Recebido: 24/05/2022 ■ Aprovado: 03/09/2022 ■ Publicado: 04/12/2022

eISSN 2179-426X
10.26843/rencima.v13n5a21

RENCIMA Revista de Ensino de Ciências e Matemática

Derivadas: uma abordagem para o Ensino Médio com uso do GeoGebra para *smartphones*

Fabrício Rodrigues Benayon[1]

Augusto Cesar de Castro Barbosa[2]

Cláudia Ferreira Reis Concordido[3]

Resumo: Este trabalho visa desenvolver e analisar uma estratégia de ensino-aprendizagem de introdução aos conceitos do Cálculo no Ensino Médio, mais especificamente, a derivada. A fundamentação teórica, baseada nos estudos de David Tall e Shlomo Vinner sobre conceito imagem, concentra-se na apresentação da definição da derivada a partir da noção de linearidade local, que se ampara na ideia de magnificação (ampliação) de gráficos e no uso da tecnologia, no nosso caso, o GeoGebra para *smartphones*. É proposto um conjunto de atividades para a introdução das derivadas via magnificação de gráficos de funções familiares aos alunos do 1º ano do Ensino Médio.

Palavras-chave: Derivada. Ensino Médio. Linearidade Local. GeoGebra.

Derivatives: an approach to High School using GeoGebra for smartphones

Abstract: The objective of this work is to develop and analyze a methodology of introduction to the concepts of Calculus in High School, more specifically the Derivative. The theoretical foundation, which is based on the studies of David Tall and Shlomo Vinner, is focused on the presentation of Derivative from the notion of local linearity, that is based on the idea of magnification (enlargement) of graphics and the use of technology, in our case, the use of GeoGebra for smartphones. A presentation of a proposal to introduce derivatives is made via the magnification of graphs of familiar functions to students in the first year of High School.

Keywords*:* Derivative. High School. Local Straightness. GeoGebra.

Derivadas: uma abordagem para o Ensino Médio com uso do GeoGebra para *smartphones*

Resumen: Este trabajo tiene como objetivo desarrollar y analizar una metodología de introducción a los conceptos del Cálculo en la Escuela Secundaria, más específicamente la Derivada. La fundamentación teórica, basada en los estudios de David Tall y Shlomo Vinner a cerca del concepto imagen, se centra en la presentación del concepto de la Derivada a partir de la noción de linealidad local, que se sustenta en la idea de magnificación (ampliación) de gráficos y en el uso de la tecnología, en nuestro caso, el uso del GeoGebra para *smartphones*. Se propone un conjunto de actividades para la introducción de las derivadas por medio de la magnificación de gráficos de funciones familiares a los alumnos del 1er año de la Escuela Secundaria.

---

[1] Mestre em Matemática. Professor do Colégio e Curso Pensi. Rio de Janeiro. Brasil. ✉ prof.bnayon@gmail.com https://orcid.org/0000-0003-1263-6981.

[2] Doutor em Física. Professor da Universidade do Estado do Rio de Janeiro (UERJ). Rio de Janeiro. Brasil. ✉ accb@ime.uerj.br https://orcid.org/0000-0002-5094-1509.

[3] Doutora em Matemática. Professora da Univrsidade do Estado do Rio de Janeiro (UERJ). Rio de Janeiro. Brasil. ✉ concordido@ime.uerj.br https://orcid.org/0000-0002-0767-9170.

Palabras clave: Derivada. Escuela Secundaria. Linealidad Local. GeoGebra.

1 Introdução

A incorporação do Cálculo Diferencial e Integral ao currículo do Ensino Médio vem sendo discutida no Brasil há anos. Desde a sua primeira introdução oficial, em 1890, até a última retirada na década de 1960, esse tópico já foi incluído e excluído diversas vezes (FARIAS, 2015; BARBOSA, CONCORDIDO e GODINHO, 2016). Ainda hoje, o ensino do Cálculo no nível do Ensino Médio tem sido um recorrente tema de debate entre os professores de Matemática (MOLON e FIGUEIREDO, 2015). Perguntas como: "O que se deve ensinar?"; "Como ensinar?"; "Quando ensinar?" são questões que permeiam o assunto. Procuraremos estabelecer um possível caminho para responder a essas perguntas quanto ao ensino das derivadas no Ensino Médio.

O objetivo deste trabalho é propor uma sequência didática para a introdução de derivadas no Ensino Médio, baseando-se nos trabalhos de David Tall, por meio de um processo de magnificação (ampliação) de gráficos em um ambiente computacional[4].

Adotamos, como conceito-chave para desenvolver nosso trabalho, a definição da taxa de variação, pois, ao longo de nossa jornada em sala de aula, nos pareceu que este seria o momento mais oportuno para inserir o tema das derivadas, dada a conexão entre os assuntos.

Tratamos, inicialmente, da fundamentação teórica, apoiada, sobretudo, nos estudos desenvolvidos pelo pesquisador David Tall, que elaborou uma teoria na qual se busca uma base familiar para a introdução de assuntos matemáticos em que as definições e os conceitos sejam particularmente de difícil compreensão para o aluno, em qualquer etapa de sua formação. O pesquisador sugere uma estrutura cognitiva, que chama de *conceito imagem* e propõe o que consideramos a ideia principal do presente trabalho: *local straightness*, que consiste, resumidamente, em observar gráficos magnificados.

Esse conceito-chave permite que se apresente uma proposta alternativa à tradicional forma de ensino das derivadas diretamente por limites. A fim de comparar

[4] Este artigo é recorte de uma dissertação de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT), na Universidade do Estado do Rio de Janeiro (UERJ), escrita pelo primeiro autor, orientada pelo segundo autor e coorientada pela terceira autora.

REnCiMa, São Paulo, v. 13, n. 5, p. 1-26, out./dez. 2022

e justificar a escolha do caminho via ampliação de gráficos, abordaremos, neste trabalho, os dois caminhos.

Na seção “Metodologia e organização didática”, apresentamos os recursos empregados para viabilizar a aplicação da proposta do presente trabalho e as atividades que os alunos são submetidos. Essas tarefas foram organizadas de forma que o assunto seja assimilado por motivação contextual (CARNEIRO e WAGNER, 2003) e que os alunos percebam as diversas aplicações das derivadas.

2 Fundamentação teórica

Na tentativa de encontrar novos caminhos para o ensino-aprendizagem da Matemática, David Orme Tall e Shlomo Vinner desenvolveram uma teoria da estrutura cognitiva do processo da assimilação de um determinado conteúdo matemático. Segundo a teoria desenvolvida por Tall e Vinner (1981), conceito imagem é a estrutura cognitiva completa na mente de um aluno relacionada a um certo conceito matemático. Isto é, o conceito imagem existe quando todas as interações entre propriedades, aplicações e imagens mentais de um conceito matemático estão interligadas ao conceito.

Ainda de acordo com os pesquisadores, o conceito imagem difere da definição formal matemática, uma vez que pode incluir ou não a definição correta. De fato, um aluno pode ter toda a estrutura sugerida por Tall e ainda assim não saber a definição correta. Por exemplo, em relação ao conhecimento da função afim, um discente pode ser capaz de identificá-la, determinar suas raízes, imagens da função e até mesmo saber que seu gráfico é uma reta e construí-la. Entretanto, pode definir erroneamente a função afim.

Um outro exemplo – e talvez mais emblemático – é o estudo dos sólidos geométricos. Em particular, quando se trata de poliedros, é comum os alunos identificá-los e calcularem seus volumes, mas não conseguirem defini-lo. Assim, é bastante compreensível supor que saber a definição formal memorizada de um conceito matemático não é suficiente e não garante que o aluno compreenda a definição.

De acordo com Giraldo e Carvalho (2002, p. 103), “pela própria natureza da matemática, a existência de um objeto matemático só fica estabelecida pela sua definição. No entanto, do ponto de vista cognitivo, a apresentação da definição não

REnCiMa, São Paulo, v. 13, n. 5, p. 1-26, out./dez. 2022

garante, por si só, a formação de uma imagem conceitual satisfatória".

Além dessa comparação entre o conceito imagem e a definição formal (também chamada por Tall de conceito definição), encontramos outras denominações para as estruturas estabelecidas em suas pesquisas. Para Tall (1989), quando um aluno ainda não atingiu um nível de estrutura cognitiva apropriado para o aprendizado, em particular, quando caminhamos no sentido das ideias mais abstratas em um tópico pela primeira vez, é necessário que se tenha uma forma diferente na base da organização para introdução de tal assunto.

