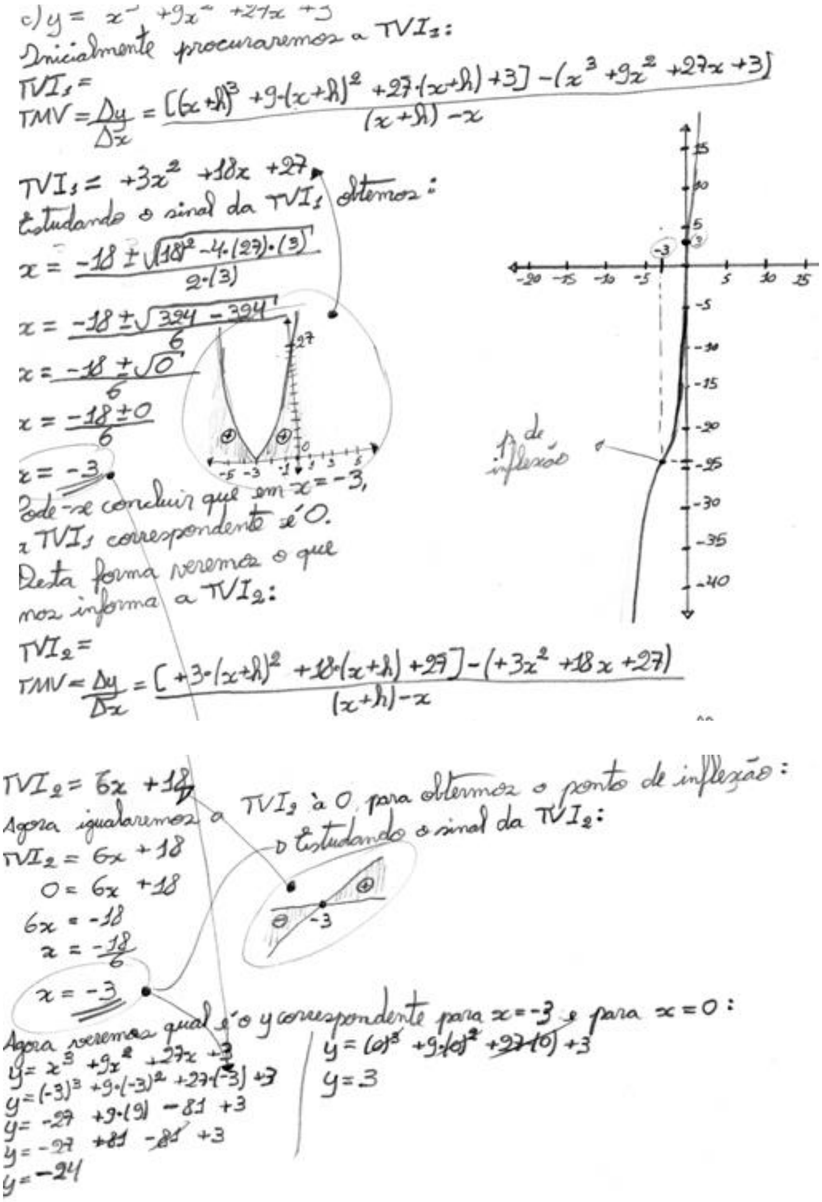


Fonte: Pasa (2017, p. 271-272).

As proposições utilizadas pelo estudante na construção da Figura 2, a fim de inferir a respeito da curva, possuem valor lógico de verdade, valor epistêmico, visto que o progresso do discurso foi feito pela substituição de relações válidas do ponto de vista matemático e valor social. O discurso se caracterizou por uma expansão cognitiva, visto que as sentenças matemáticas apresentadas revelam o conhecimento de propriedades dos objetos matemáticos presentes na construção, tais como o estudo do sinal de funções, o cálculo e a compreensão das taxas de variação instantâneas, a noção de infinitésimo e o plano cartesiano. O discurso utilizado pelo estudante pertence ao registro algébrico, fazendo pouco uso do registro da língua natural. O esboço se efetivou a partir da identificação e coordenação de unidades básicas simbólicas e gráficas relativas à concavidade ($TVI_2(x)$), enquanto as inferências realizadas a partir da $TVI_1(x)$ se limitaram ao encontro dos pontos críticos e serviram de base para a conclusão sobre a concavidade da curva.

A seguir, na Figura 3, o esboço da curva da função $y = x^3 + 9x^2 + 27x + 3$. A partir do esboço da curva dessa função, é possível concluir que o mesmo estudante (da construção da Figura 2) inferiu sobre o sinal da $TVI_1(x)$ e, assim, sobre seu crescimento para valores de $x \neq -3$, a partir do esboço da sua curva. Não satisfeito, porém, com as informações da $TVI_1(x)$ optou por calcular e estudar a $TVI_2(x)$ — concavidade. Ademais, nessa construção, as conversões entre as representações algébrica e gráfica ocorreram a partir de unidades simbólicas relativas à $TVI_2(x)$. As unidades apofânticas utilizadas expandem o discurso e permitem inferir que a construção possui valor lógico de verdade, valor epistêmico e social. O discurso utilizado pelo estudante combina registro algébrico com registros da língua natural e o esboço se efetivou a partir da identificação e coordenação de unidades básicas simbólicas e gráficas relativas à concavidade. Os estudos do sinal da $TVI_1(x)$ e da $TVI_2(x)$, assim como na Figura 2, se revelam no esboço da curva, não estando explícitos na construção.