Para auxiliar essa estrutura, Tall (2000) define um organizador genérico como um ambiente que permite ao aluno manipular exemplos de um conceito matemático em particular ou de um sistema de conceitos relacionados. Pode ser um *software* ou ambiente computacional com o qual o usuário obtenha respostas imediatas às suas explorações. A ideia, segundo o autor, é auxiliar o estudante a ganhar maturidade e com isso lhe proporcionar uma estrutura cognitiva capaz de entender as estruturas mais abstratas.

Vale ressaltar que os estudos de Tall foram direcionados a alunos de nível superior. Sendo assim, o organizador genérico é um ambiente que complementa a introdução do assunto via caminhos tradicionais. No nosso caso, por se tratar de uma proposta de sequência didática dirigida a alunos do Ensino Médio, nosso organizador genérico torna-se a principal – senão única – plataforma de introdução das derivadas. Entende-se por *sequência didática* um conjunto "de aulas planejadas e analisadas previamente com a finalidade de observar situações de aprendizagem, envolvendo os conceitos previstos na pesquisa didática" (PAIS, 2011, p. 102).

O organizador genérico escolhido para o presente trabalho é o aplicativo para *smartphones* Calculadora Gráfica GeoGebra. A escolha desse programa se deve à sua ampla utilização, à sua sabida eficiência e ao atendimento da necessidade de introduzir o ensino de derivadas via magnificação de gráficos (MOLON e FIGUEIREDO, 2015; HALLAL *et al.*, 2020). Experiências recentes servem para mostrar que o celular, o "vilão" da sala de aula, pode ser um grande aliado (PIMENTA e LOPES, 2017).

A Calculadora Gráfica GeoGebra é um aplicativo livre para *smartphones*, lançado em 2015 e adaptado das versões de computadores. Caracteriza-se por ser um *software* de matemática dinâmica que une, em uma mesma interface, a Geometria,

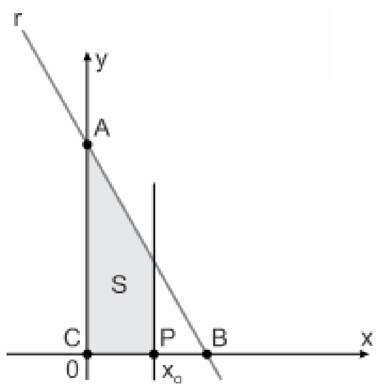
REnCiMa, São Paulo, v. 13, n. 5, p. 1-26, out./dez. 2022

a Álgebra e o Cálculo. Possibilita, entre as diversas ferramentas existentes (construções de figuras geométricas, resolução de equações, derivadas etc.) e de forma fácil, a construção de gráficos. Além disso, permite a ampliação ou redução da imagem com o movimento dos dois dedos sobre a superfície da tela *touchscreen*, da mesma forma que fazemos para ampliar ou reduzir fotos no celular, arrastar e selecionar objetos gráficos. Sendo assim, uma ótima ferramenta para o estudo das derivadas via magnificação de gráficos.

A Base Nacional Comum Curricular – BNCC (BRASIL, 2018) reconhece os benefícios que a cultura digital tem promovido nas esferas sociais. O avanço tecnológico e a multiplicação de celulares, *smartphones* e computadores estão diretamente ligados ao hábito de consumo dos jovens. Diante dessas interações multimidiáticas e multimodais, a proposta da BNCC é trabalhar com uma intervenção social que contextualize o uso da tecnologia ao currículo aplicado, desenvolvendo essa que é a quinta das dez competências gerais citadas pelo documento (BRASIL, 2018).

Outro objeto definido por Tall dentro da estrutura do pensamento matemático é o que ele chama de *unidade cognitiva*, que, Segundo Barnard e Tall (1997), trata-se de cada uma das partes da estrutura cognitiva na qual um indivíduo concentra sua atenção a fim de desenvolver um raciocínio matemático. Para exemplificar e ajudar a visualizar unidades cognitivas, vamos examinar o exemplo que se segue:

Figura 1: Gráfico da questão do vestibular UERJ/2017



Fonte: Adaptada de https://www.revista.vestibular.uerj.br/

Considere o gráfico da Figura 1, no qual a área *S* é limitada pelos eixos coordenados, pela reta r que passa pelo ponto $A(0,4)$ e $B(2,0)$ e pela reta perpendicular ao eixo *x* no ponto $P(x_0, 0)$, sendo $0 < x_0 \leq 2$. Para que a área *S* seja a metade da área do triângulo de vértices $C(0,0)$, A e B determine o valor de x_0.

REnCiMa, São Paulo, v. 13, n. 5, p. 1-26, out./dez. 2022

Nesse exemplo, são unidades cognitivas: saber interpretar o gráfico; calcular a área de um triângulo retângulo; saber a equação da reta $r: y = ax + b$ e seus coeficientes; determinar a área de um trapézio; resolver uma equação do 2º grau; comparar as raízes com os dados.

Percebe-se que a ideia do pesquisador é de arquitetar o pensamento para que possam ser feitas as análises relativas à forma de pensar matematicamente. Ainda segundo Tall (2000), aquilo que é uma unidade cognitiva para um indivíduo pode não ser para outro, e a habilidade de conceber e manipular as unidades cognitivas é vital para facilitar o pensamento matemático.

O autor define raiz cognitiva como a unidade cognitiva dentro da estrutura do pensamento matemático que, pelo menos potencialmente, faça sentido para o estudante no estágio em questão e permita expansões cognitivas para construções formais e desenvolvimentos teóricos subsequentes. Uma raiz cognitiva é um conceito-âncora de mais fácil compreensão pelo aluno e que serve de base para construir a teoria (TALL, 1989). Ainda ressalta que uma raiz cognitiva é diferente de uma fundamentação matemática, pois a primeira é um ponto de partida apropriado para o desenvolvimento lógico de um conteúdo, e na segunda tem-se o objeto cognitivo apropriado para o desenvolvimento teórico. O pesquisador admite que encontrar a raiz cognitiva de um determinado conceito não é fácil, requer uma combinação de pesquisa empírica e conhecimento matemático.

Em diversos livros didáticos atuais, vemos o estudo das funções ser introduzido por meio de exemplos contextualizados que, normalmente, relacionam duas grandezas, o que culmina na definição de uma função (DANTE, 2019; IEZZI *et al.*, 2019). A partir daí, seguem mais definições de domínio, contradomínio e conjunto imagem, até que é apresentado o gráfico de uma função. Há livros (mais antigos) com uma abordagem tradicional que iniciam com plano cartesiano, em seguida, produto cartesiano, para falar de relações e definir função (ÁVILA, 2006; BEZERRA e PUTNOKI, 1999).

Nesse sentido, acreditamos que a primeira abordagem pode ter a vantagem da contextualização, porém, muitos estudantes possuem a dificuldade da interpretação da própria contextualização. A segunda, por sua vez, exibe uma sequência de definições que também não auxiliam na construção de um conceito que seria familiar ao aluno. Um possível ponto de partida com as características de uma raiz cognitiva

REnCiMa, São Paulo, v. 13, n. 5, p. 1-26, out./dez. 2022

seria plotar pontos no plano cartesiano com propriedades especiais, utilizando um ambiente computacional.

De posse dessas estruturas estabelecidas por Tall (1989), abordaremos a principal ideia do presente trabalho: *local straightness* ou retidão local. A noção de retidão local está baseada na percepção humana de que um objeto curvo parece reto quando olhado de muito perto (TALL, 1989). Segundo Giraldo e Carvalho (2002, p. 105), “a noção de retidão local se baseia na ideia de que as curvas diferenciáveis estudadas nos cursos iniciais de cálculo se parecerão com uma reta quando altamente magnificadas na vizinhança de um ponto”. Introduz ao aluno a derivada de uma função em um ponto dado como o coeficiente angular dessa reta.

3 A derivada

Trataremos aqui do conceito de retidão local aplicado às derivadas. Em um primeiro momento, abordaremos a forma padrão de introdução das derivadas até nos depararmos com o obstáculo (conceitual) dos limites. Em seguida, faremos a introdução das derivadas via o conceito de retidão local. Comparamos os dois processos e justificamos o uso da segunda maneira em detrimento da primeira, justamente pela ausência da necessidade de falar em limites de funções.

3.1 A definição de derivada por limites

Ao tentar ensinar o conceito de derivadas no Ensino Médio, encontramos uma dificuldade importante — o conceito de limite. Por outro lado, introduzir a definição de derivadas com um conhecimento prévio de limites, tornar-se-ia algo muito trabalhoso, senão quase impossível dentro de um contexto de Ensino Médio. Podemos citar, por exemplo, Cornu (1991), que realizou estudos a respeito das diversas barreiras epistemológicas que os alunos encontram quando iniciam o estudo do conceito de limites.