Figura 3: Esboço da curva da função $y = x^3 + 9x^2 + 27x + 3$.

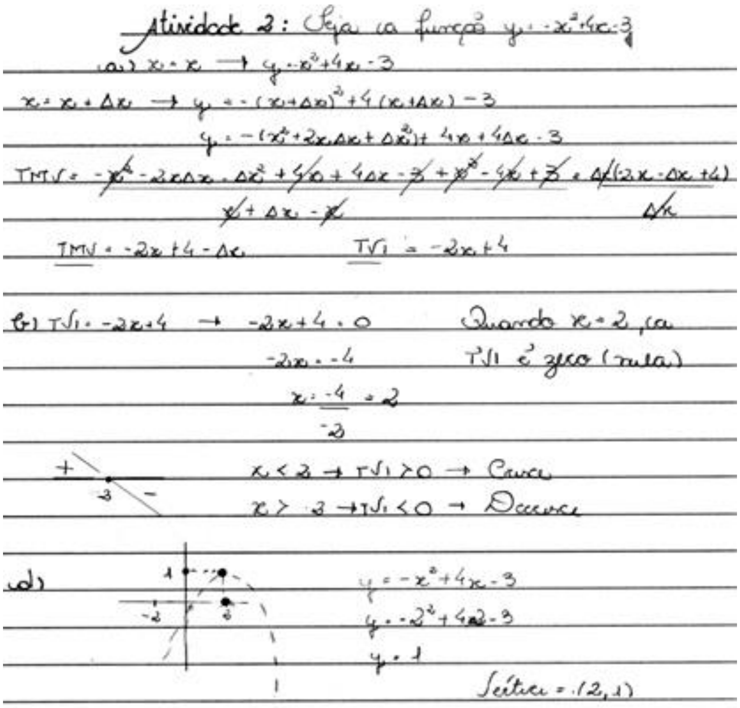


Fonte: Pasa (2017, p. 240).

A Figura 4, a seguir, apresenta a resolução de um estudante para a atividade de esboçar a curva da função $y = -x^2 + 4x - 3$, realizada por meio do estudo do sinal da $TVI_1(x)$. A expansão do discurso ocorreu de forma lógica, pois não seguida de explicações, utilizando apenas os registros algébrico e gráfico, não interagindo, assim, com o interlocutor; no caso, quem solicitou a resolução.

REnCiMa, São Paulo, v. 13, n. 5, p. 1-24, out./dez. 2022

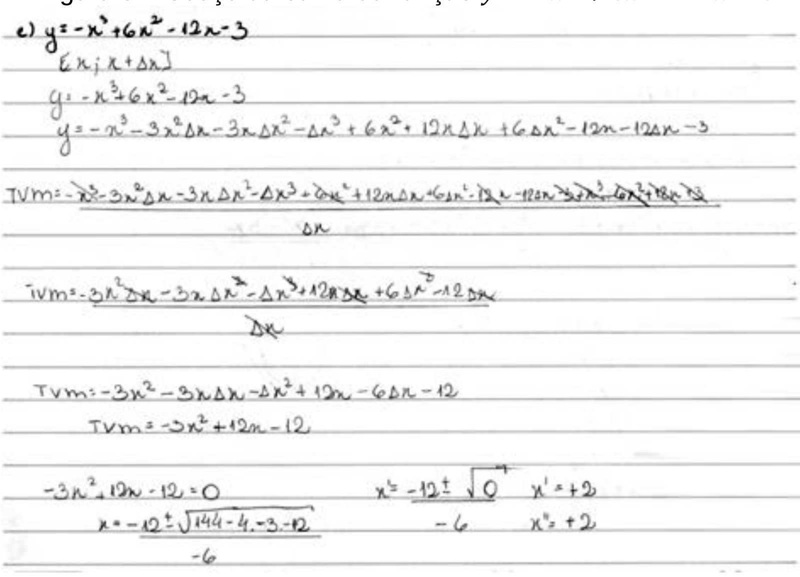
Figura 4: Esboço da curva da função $y = -x^2 + 4x - 3$.