Vale lembrar a definição de limites (FLEMING e GONÇALVES, 1992) para que possamos mensurar a possível dificuldade de um aluno ao se deparar com ela.

DEFINIÇÃO: Seja f uma função definida num intervalo que contém um número a, exceto possivelmente no próprio a. Dizemos que o limite de $f(x)$ quando x tende a a é L, e escrevemos $\lim_{x\to a} f(x) = L$, se para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

REnCiMa, São Paulo, v. 13, n. 5, p. 1-26, out./dez. 2022

$$0 < |x - a| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x) - L| < \varepsilon .$$

Essa é uma definição de difícil compreensão. Sem dúvida, trata-se de um conceito importantíssimo e indispensável para o estudo do Cálculo, entretanto, não é bom como um ponto de partida ou, como já dissemos, uma boa raiz cognitiva. Para que o leitor tenha uma visão melhor do que estamos falando, recordamos que, na maioria dos livros didáticos, a definição da derivada é construída em conexão com a determinação da equação da reta tangente ao gráfico de uma função contínua f num dado ponto $P(x_0, f(x_0))$.

Define-se a inclinação ou o coeficiente angular da reta tangente à curva $y = f(x)$ no ponto $(x_0, f(x_0))$ como um limite da seguinte forma:

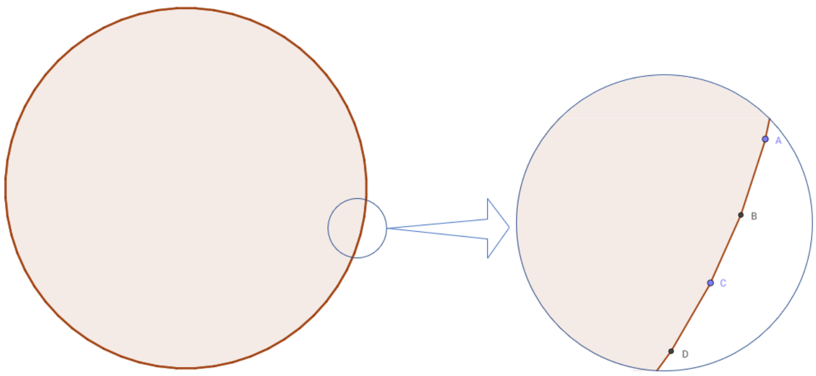
$$m(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} ,$$

se o limite existe. A construção geométrica que conduz a esse resultado indica que tal reta tangente é a posição limite de retas secantes que passam pelo ponto P e por outros pontos da curva à medida que são tomados cada vez mais próximos de P. Portanto, geometricamente, a Derivada da função f no ponto x_0 representa o coeficiente angular da reta tangente ao gráfico de f no ponto P.

3.2 A definição de derivada por retidão local

A Figura 2 retrata bem a ideia dessa seção e do presente trabalho. A figura mostra um polígono de 60 lados à esquerda da imagem que, à primeira vista, tem-se a impressão de ser uma circunferência. À direita, vemos uma ampliação de parte da suposta circunferência e avistamos os segmentos que compõem o polígono.

Figura 2: A ideia da magnificação



Fonte: Os autores.

Segundo Tall (1989), a ideia intuitiva de derivada pode ser melhor trabalhada

REnCiMa, São Paulo, v. 13, n. 5, p. 1-26, out./dez. 2022

usando a noção de retidão local. Esse conceito se dá por meio de um processo de magnificação da escala de gráficos de funções deriváveis, tornando-os aparentemente lineares.

Existe uma resistência por parte dos professores no que diz respeito ao ensino de derivadas no Ensino Médio. Ávila (2006) argumentava que essa resistência ocorre por se pensar na necessidade da introdução de todo o ferramental pesado de limites para só então apresentar a derivada. No entanto, acreditamos que essa questão depende da abordagem, isto é, não existe, em princípio, nenhum impedimento em termos de formalismo para que esse tópico seja apresentado no Ensino Médio, desde que sejam retirados os aspectos mais abstratos. Com base nas ideias aqui apresentadas, propomos uma sistematização para a introdução via magnificação.

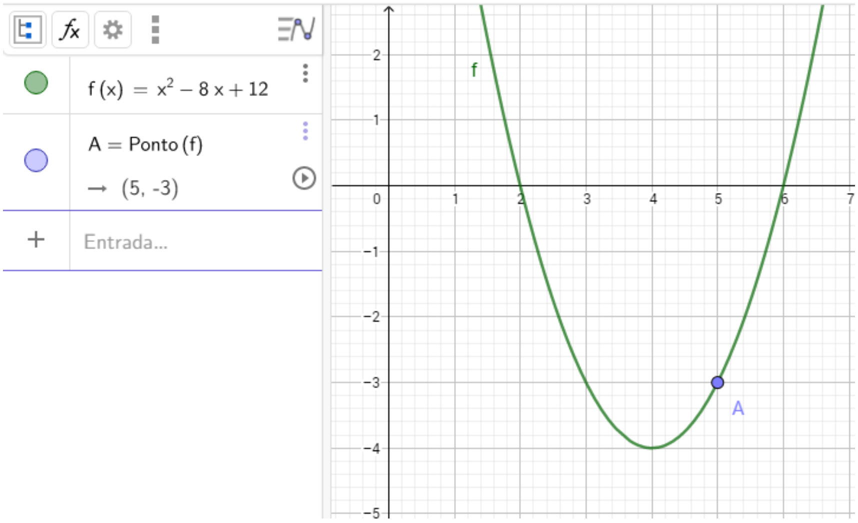
O que faremos agora é uma proposta de introdução de derivadas para o Ensino Médio via magnificação de gráficos, explorando a ideia de retidão local. As etapas a seguir são um esboço de uma sequência simplificada para o entendimento do conceito de derivada. Acreditamos que, apesar de não incluir o rigor matemático que estamos habituados a ver nos conceitos estudados no Cálculo, tem-se uma forma de abordagem que levará aos conceitos formais de maneira mais intuitiva.

Fixaremos a ideia inicial no problema de determinar equações de retas tangentes ao gráfico de uma função em um dado ponto fixado. Isso nos parece a forma mais simples de se abordar a introdução ao estudo das derivadas e, em seguida, mostrar que esse é um modelo de resolução para diversos problemas de natureza física, econômica ou biológica. Iniciamos com um exemplo de uma função familiar aos alunos.

Consideremos a parábola $y = x^2 - 8x + 12$. O ponto A destacado na Figura 3 será o ponto de partida. Com o auxílio do GeoGebra, ampliaremos o gráfico em torno desse ponto, digamos, 100 vezes em torno do ponto.

REnCiMa, São Paulo, v. 13, n. 5, p. 1-26, out./dez. 2022

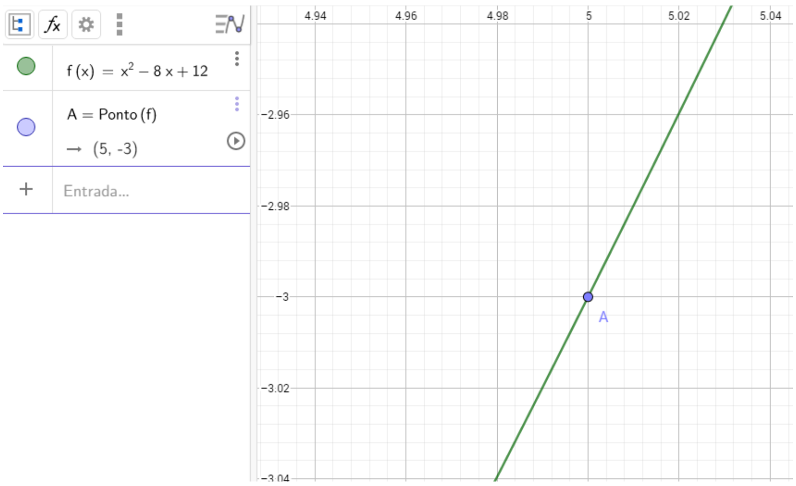
Figura 3: Gráfico de $f(x) = x^2 - 8x + 12$



Fonte: Os autores.

O resultado é visto na Figura 4. A observação do gráfico nos leva a perceber que, devidamente ampliado, o que antes era visto como uma linha curva, agora possui um aspecto retilíneo. É bastante razoável que haja questionamentos se a curva se "tornou" uma reta, por exemplo. Nesse momento, podemos falar de aproximações e o fato desse fenômeno ser algo com que nos deparamos de forma relativamente natural.