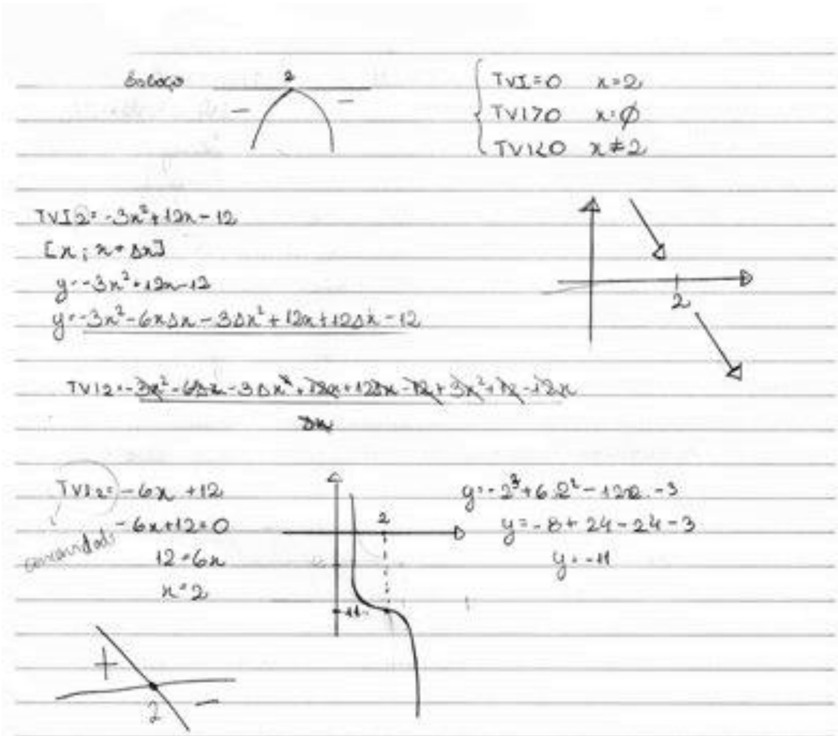


Fonte: Pasa (2017, p. 267).

A seguir, na Figura 5, é apresentado o esboço da curva da função $y = -x^3 + 6x^2 - 12x - 3$**.** Nesta construção, o estudante utilizou o estudo da $TVI_2(x)$ a fim de concluir sobre o esboço da curva, uma vez que a análise da $TVI_1(x)$ apontou decrescimento em todo o seu domínio. Neste caso, a conversão perpassou a análise da $TVI_1(x)$ e da $TVI_2(x)$.

Figura 5: Esboço da curva da função $y = -x^3 + 6x^2 - 12x - 3$**.**

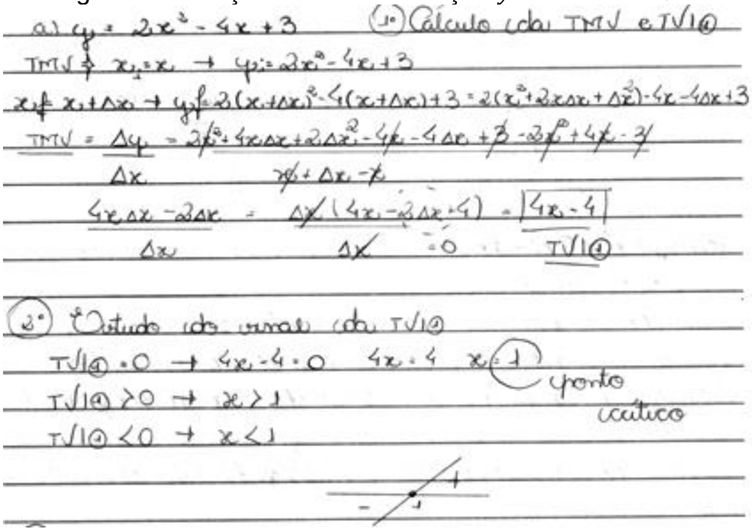




Fonte: Pasa (2017, p. 273).

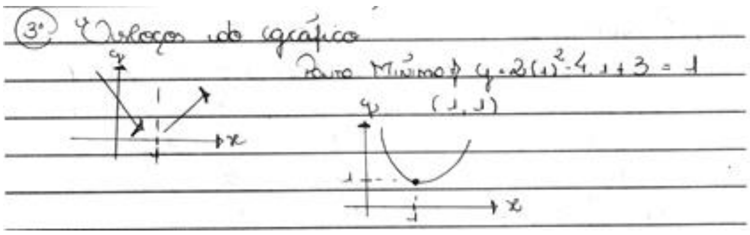
Na Figura 6, o estudante organizou seu discurso em etapas como forma de organizar os procedimentos necessários. De acordo com essa resolução, o esboço da curva perpassou o estudo do sinal da $TVI_1(x)$ e, antes do esboço final, foi construído um esboço de variabilidade com flechas que determinaram o crescimento e o decrescimento, chamada por Thomas Jr. e Finney (1988) de "envoltória", formada pelas retas tangentes, dentro da qual a curva fica contida e indica seu formato. Com relação ao discurso, o estudante utilizou uma expansão do tipo lógica, com registro algébrico, gráfico e em língua natural, formada por proposições válidas matematicamente, tendo, assim, um valor lógico de verdade.

Figura 6: Esboço da curva da função $y = 2x^2 - 4x + 3$.



REnCiMa, São Paulo, v. 13, n. 5, p. 1-24, out./dez. 2022

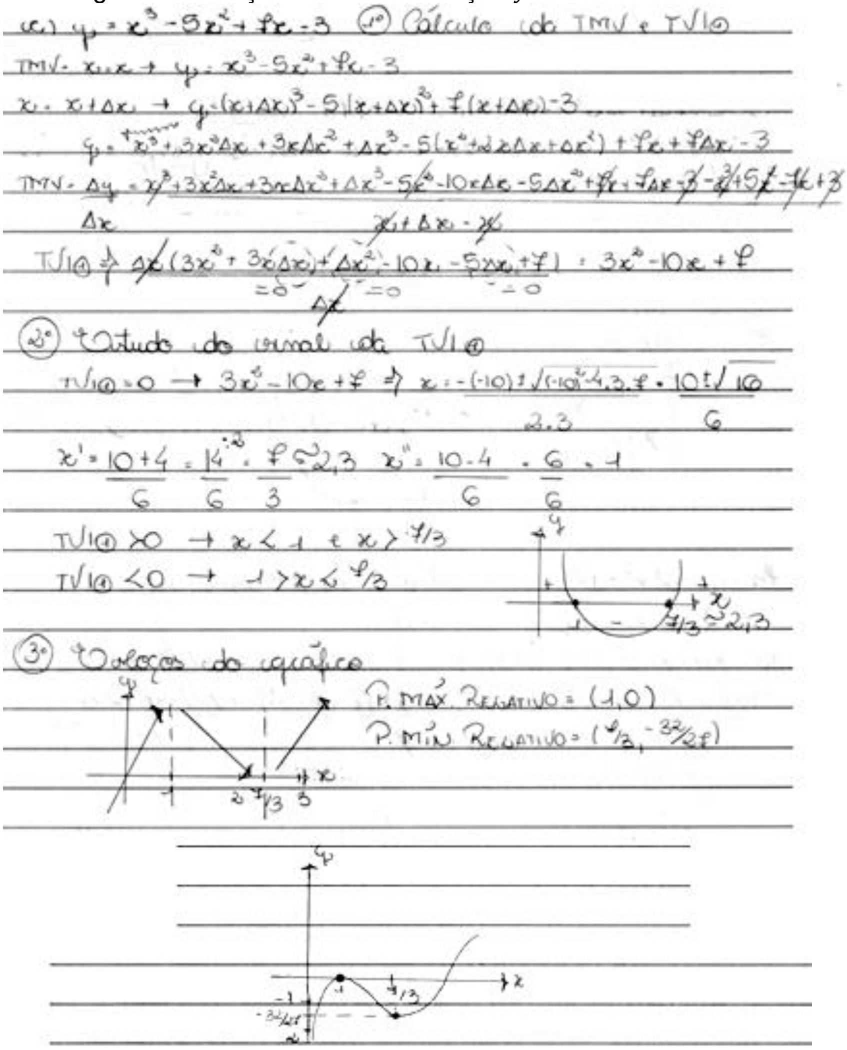
Revista de Ensino de Ciências e Matemática



Fonte: Pasa (2017, p. 275).

A maioria dos participantes da sequência didática apresentaram suas soluções a partir de uma expansão do tipo lógica, não utilizando a expansão em língua natural para expressar suas conclusões. Isso se verifica também na construção da Figura 7, a seguir. Nela é possível verificar que as propriedades necessárias para a articulação entre o registro algébrico da $TVI_1(x)$ e o registro gráfico da função foram utilizadas para esboçar a curva. Ademais, é uma resolução com valor lógico de verdade, valor epistêmico e social.

Figura 7: Esboço da curva da função $y = x^3 - 9x^2 + 7x - 3$.