Figura 4: Magnificação de $f(x) = x^2 - 8x + 12$ no ponto A



Fonte: Os autores.

A partir daí, tendo em vista que o gráfico agora se parece com uma reta, podemos determinar a taxa de variação. É importante ressaltar que devemos sempre lembrar os alunos do aspecto de estarmos tratando de uma aproximação, isto é, de fato, o que vemos ampliado é uma curva, mas devidamente ampliado, podemos enxergar como uma reta.

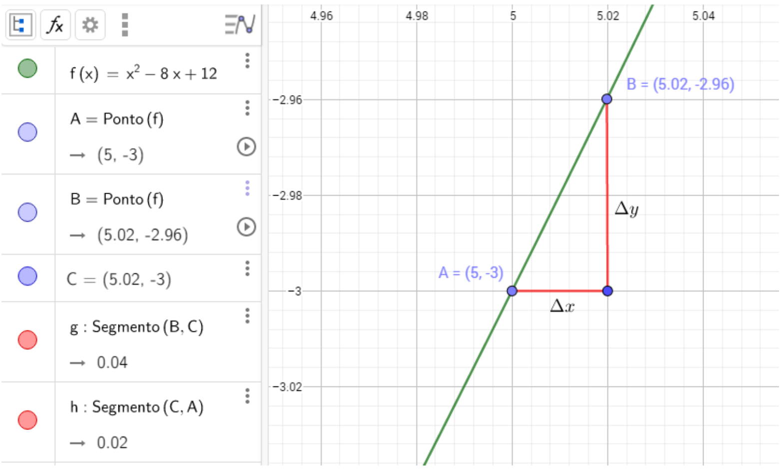
De posse disso, para obter a taxa de variação, propomos o cálculo do valor de $\Delta y/\Delta x$. Para isso, tomemos o ponto B, conforme a Figura 5.

REnCiMa, São Paulo, v. 13, n. 5, p. 1-26, out./dez. 2022

Sempre lembrando que se trata de aproximações, o coeficiente angular da "reta aproximada" (Figura 5) para $x = 5$ da função $f(x) = x^2 - 8x + 12$ é igual a 2. Assim, calculando a taxa de variação, obtemos

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(5,02) - f(5)}{5,02 - 5} = \frac{-2,96 - (-3)}{5,02 - 5} = \frac{0,04}{0,02} = 2 .$$

Figura 5: Taxa de variação aproximada de *f* na vizinhança do ponto A



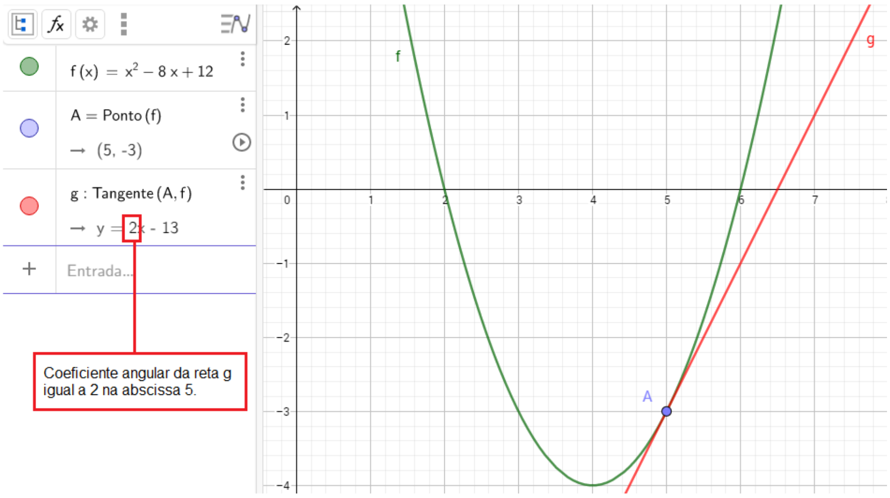
Fonte: Os autores.

Agora, vejamos o que acontece quando traçamos a reta tangente ao gráfico da função f em $x = 5$ (Figura 6). O que salientamos, neste momento, é que, apesar de ter sido feita uma aproximação local em torno do ponto A no gráfico de f, o cálculo do coeficiente angular da "reta aproximada" coincide com o coeficiente angular da reta traçada a partir do *software*. Alertamos, no entanto, que, em alguns casos, é possível que o valor calculado não coincida exatamente com o valor obtido no coeficiente da reta traçada, uma vez que estamos fazendo aproximações.

O próximo passo rumo ao conceito das derivadas é o de mostrar o aspecto local da derivada e que estamos trabalhando em uma vizinhança tão próxima do ponto $A(5, -3)$ quanto desejarmos. Em nosso exemplo, se comparamos a variação entre as abscissas de $A(5, -3)$ e $B(5{,}02; -2{,}96)$, temos um valor bem pequeno (0,02). A essa variação chamaremos de incremento h. Dessa forma, a taxa de variação pode ser expressa da seguinte forma

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(5,02) - f(5)}{5,02 - 5} = \frac{f(5 + 0,02) - f(5)}{5,02 - 5} = \frac{f(5 + h) - f(5)}{h} .$$

Figura 6: Reta tangente ao gráfico de *f* no ponto A



Fonte: Os autores.

A partir daí, podemos conduzir os alunos a pensar que o incremento *h* pode ser tão pequeno quanto desejarmos, ou seja, fazer h ser "quase" zero, porém diferente de zero. Em símbolos: $h \to 0$. Dessa forma, podemos introduzir de forma intuitiva a noção de limite. Lembrando que, em nosso exemplo, $f(x) = x^2 - 8x + 12$, desenvolveremos o quociente acima, aplicando os valores de x na função. Assim,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(5+h) - f(5)}{h} = \frac{(5+h)^2 - 8(5+h) + 12 - (-3)}{h} = \frac{(25 + 10h + h^2) - 40 - 8h + 12 + 3}{h}$$

$$= \frac{h^2 + 2h}{h} = \frac{h(h+2)}{h} = h + 2.$$

Como h se aproxima de zero, intuitivamente, tem-se que $h + 2$ se aproxima de 2. Temos, agora, todos os recursos necessários para dizer que a derivada da função $f(x) = x^2 - 8x + 12$ quando $x = 5$ é igual a 2.

Podemos, então, mostrar a notação usual para a derivada de uma função f. Denotamos por f' ou y' a derivada da função f. Em nosso exemplo, $f'(5) = 2$. É importante sempre lembrar que isso que foi feito está ligado a um conceito geométrico de reta tangente. Para os alunos menos experientes, é comum que o cálculo algébrico afaste do real objetivo: obter o coeficiente angular da reta tangente em um ponto da função. Dessa forma, podemos iniciar a construção de uma definição de derivada.

DEFINIÇÃO (PRIMÁRIA): A derivada f' de uma função f em um ponto x é o coeficiente angular da reta tangente ao ponto $(x, f(x))$ do gráfico da função.

É importante que fique claro aos alunos (e ao leitor) que essa não é a definição formal de derivada, e sim uma primeira ideia sobre o conceito, que, no momento,

REnCiMa, São Paulo, v. 13, n. 5, p. 1-26, out./dez. 2022

passa a ser uma interpretação geométrica para derivada de uma função num ponto dado. Certamente, são necessários mais exemplos para que o processo mostrado ganhe confiança e destreza para os alunos.

Ao final da exposição de dois possíveis caminhos para se introduzir derivadas, o segundo nos parece mais conveniente para o nosso propósito. Primeiramente, o fato de abordar limites de forma meramente intuitiva já é algo muito positivo para alunos do Ensino Médio, conforme aponta Farias (2015). Outro fator importante é que, nessa abordagem, usamos um *software* que leva o aluno a ter a noção de retidão local de uma curva e isso lhe é familiar, sendo assim, uma boa raiz cognitiva. Dessa forma, observamos a possibilidade de se estruturar um conceito imagem no aluno, pois foram estabelecidos os três pilares para a construção do conceito: a raiz cognitiva, citada acima; o organizador genérico escolhido, o GeoGebra; e as unidades cognitivas próximas ao aluno.

Por fim, mas não menos importante, o fato de despertar a atenção para a questão local das derivadas e não por aproximações de retas secantes são os principais motivos de optarmos pela presente escolha.