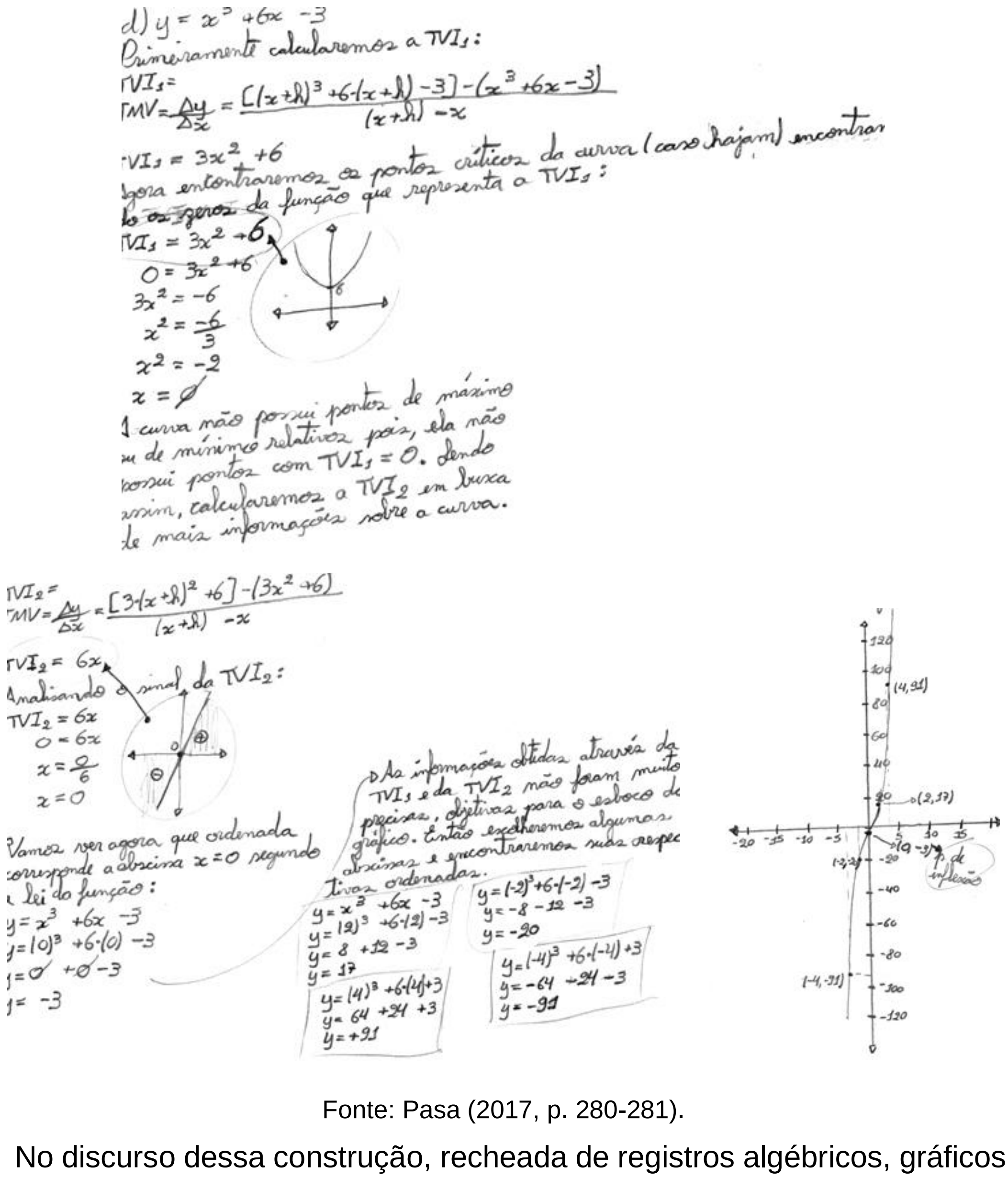
Fonte: Pasa (2017, p. 277).

Na Figura 8, a seguir, fica evidente que, para o estudante, um esboço genérico

REnCiMa, São Paulo, v. 13, n. 5, p. 1-24, out./dez. 2022

da curva apenas com a concavidade não foi suficiente. De acordo com ele, “a $TVI_1(x)$ e a $TVI_2(x)$ não foram muito precisas”, o que o levou a encontrar alguns pontos da curva da referida função e localizá-los no plano cartesiano, a fim de tornar o gráfico mais preciso. Essa atitude evidencia o apego à abordagem ponto a ponto, pois, mesmo compreendendo a curva em seus aspectos variacionais, ainda assim a necessidade de exatidão se fez presente.

Figura 8: Esboço da curva da função $y = x^3 + 6x - 3$.



Fonte: Pasa (2017, p. 280-281).

No discurso dessa construção, recheada de registros algébricos, gráficos e em língua natural, fica evidente o ato ilocutório, demonstrando o comprometimento do estudante em “se fazer entender”, com a intenção de organizar o pensamento e orientar o leitor. Esse tipo de construção, em que o ato ilocutório enquanto função do discurso denota um comprometimento do estudante, deve ser valorizado e incentivado no ensino, a fim de possibilitar aprendizagens mais significativas e atribuição de sentido às soluções apresentadas para quaisquer tipos de problemas matemáticos.

A análise do discurso, nas resoluções de problemas matemáticos, para além do ponto de vista matemático, possibilita ao professor um novo olhar ante as avaliações, que valoriza e prioriza o processo e não só o resultado final. As construções apresentadas demonstram a viabilidade do esboço de curvas a partir da perspectiva proposta enquanto caminho alternativo para trabalhar algumas funções no Ensino Médio. Destacam-se as construções das figuras 3 e 8, nas quais a expansão do discurso tem forte presença do ato ilocutório, o que explicita os argumentos, as proposições e a intenção do estudante.

Em todas as resoluções, é possível verificar a identificação de unidades básicas simbólicas, relativas à taxa de variação instantânea da função, e de unidades básicas gráficas, relativas à variação. A articulação dessas unidades, porém, atividade fundamental para a compreensão em Matemática de acordo com Raymond Duval, não é explicitada em todas as construções devido, entre outras coisas, à pouca utilização da língua natural nas resoluções.