4 Metodologia e organização didática

Nesta seção, vamos exibir a abordagem adotada para a introdução do ensino de derivadas no Ensino Médio. Primeiramente, faremos uma descrição dos recursos utilizados para a aplicação do presente trabalho e, em seguida, apresentaremos a estrutura didática segundo nossa proposta. Esta foi baseada em exemplos familiares aos alunos e serviram de motivação e aplicação do conceito de derivadas.

4.1 Recursos e estrutura

Utilizamos uma das salas de uma escola particular em que o primeiro autor leciona há doze anos, localizada em bairro da Zona Norte do Rio de Janeiro. A escola (de médio porte) conta com uma boa infraestrutura e a sala de aula utilizada possui climatização e boa iluminação.

Além disso, possui um computador e um *datashow*, que são imprescindíveis para a realização das aulas. A escola também possui *internet*, necessária para uso do GeoGebra na versão *web* disponível, e rede *wifi*, sendo este um recurso não obrigatório.

4.2 Organização didática das aulas

Inicialmente, imaginamos aplicar as tarefas em uma turma de 1º ano do Ensino Médio, pois entendemos que um momento adequado seja introduzir o assunto das derivadas após o estudo da função quadrática. Entretanto, percebemos antecipadamente a dificuldade que seria interromper o conteúdo pré-estabelecido pelo cronograma escolar e, além disso, fazer com que cerca de quarenta alunos de uma turma estivessem interessados na proposta.

Fizemos a opção de um processo voluntário, nas duas turmas existentes, informando o assunto em questão e destacando que a aula seria de grande interesse para os alunos que tinham como objetivo ingressar em alguma área de exatas na universidade. Assim, dez alunos manifestaram interesse em participar das aulas. Embora, em uma primeira análise, a redução da quantidade de alunos possa limitar a observação dos possíveis resultados, imaginamos que os ganhos em um ambiente mais controlado e motivado superam essa redução.

Como todos estudavam no turno da manhã, ficaram programados encontros no turno da tarde, com duração de uma hora e meia cada. A partir daí, foi solicitado aos alunos que baixassem o aplicativo GeoGebra e determinamos uma data para o primeiro encontro. Inicialmente, foram programados quatro encontros, porém houve a necessidade de mais um para melhor entendimento dos exercícios realizados na quarta aula. A sequência a seguir representa um resumo dos conteúdos abordados e dos exercícios realizados pelos alunos.

AULA 1: Introdução, Motivação e Uso do GeoGebra

No primeiro encontro, foi feita uma breve apresentação da importância do Cálculo no desenvolvimento da Matemática e da tecnologia. Essa inserção se deu por meio de uma contextualização histórica, citando dois de seus principais personagens (Newton e Leibniz) e os adventos que só foram possíveis com a descoberta do Cálculo.

Como ilustração das ideias trabalhadas com os alunos nesse primeiro encontro, destacamos o momento da motivação para o estudo das derivadas. Separamos as duas maneiras de olhar para o conceito que estávamos prestes a estudar: a primeira com um olhar para a Física, portanto, com um caráter interdisciplinar, e a segunda, de caráter mais matemático, que trata das derivadas como um problema de determinação

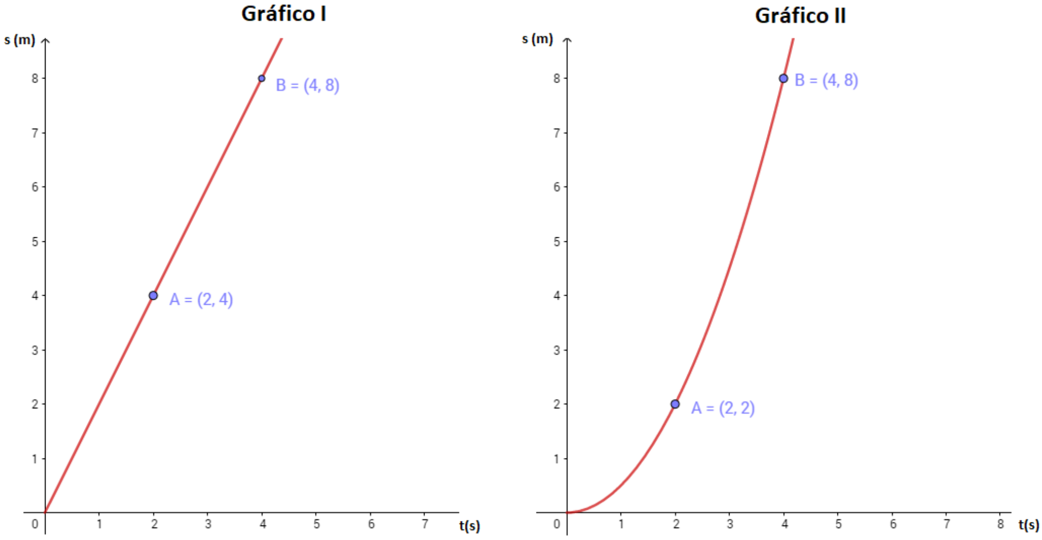
REnCiMa, São Paulo, v. 13, n. 5, p. 1-26, out./dez. 2022

de retas tangentes, ambas seguindo proposta apresentada em Barbosa, Concordido e Godinho (2016).

EXEMPLO 2: Um olhar na Física

Iniciamos propondo uma atividade para os alunos, exibindo dois gráficos deslocamento (*S*) x tempo (*t*), nos quais foi considerado um movimento de A para B nos gráficos I e II, conforme a Figura 7.

Figura 7: Aula 1 - Motivação na Física



Fonte: Os autores.

Após breve observação dos alunos, foram feitas as seguintes perguntas: “Podemos calcular a velocidade média dos móveis nos gráficos I e II? Por quê?”; “Podemos calcular a velocidade instantânea para $t = 3\ s$ nos gráficos I e II? Por quê?”.

Abrimos um espaço para que as considerações dos alunos fossem feitas. Para a primeira pergunta, chegou-se à conclusão de que para calcular a velocidade média bastaria aplicar a definição em ambos os casos. Assim, chamando V_I a velocidade média do gráfico I e V_{II} a velocidade média obtida pelo móvel II, temos que

$$V_I = \frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{8-4}{4-2} = 2\ m/s \qquad \text{e} \qquad V_{II} = \frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{8-2}{4-2} = 4\ m/s\,.$$

Na segunda pergunta, com relação ao gráfico I, os alunos responderam sem dificuldade que a velocidade para $t = 3\ s$ é $V_I = 2\ m/s$, pois como o gráfico é uma reta, a velocidade é constante em qualquer instante. Entretanto, para o gráfico II, tivemos discordância nas respostas dos alunos. Parte deles respondeu que bastaria aplicar raciocínio análogo ao usado no gráfico anterior e a outra parcela respondeu que não seria possível calcular, pois, em suas palavras, “a função não era conhecida”. Nesse

REnCiMa, São Paulo, v. 13, n. 5, p. 1-26, out./dez. 2022

momento, interferimos com uma nova pergunta: “Suponha que a curva descrita no gráfico II seja uma parábola (o que, de fato, é o caso). Dessa forma, seríamos capazes de obter a velocidade instantânea?”

Com um pouco mais de debate, verificamos que, ainda que se conhecesse a função, não seríamos capazes de determinar a velocidade no instante $t = 3\ s$ e sim apenas a posição S no instante $t = 3\ s$, pois não se trata de uma reta, ou seja, a velocidade não é constante.

Foram observados também outros aspectos importantes, como a constatação de que a velocidade média equivale ao cálculo da taxa média de variação da função em ambos os casos, ou seja, $V_M = \frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{S_F - S_0}{t_F - t_0}$. Propusemos as seguintes questões, que formaram um norte para as aulas subsequentes: “Diante do que vimos, como podemos calcular a velocidade instantânea quando o gráfico da função que descreve o movimento não tem velocidade constante?”; “E se fosse possível ‘enxergar’ o gráfico desse tipo de movimento como uma reta? Poderíamos aplicar o mesmo raciocínio utilizado no gráfico I?”.

Abordamos, então, uma segunda visão do conceito de derivadas — o problema de determinar equações de retas tangentes a um gráfico. Nesse momento, fomos bastante objetivos, restringindo ao fato de que determinar retas tangentes a gráficos é muito importante em diversas aplicações que serão vistas mais à frente.

Acreditamos que devemos, em um primeiro momento, fazer com que os alunos entendam o conceito de derivadas e que, em seguida, sejam capazes de identificar a natureza dos problemas que envolvam derivadas e aplicar o conceito.

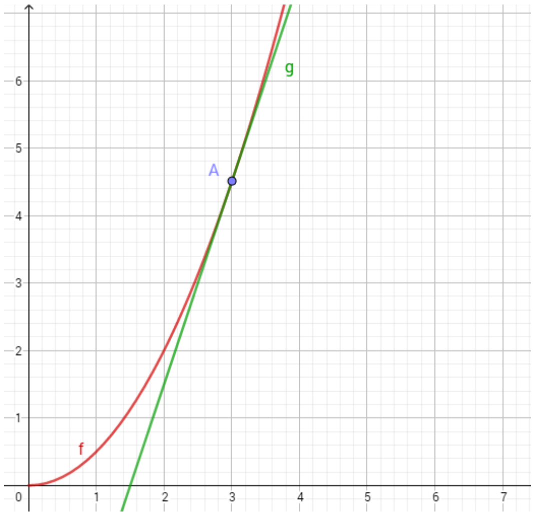
Propusemos uma atividade que tenha relação ao exemplo anterior e tomamos os gráficos como referência para fazer tal ligação entre as ideias.

EXEMPLO 3: Um olhar na Matemática

Como podemos obter a equação da reta tangente ao gráfico da função f no ponto A em que $x = 3$ (Figura 8)?

REnCiMa, São Paulo, v. 13, n. 5, p. 1-26, out./dez. 2022

Figura 8: O Problema da Reta Tangente



Fonte: Os autores.

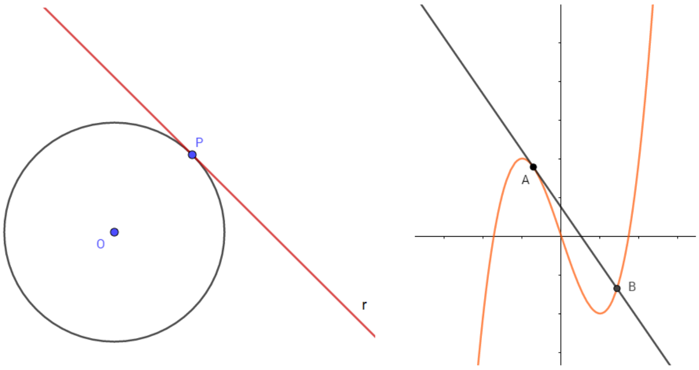
Após a exposição do problema, destacamos a importância pela busca de uma resposta para esse exemplo exposto e que, caso a solução fosse encontrada, muitos outros, assim como o nosso exemplo inicial da velocidade para $t = 3$ no gráfico II da Figura 7, poderiam ser resolvidos.

Em seguida, falamos da importância do conceito de derivadas para a solução de problemas de diversas naturezas. Logo depois, apresentamos o aplicativo GeoGebra e sua grande funcionalidade. Por meio de um *Datashow*, mostramos as principais ferramentas e propusemos alguns exercícios de construções de gráficos, edição das imagens e uso de ferramentas. Solicitamos ainda a resolução de diversas tarefas de identificação do coeficiente angular da reta tangente.

AULA 2: Reta Tangente, Magnificação e Taxa de Variação

EXERCÍCIO 1: De acordo com a imagem a seguir, como podemos diferenciar reta tangente a uma circunferência e reta tangente a um gráfico de função?

Figura 9: Reta Tangente - Circunferência x Gráfico



Fonte: Os autores.

REnCiMa, São Paulo, v. 13, n. 5, p. 1-26, out./dez. 2022

Nesta segunda aula, tratamos da reta tangente. Primeiramente, procuramos deixar claro para os alunos o que é reta tangente a um gráfico de função. Para isso, mostramos a imagem — projetada no quadro — de uma reta tangente a uma circunferência e de uma reta tangente a um gráfico de uma função polinomial (Figura 9) e pedimos que, com suas próprias palavras, descrevessem as diferenças entre as duas situações.

O resultado esperado é que os alunos consigam observar que, no caso da reta tangente a uma circunferência (caso familiar ao aluno), a reta toca a circunferência em um único ponto, enquanto uma reta tangente a um gráfico isso, em geral, não ocorre.

Vale observar que é importante mostrar exemplos das possibilidades da reta tangente a um gráfico. Pode-se fazer uma investigação das situações em que existe a reta tangente. Nesse caso, o aluno pode experimentar traçar a tangente no ponto $x = 0$ para $f(x) = |x|$.

Espera-se ainda que o aluno observe na Figura 9 o fato de a reta tangenciar o gráfico no ponto A e intersectar o mesmo gráfico no ponto B. A partir desse fato, é destacado para o aluno o caráter local que deve ser dado à reta tangente a um gráfico de função.

Em um segundo momento, apresentamos a ideia de magnificação de gráficos. Essa parte da aula se desenvolveu a partir de um gráfico — projetado no quadro — já magnificado e, em seguida, propusemos que os alunos dissessem que função melhor representava o gráfico exibido.

Diante do exposto, entendemos ter chegado o momento mais importante da proposta deste trabalho. Apresentamos aos alunos nosso primeiro objetivo: determinar a equação da reta tangente a uma curva em um determinado ponto. Para isso, fizemos uma breve revisão de taxa de variação e conduzimos os alunos a alguns exercícios de determinação da taxa de variação, observando que, a partir da ideia de magnificar gráficos, consideramos que os gráficos parecem ser retas.

No entanto, reforçamos que aproximações estavam sendo usadas e que, em nenhum momento, de fato, a curva se transformou em uma reta. O exercício a seguir ilustra as atividades propostas nessa aula.

EXERCÍCIO 2: Determine a taxa de variação da função $f(x) = -x^2 + 7x - 10$ via

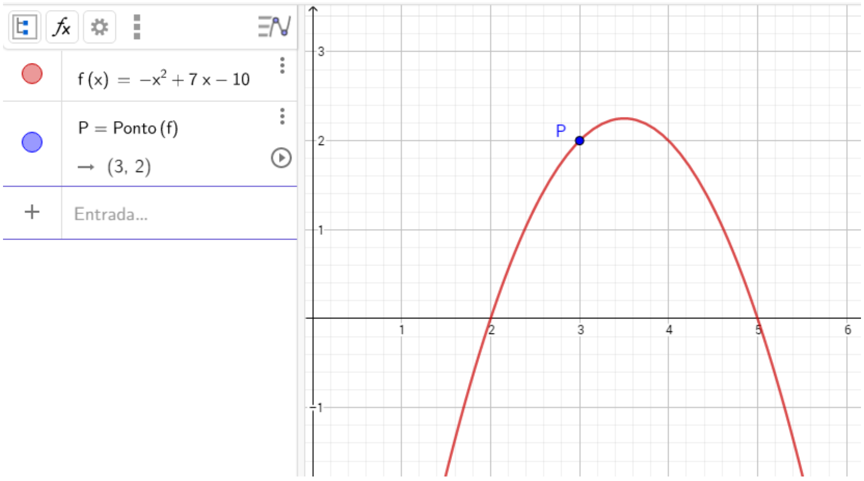
REnCiMa, São Paulo, v. 13, n. 5, p. 1-26, out./dez. 2022

magnificação do gráfico na vizinhança do ponto $P(3,2)$.

O aspecto de visualização do aluno é mostrado na Figura 10. Após a magnificação de f na vizinhança do ponto P (aqui sugerimos uma ampliação de cerca de cem vezes), o aspecto esperado de visualização é apresentado na Figura 11.

Os alunos foram orientados a determinar a taxa de variação a partir do gráfico ampliado na vizinhança de P. Era esperado, nesse momento, que, utilizando a revisão de taxa de variação, os alunos fossem capazes de obter o coeficiente angular da reta tangente em P. Foi solicitado que apresentassem os cálculos na folha de exercícios entregue nessa aula.

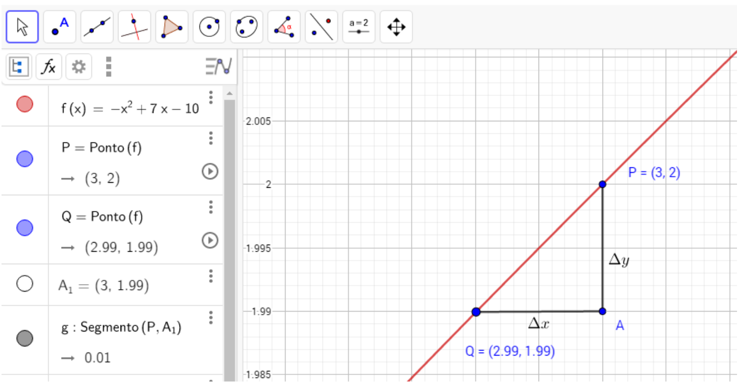
Figura 10: Gráfico da função $f(x) = -x^2 + 7x - 10$



Fonte: Os autores.