4 Considerações finais

Uma análise detalhada do caminho alternativo proposto para estudar curvas de funções perpassa considerações essenciais sobre o papel das representações semióticas na atividade matemática. As representações semióticas possuem duas características essenciais que as tornam necessárias para a atividade matemática: a primeira, relativa à questão epistemológica de acesso aos objetos matemáticos, e a segunda, à questão cognitiva e metodológica da natureza da atividade matemática e do funcionamento do pensamento. Metodológica, porque a maneira de trabalhar ou os “gestos intelectuais” (DUVAL, 2011b, p. 41) exigidos são descritos e analisados em termos de transformações de representações semióticas.

Outro ponto fundamental, na atividade matemática, é a exigência epistemológica de jamais confundir o objeto representado com as suas representações, o que evidencia o fato, possível fonte de dificuldades, de que duas representações diferentes não representam a mesma “coisa” do objeto representado. Por isso a necessidade de se dispor de, no mínimo, duas representações de conteúdos distintos para que não ocorra a confusão de um objeto com sua representação. Sobre isso, Moretti e Thiel (2012) evidenciam que, para um mesmo objeto, a mudança de forma de uma representação implica a mudança de conteúdo da representação. E justamente é sobre essa questão que estão relacionadas as dificuldades dos estudantes, de modo geral, ao identificarem que tal conteúdo pertence a certa representação semiótica que possibilita o reconhecimento de algumas características do objeto representado apenas e, assim, uma mudança de conteúdo não implica a mudança de objeto, apenas a mudança da forma da representação. Essa clareza de compreensão possibilita que não se confunda o objeto representado da sua representação.

Essas questões são relevantes neste trabalho. Primeiro, porque o caminho alternativo é proposto na direção de uma abordagem de interpretação global de propriedades figurais, a qual, por sua vez, está embasada na teoria dos registros de representações semióticas. Depois, porque, no trabalho empreendido em sala de aula, o conteúdo relacionado à representação algébrica da função, relativo ao cálculo da $TVI_1(x)$ e da $TVI_2(x)$, bem como do estudo do sinal destas, possui um custo cognitivo significativo. No entanto, esse custo oneroso gera dificuldades específicas nos conteúdos das representações, o que pode ocasionar um trabalho em sala de aula muito focado na operação cognitiva de tratamento, deixando em segundo plano as conversões essenciais. Nesse sentido, ressaltamos a importância de pesquisas/trabalhos que reflitam sobre a obtenção e o entendimento das taxas de variação instantâneas, na perspectiva do caminho alternativo, utilizando o simbolismo concomitantemente (TALL, 2010) à visualização dinâmica, a partir de um *software*.

Por essa razão, vale reafirmar a relevância deste estudo, que leva em conta o ponto de vista cognitivo cuja análise da aprendizagem perpassa a análise dos gestos intelectuais requeridos e necessários de acordo com a teoria dos registros de representação semiótica. E mais: um estudo que, para além disso, avalia as conjecturas elaboradas pelos estudantes, o estabelecimento de hipóteses, a designação de relações e as inferências realizadas para que um problema seja resolvido, ou melhor, para que o esboço de uma curva seja construído. As análises expressas possibilitam que o professor tenha um olhar diferenciado na elaboração e correção das avaliações matemáticas.

Além disso, a análise das funções do discurso e suas operações presentes nas construções dos estudantes evidencia as interações entre o sujeito e o objeto de conhecimento e ao leva em conta os diálogos e conversas das aulas, as interações entre os sujeitos e as mediações oportunizadas pelas atividades propostas. Este tipo de trabalho é, por isso, ainda mais importante para a análise de como os estudantes designam objetos de conhecimento (como fazem, entendem e procedem), de como ocorre o ato ilocutório, o qual permite a identificação dos valores lógicos e epistêmicos das respostas/construções apresentadas caracterizando e por possibilitar uma forma de avaliação que não se limita a olhar resultados e sim o processo. Além disso, é fundamental também para a análise dos modos de expansão do discurso que permitem elaborar inferências sobre os modos de pensar dos estudantes revelados nos discursos explicitados nas construções.

As produções expostas pelos estudantes expostas, com algumas particularidades, explicitam o caminho alternativo trilhado de forma coerente, fazendo uso de proposições válidas segundo a argumentação matemática. As unidades básicas simbólicas referentes às taxas de variação e as unidades básicas gráficas referentes à variabilidade (crescimento e decrescimento) e à concavidade, além de identificadas, são coordenadas, o que, de acordo com Duval (2011a), se faz necessário para a compreensão de uma curva. Por isso, na maioria dos esboços, percebemos um discurso com expansão do tipo lógica, mesclando registros algébricos e gráficos, embora fazendo pouco uso da língua natural.