Fizemos uma orientação a respeito da escolha do segundo ponto (representado por Q) para a determinação da taxa de variação no sentido de que a escolha, como arbitrária, pode ser conveniente para facilitar os cálculos e sugerimos que fosse um ponto que estivesse perto da interseção do gráfico com a malha do plano cartesiano.

Figura 11: Taxa de Variação Aproximada



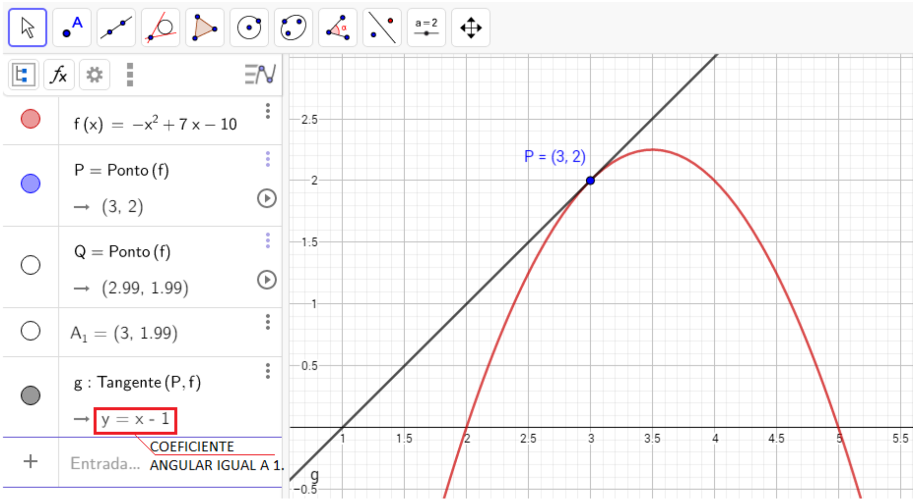
Fonte: Os autores.

Os cálculos para a taxa de variação do exercício estão sugeridos a seguir:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(3)-f(2,99)}{3-2,99}=\frac{2-1,99}{3-2,99}=\frac{0,01}{0,01}=1.$$

Lembrando que estávamos tratando de aproximações, encontramos o coeficiente angular da reta aproximada para $x = 3$ da função $f(x) = -x^2 + 7x - 10$ igual a 1. Para que pudessem comparar o resultado encontrado, propusemos um exercício utilizando a ferramenta reta tangente. O resultado encontra-se na Figura 12.

Figura 12: Reta Tangente e Coeficiente Angular



Fonte: Os autores.

Após alguns outros exemplos similares ao anterior, acreditamos que era o momento de revelar aos alunos que obter o coeficiente angular da reta tangente a um ponto do gráfico de uma função é determinar a derivada da função nesse ponto. Daí, apresentamos a primeira definição (que chamamos “definição primária”) para o conceito assim como a sua notação. Dessa forma, temos que, no exemplo anterior, $f'(3) = 1$, ou seja, a derivada da função f no ponto $x = 3$ é igual a 1.

Ao final dessa aula, deixamos a seguinte pergunta para o próximo encontro: “Dada uma função f, será que podemos encontrar uma forma genérica para determinar a derivada de f em qualquer ponto?”

AULA 3: Cálculo da Derivada num Ponto

Nesta aula, o cálculo da derivada das funções mais familiares aos alunos foi introduzido. A seguir, apresentamos um dos vários exercícios aplicados.

EXERCÍCIO 3: Determine, por magnificação do gráfico, o coeficiente angular da reta tangente ao gráfico da função $f(x) = x^2 - 8x + 12$ no ponto de abscissa $x = 5$.

Essa atividade se deu de forma satisfatória, com boa execução pelos alunos,

REnCiMa, São Paulo, v. 13, n. 5, p. 1-26, out./dez. 2022

tendo em vista a realização de exercícios similares na aula anterior. Com a definição da última aula, a derivada do exercício anterior foi calculada obtendo o coeficiente angular da reta aproximada após a magnificação do gráfico em torno do ponto A. Como simples verificação, solicitamos que os alunos traçassem a reta tangente usando a ferramenta "reta tangente" do GeoGebra para comparar os resultados.

Nesse momento, lembramos a pergunta deixada na última aula. O procedimento adotado para buscar uma resposta foi o de partir de um exemplo numérico para uma generalização, conforme descrito a seguir.

Iniciamos mostrando o aspecto local da derivada e que se estávamos trabalhando em uma vizinhança tão próxima do ponto $A(5, -3)$ quanto desejávamos. Os cálculos detalhados foram então realizados. Fizemos, neste momento, breves comentários com os alunos a respeito do conceito de limites. Embora de suma importância para o desenvolvimento e formalização dos conceitos do Cálculo, citamos apenas sua existência e a noção intuitiva que apareceu na análise do incremento infinitesimal $h \neq 0$. Partimos, então, para a forma mais geral do exemplo. Temos que

$$\begin{aligned}\frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{(x+h)^2-8(x+h)+12-(x^2-8x+12)}{h} = \\ &= \frac{x^2+2hx+h^2-8x-8h+12-x^2+8x-12}{h} \\ &= \frac{h^2+2hx-8h}{h} = \frac{h(h+2x-8)}{h} = h+2x-8.\end{aligned}$$

Fazendo $h \to 0$, temos que $f'(x) = 2x - 8$. Encontramos a derivada da função $f(x) = x^2 - 8x + 12$ para qualquer ponto. Por exemplo, se $x = 4$, temos que $f'(4) = 0$. Solicitamos também que os alunos verificassem no aplicativo a resposta encontrada.

Os exercícios estabeleceram uma ponte para o quarto e último encontro, no qual abordamos diversas aplicações das derivadas. O encerramento se deu com um debate sobre a interpretação da derivada da função ser igual a zero. Ressaltamos a importância de compreender bem o aspecto geométrico da derivada de uma função ser igual a zero, pois, como seria visto à frente, essa ideia nos ajudaria a resolver muitos problemas.

REnCiMa, São Paulo, v. 13, n. 5, p. 1-26, out./dez. 2022

AULA 4: Aplicações da derivada

No último encontro programado, procuramos estudar diversas situações em que o conceito de derivada de uma função pode ser aplicado. Apesar das limitações devido ao nível de conhecimento sobre funções por parte dos alunos, existem muitas situações-problema que recaem em funções quadráticas, e nestas podemos determinar máximos e mínimos, que são tipicamente problemas que envolvem derivadas. Vimos, também, em um segundo momento, que o estudo das derivadas nos auxilia no estudo do comportamento das funções, mesmo que não se conheça a natureza da função.

A seguir, mostramos dois dos exercícios feitos com os alunos para a introdução do assunto.

EXERCÍCIO 4: Uma pessoa deseja construir um cercado de forma retangular utilizando-se de uma tela de 20 m. Sabendo que ele vai usar um muro como fundo do cercado, determine as dimensões dele para que sua área seja máxima.

EXERCÍCIO 5: O custo C de um produto fabricado por uma cooperativa agrícola, em milhares de reais, é dado pela função $C(x) = 6x - 4$, onde x está em milhares de unidades. Verificou-se que o faturamento F de venda desses produtos, também em milhares de reais, é dado pela função $F(x) = x^2 + 9x$. Sendo assim, qual é o lucro máximo que a empresa pode obter?

Encerramos essa aula comentando a natureza dos exercícios propostos e a existência de uma infinidade de outras aplicações de derivadas. Esse seria o último encontro, mas diante do interesse e da disponibilidade dos alunos, marcamos mais um para trabalhar alguns exemplos e esclarecer dúvidas.

Para o leitor, deixamos aqui uma observação em relação à organização das aulas. Em um primeiro momento, acreditamos que seria possível estruturar todo o trabalho proposto em quatro encontros. Mas é claro que esse número é apenas uma sugestão, pois depende do nível de amadurecimento dos alunos e de possíveis dificuldades encontradas pelo caminho. Para citar uma dessas barreiras, foi necessário fazer uma pequena revisão de álgebra básica, pois percebemos alguns erros durante o desenvolvimento de cálculos algébricos dos alunos. Assim, a estrutura sugerida pode ser modificada mediante a necessidade daqueles que, porventura, experimentem o presente trabalho.