Enfim, a partir das construções elaboradas, bem como dos diálogos em sala de aula, ficou explícita a falta de hábito dos estudantes de escreverem sobre os resultados encontrados e explicarem o porquê de suas escolhas e ações na resolução de problemas. Percebe-se a necessidade de encontrar resultados numéricos sem explicar esses resultados e sem apresentar as conclusões que deles derivam.

Ademais, os dados apreendidos ao longo da investigação possibilitam concluir que o caminho alternativo permite uma mudança em termos de compreensões de curvas e funções na medida em que colocam o entendimento do movimento no centro do processo. A noção de infinitésimos, trabalhada de forma intuitiva, se mostrou frutífera no cálculo e no entendimento da taxa de variação instantânea de uma função, com potencial para a compreensão do esboço da curva no contexto deste trabalho e no âmbito do Ensino Médio.

É necessário, por esses motivos, que se promova, no contexto do Ensino Médio, um ensino de funções e esboço de curvas em sintonia com as possibilidades

REnCiMa, São Paulo, v. 13, n. 5, p. 1-24, out./dez. 2022

de aprendizagem dos estudantes e, mais do que isso, com as necessidades atuais em termos de conhecimentos demandados pelo cidadão. Essas iniciativas, de proposições de caminhos alternativos e respectivas reflexões, possibilitam que o ensino de esboço de curvas seja permeado por diferentes olhares, todos voltados à variação, como no caso deste trabalho, ou a translações, simetrias, parâmetros, formando um conjunto de possibilidades que se complementam com potencialidades para novas leituras e interpretações gráficas.

Referências

ANDRÉ, Selma Lopes da Costa. **Uma proposta para o ensino do conceito de derivada no Ensino Médio**. 2008. 241f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática) — Instituto de Matemática. Universidade Federal do Rio de Janeiro. Rio de Janeiro.

ARTIGUE, Michèle. Engenharia Didática. In: BRUN, Jean (Org.). **Didática das Matemáticas**. Lisboa: Instituto Piaget, 1996, p. 193-217.

ÁVILA, Geraldo. Limites e derivadas no Ensino Médio? **Revista do Professor de Matemática**, Rio de Janeiro, n. 60, p. 30-38, 2006.

BARUFI, Maria Cristina Bonomi. **A construção/negociação de significados no curso universitário inicial de cálculo diferencial e integral**. 1999. 195f. Tese (Doutorado em Educação) — Faculdade de Educação. Universidade de São Paulo. São Paulo.

BRANDT, Célia Fink; MORETTI, Méricles Thadeu; BASSOI, Tânia Stella. Estudo das funções do discurso na resolução de problemas matemáticos. **Educação Matemática Pesquisa**, São Paulo, v. 16, n. 2, p. 479-503, 2014.

CABRAL, Tânia Cristina Baptista; BALDINO, Roberto Ribeiro. Cálculo infinitesimal para um curso de engenharia. **Revista de Ensino de Engenharia**, Brasília, v. 25, n. 1, p. 3-16, 2006.

CARVALHO, Tadeu Fernandes de; O'TTAVIANO, Itala Maria Loffredo. Sobre Leibniz, Newton e infinitésimos, das origens do cálculo infinitesimal aos fundamentos do cálculo diferencial paraconsistente. **Educação Matemática Pesquisa**, v. 8, n. 1, p. 13-43, São Paulo, 2006.

CAVASOTTO, Marcelo. **Dificuldades na Aprendizagem de Cálculo**: o que os erros cometidos pelos alunos podem informar. 2010. 146f. Dissertação (Mestrado em Educação em Ciências e Matemática) — Faculdade de Física. Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul. Porto Alegre.

CORNU, Bernanrd. **Aprentissage de la notion de limite:** conceptions et obstacles. 1983. Tese (Doctorate de Toisieme Cycle de Mathèmatiques Pure) — Universite Scientifique et Medicale de Grenoble. Grenole.

CURY, Helena Noronha. **Análise de erros:** o que podemos aprender com as respostas dos alunos. Belo Horizonte: Autêntica, 2007.

DUCLOS, Robert Costallat. Cálculo no 2º grau. **Revista do Professor de Matemática**, Rio de Janeiro, n. 20, p. 26-30, 1992.

DUVAL, Raymond. Registros de representações semióticas e funcionamento cognitivo da compreensão em Matemática. In: MACHADO, Silvia Dias Alcântara (Org.). **Aprendizagem em Matemática**: Registros de Representação Semiótica. Campinas: Papirus, 2003, p. 11-34.

DUVAL, Raymond. **Semiosis y pensamiento humano**: registros semióticos y aprendizajes intelectuales. Tradução de Myriam Vega Restrepo. Santiago de Cali: Universidade del Valle, 2004.

DUVAL, Raymond. Gráficos e equações: a articulação de dois registros. Tradução de Méricles Thadeu Moretti. **Revemat**, Florianópolis, v. 6, n. 2, p. 91-112, 2011a.

DUVAL, Raymond. Ver e ensinar a matemática de outra forma: entrar no modo matemático de pensar os registros de representações semióticas. In: CAMPOS, Tânia Maria Mendonça. (Org). **Práxis Educativa**. Tradução de Marlene Alves Dias. São Paulo: PROEM, 2011, p. 603-607.

KEISLER, Howard Jerome. **Foundations of infinitesimal calculus**. Department of Mathematics University of Wisconsin, Madison, Wisconsin, USA, 2011.

MATOS FILHO, Maurício Saraiva; MENEZES, Josinalva Estácio. Como os alunos do Ensino Médio estão construindo e interpretando gráficos de funções polinomiais 1º e 2º graus. In: Encontro Nacional de Educação Matemática, 10, Salvador. **Anais do X ENEM.** SBEM: Salvador, 2010, p. 1-10.

MILANI, Raquel. Limite e Infinitésimos no Cálculo diferencial e Integral. In: Encontro Nacional de Educação Matemática, 8, Recife. **Anais do VIII ENEM**. Universidade federal de Pernambuco. SBEM: Recife, 2004, p. 1-13.

MORETTI, Méricles Thadeu; THIEL, Afrânio Austregésilo. O ensino de matemática hermético: um olhar crítico a partir dos registros de representação semiótica. **Praxis Educativa**, Ponta Grossa, v. 7, n. 2, p. 379-396, jul./dez. 2012.

OLIVEIRA, Fernando Rodrigues de. **Uma proposta para o ensino de noções de cálculo no Ensino Médio**. 2010. 58f. Monografia (Trabalho de Conclusão de Curso) — Instituto de Matemática. Universidade Federal do Rio Grande do Sul. Porto Alegre.

OLIVEIRA, Maria Cristina Araújo de; RAAD, Marcos Ribeiro. A existência de uma cultura escolar de reprovação no ensino de Cálculo. **Boletim GEPEM**. n. 61, p. 125-137, jul./dez. 2012.

PASA, Bárbara Cristina; MORETTI, Méricles Thadeu. Panorama de pesquisas sobre o esboço de curvas a partir da interpretação global das unidades figurais. In: Encontro Nacional de Educação Matemática, 12, São Paulo, SP. **Anais do XII ENEM**. SBEM: São Paulo, 2016, p. 1-12.

PASA, Bárbara Cristina. **A noção de infinitésimo no esboço de curvas no Ensino**

REnCiMa, São Paulo, v. 13, n. 5, p. 1-24, out./dez. 2022

Médio: por uma abordagem de interpretação global de propriedades figurais. 2017. 311f. Tese (Doutorado em Educação Científica e Tecnológica). Universidade Federal de Santa Catarina. Florianópolis.

PEREIRA, Vinícius Mendes Couto. **Cálculo no Ensino Médio**: Uma Proposta para o Problema da Variabilidade. 2009. 183f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática) — Instituto de Matemática. Universidade Federal do Rio de Janeiro. Rio de Janeiro.

REZENDE, Wanderley Moura. **O ensino de Cálculo**: dificuldades de natureza epistemológica. 2003. 468f. Tese (Doutorado em Educação) — Faculdade de Educação, Universidade de São Paulo. São Paulo.

SARUBBI, Pedro Antônio; SOARES, Flávia. Investigando dificuldades de alunos em problemas de Cálculo de taxas relacionadas. In: COBENGE, 37, Recife. **Anais do XXXVII COBENGE.** Recife, 2009, p. 1-8.

SOUSA, Geneci Alves de; NASSER, Lilian; TORRACA, Marcelo André Abrantes; ASSEMANY, Daniella; AZEVEDO, Cecília de. A Transição do Ensino Médio para o Superior: dificuldades em problemas de taxas relacionadas. In: Encontro Nacional de Educação Matemática, 11, 2013, Curitiba. **Anais do XI ENEM.** Curitiba, PR, 2013, p. 1-16.

TALL, David Orme. Intuitive infinitesimals in the calculus. In: INTERNATIONAL CONGRESS ON MATHEMATICAL EDUCATION, 4, 1980, Berkeley. **Proceedings IV INTERNATIONAL CONGRESS ON MATHEMATICAL EDUCATION.** Berkeley: University of Berkeley, 1980, p.170-176.

TALL, David Orme. Elementary axioms and pictures for infinitesimal calculus. **Bulletin of the IMA**, v. 18, p. 44-48, 1982.

TALL, David Orme. **A Sensible Approach to the Calculus**. In Plenary at the National and International Meeting on the Teaching of Calculus, 2010.

TALL, David Orme, VINNER, Shlomo. Concept image and concept definition. in: mathematics with particular reference to limits and continuity. **Educational Studies in Mathematics**, v. 12, 2 ed., p.151-169, maio, 1981.

THOMAS JUNIOR, George Brinton; FINNEY, Ross Lee. **Cálculo e Geometria Analítica**. Tradução de Denise Paravato. Rio de Janeiro: LTC, 1988.