REnCiMa, São Paulo, v. 13, n. 5, p. 1-26, out./dez. 2022

5 Resultados e considerações finais

Nosso trabalho teve como objetivo apresentar uma proposta de sequência didática para o ensino da derivada no Ensino Médio, utilizando como ferramenta um aplicativo para *smartphones* e apoiada nos fundamentos teóricos desenvolvido por David Tall. Pretendemos, de forma modesta, contribuir com outros que se aventurem a usar essa tentativa de organizar uma maneira de introduzir derivadas no Ensino Médio.

O uso de tecnologia em sala de aula é uma realidade e todos nós, que estamos à frente na mediação do aprendizado, devemos estudar e nos aprofundar nas técnicas e recursos tecnológicos educativos disponíveis, assim como tomar como prática efetiva esses recursos em sala de aula. O GeoGebra é um aplicativo muito versátil e mostrou-se uma ferramenta útil para o aprendizado das derivadas, tornando-se um instrumento de muitas possibilidades nas mãos dos alunos.

Essa, sem dúvida, foi uma oportunidade interessante de ver os alunos tendo contato com um assunto que, muitas vezes, é considerado algo impensável para seu nível. Outrossim, a certeza de se aprofundarem em assuntos já estudados, mas talvez não tão bem compreendidos anteriormente como o conceito de taxa de variação e sua importância no estudo das funções, foi mais um aspecto positivo extraído dessa experiência.

Além disso, a ideia de magnificar gráficos foi por si só uma experiência positiva para os alunos, pois nenhum deles tinha imaginado tal recurso, muito embora, intuitivamente, todos tenham aceitado a ideia de retidão local de um gráfico com curvas. Realmente, essa noção aparenta estar dentro de nós, mas, às vezes, é necessário apontar para que seja revelada.

Com relação aos resultados, as dificuldades observadas não se concentraram no novo conceito apresentado, eram aquelas comuns que presenciamos no cotidiano da sala de aula. Vale destacar o empenho dos alunos em realizar da melhor forma possível as tarefas propostas. As dificuldades apareceram, como era de se esperar, mas foi possível observar, em alguns casos, um bom aproveitamento do conteúdo ministrado. Uma convicção obtida ao longo desse projeto foi a de que é um assunto que merece ser debatido e continuado.

Esse trabalho teve o cuidado de apresentar o conceito central das derivadas sem exibir toda a sua carga simbólica. Entendemos que as notações usadas, muitas vezes, desviam a atenção do aluno em um primeiro estudo. Isso não quer dizer que as notações em símbolos sejam ruins; ao contrário, elas são fundamentais na Matemática, mas, para alunos ainda imaturos, pode ser uma dificuldade a mais na compreensão do conceito. Essa é a ideia base que David Tall busca implementar no ensino da Matemática. A prioridade deve estar em buscar o melhor ponto de partida (raiz cognitiva) para se chegar a um conceito sólido, fato que, muitas vezes, não é atingido pelas definições que não constituem uma formação do conceito imagem.

Destacamos, por fim, que a proposta desse trabalho foi a de apresentar a derivada para alunos do 1º ano do Ensino Médio, pela possível introdução do tema logo após o estudo de máximos e mínimos da função quadrática e com o conceito de taxa de variação recém estudado. Entretanto, podemos propor outros momentos para aplicar essa proposta. Por exemplo, pode-se introduzir a derivada juntamente com Geometria Analítica no 3º ano. Podemos imaginar, também, em turmas específicas para concursos militares como Instituto Militar de Engenharia, Instituto Tecnológico de Aeronáutica e Colégio Naval, que cobram esse conteúdo, ou até mesmo um curso de Pré-Cálculo como disciplina preparatória para a de Cálculo. Enfim, esse assunto permite um vasto campo de discussões e possibilidades de aplicações.

Sabemos que o ensino de derivadas no Ensino Médio é complexo e envolve fatores como tempo, currículo e até mesmo a capacitação dos professores para a abordagem do assunto. Mas, apesar de todas as dificuldades, acreditamos que as vantagens sejam significativas. Vale ressaltar que a reforma do Ensino Médio, que permitirá aos alunos escolherem áreas de maior interesse, seja uma oportunidade para a introdução do Cálculo.

Referências

ÁVILA, Geraldo. Limites e Derivadas no Ensino Médio? **Revista do Professor de Matemática**, Rio de Janeiro, n. 60, p. 30-38, 2006.

BARBOSA, Augusto Cesar de Castro; CONCORDIDO, Cláudia Ferreira Reis; GODINHO, Leandro Machado. Uma Proposta para o Ensino de Derivada na Primeira Série do Ensino Médio no Brasil. **Educação Matemática em Revista - RS**, Porto Alegre, n. 17, v. 1, p. 28-39, 2016.

BARNARD, Tony; TALL, David. Cognitive Units, Connections and Mathematical Proof. In: CONFERENCE OF THE INTERNATIONAL GROUP FOR THE PSYCHOLOGY OF MATHEMATICS EDUCATION, 21., 1997, Lahti, Finland. **Proceedings of PME 21.** Lahti: University of Helsinki, 1997, v. 2, p. 41-48.

REnCiMa, São Paulo, v. 13, n. 5, p. 1-26, out./dez. 2022

BEZERRA, Manoel Jairo; PUTNOKI, José Carlos. **Novo Bezerra:** Matemática (2º grau - Volume Único). São Paulo: Scipione, 1999.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Básica. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília: MEC/SEB, 2018.

CARNEIRO, José Paulo, WAGNER, Eduardo. Vale a pena estudar Cálculo? **Revista do Professor de Matemática**, Rio de Janeiro, n. 53, p. 9-16, 2003.

CORNU, Bernard. Limits. In: TALL, David. (Org.). **Advanced Mathematical Thinking**. Boston/London: Kluwer Academic Press, 1991. p. 153-166.

DANTE, Luiz Roberto. **Matemática**: contexto & aplicações. 5. ed. São Paulo: Ática, 2019.

FARIAS, Maria Margarete do Rosário. **Introdução a Noções de Cálculo Diferencial e Integral no Ensino Médio no Contexto das TIC**: implicações para prática do professor que ensina Matemática. 2015. 143 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas. Universidade Estadual Paulista. Rio Claro.

FLEMMING, Diva Marília; GONÇALVES, Mirian Buss. **Cálculo A**. 5. ed. Florianópolis: Makron, 1992.

GIRALDO, Victor; CARVALHO, Luiz Mariano de. Magnificação e Linearidade Local: novas tecnologias no ensino de conceito de derivada. **Trends in Applied and Computational Mathematics**, São Carlos, v. 3, n. 2, p. 101-110, 2002.

HALLAL, Renato; PINHEIRO, Nilcéia A. M.; OLIVEIRA, Reginaldo; CIAPPINA, Jussara R.; ALVARISTO, Eliziane F. O Ensino de Matemática e o *Software* GeoGebra: apresentando potencialidades dessa relação como recurso para o ensino de derivada. **Espacios**, Caracas, v. 41, n. 3, p. 229-245, 2020.

IEZZI, Gelson *et al.* **Matemática:** ciência e aplicações. 8. ed. São Paulo: Atual, 2019.

MOLON, Jaqueline; FIGUEIREDO, Edson Sidney. Cálculo no Ensino Médio: uma abordagem possível e necessária com auxílio do s*oftware* Geogebra. **Ciência e Natura**, Santa Maria, v. 37, p. 156-178, 2015.

PAIS, Luiz C. **Didática da Matemática**: uma análise da influência francesa. 3. ed. Belo Horizonte (MG): Autêntica Editora, 2011.

PIMENTA, Cintia Cerqueira Cunha; LOPES, Priscila Almeida. O uso do celular em sala de aula como ferramenta pedagógica: benefícios e desafios. **Revista Cadernos de Estudos e Pesquisa na Educação Básica**, Recife, v. 3, n. 1, p. 52-66, 2017.

TALL, David. Biological Brain, Mathematical Mind & Computational Computers (how the computer can support mathematical thinking and learning). In: ASIAN TECHNOLOGY CONFERENCE IN MATHEMATICS, 5., 2000, Chiang Mai, Thailand, **Proceedings of the Fifth Asian Technology Conference in Mathematics**. Chiang Mai: Chiang Mai University, 2000, p. 3-20.

TALL, David. Concept Images, Generic Organizers, Computers & Curriculum Change.

REnCiMa, São Paulo, v. 13, n. 5, p. 1-26, out./dez. 2022

For the Learning of Mathematics, Edmonton, v. 9, n. 3, p. 37-42, 1989.

TALL, David; VINNER, Shlomo. Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. **Educational Studies in Mathematics**, Dordrecht, v. 3, n. 12, p. 151-169, 1981.