Resolução de Problemas de Otimização com o Auxílio do Software GeoGebra

Problem Solving Optimization with Aid of Software GeoGebra

ANDRÉ LÚCIO GRANDE [1]
VÁGNER RAMOS VAZQUEZ [2]

Resumo

Este artigo, resultado de um minicurso ministrado pelos autores, tem por objetivo mostrar algumas aplicações do GeoGebra como ferramenta auxiliar na resolução de problemas de otimização, especificamente sobre minimização de distâncias. Como referencial teórico, utilizou-se as ideias ligadas à importância da intuição no ensino e aprendizagem da Matemática. Esta pesquisa se constitui como sendo do tipo qualitativa, tendo como procedimento metodológico a elaboração de uma sequência de ensino e apresentando como sujeitos da pesquisa alunos de uma faculdade pública do Estado de São Paulo. Como resultados, observou-se as múltiplas utilidades do GeoGebra na resolução de problemas de otimização.
Palavras-chave: *otimização de funções, intuição e rigor, ensino e aprendizagem do Cálculo.*

Abstract

This article, the result of a short course taught by the authors, aims to show some applications of GeoGebra as an auxiliary tool in solving optimization problems, specifically on minimizing distances. As a theoretical framework, we used the ideas relating to the importance of intuition in teaching and learning mathematics. This research is a qualitative as having methodological procedure as the preparation of a teaching sequence that introduces students to research subjects of a public college in the State of São Paulo. The results showed the multiple uses of GeoGebra in solving optimization problems.
Keywords: *optimization functions, intuition and rigor, teaching and learning of calculus.*

Introdução

No Ensino Superior os cursos de tecnologia vêm apresentando nos últimos anos um número cada vez maior da oferta de vagas em suas diversas modalidades. Um dos componentes curriculares desses cursos que apresenta elevado índice de reprovação em decorrência das dificuldades demonstrada pelos alunos na compreensão de seus conceitos considerados fundamentais é o Cálculo Diferencial e Integral (CDI).

[1] FACULDADE DE TECNOLOGIA DE MAUÁ – andremath@uol.com.br
[2] FACULDADE DE TECNOLOGIA DE MAUÁ – vagnervazquez@hotmail.com

Dos conteúdos abordados num curso de CDI, a derivada de uma função é um tema que apresenta uma infinidade de aplicações, tais como: estudos de taxas de variação e o cálculo de otimização (determinação de pontos máximos e mínimos relativos de uma função).

Tais problemas de otimização são de grande importância na área em que os mesmos são aplicados, e os métodos de resolução possuem uma grande gama de recursos, dependendo da complexidade de cada problema.

Nesses cursos, em grande medida, os componentes são ministrados com enfoque nas aplicações cotidianas, priorizando-se a resolução de problemas voltada ao mercado de trabalho, onde a questão do rigor e da intuição são aspectos que devem ser levados em consideração no processo de ensino e aprendizagem.

Um dos recursos tecnológicos auxiliares nesse processo são os softwares como os de Geometria Dinâmica, que apresentam alguns benefícios que devem ser ressaltados e colocados em questão.

Dentre os softwares com esse perfil, em que se pode explorar o raciocínio intuitivo do aluno como ponto de partida para se alcançar o nível de formalização dos conceitos matemáticos, o GeoGebra possui diversos recursos como a opção de se manipular simultaneamente com diversos registros de representação de um mesmo objeto matemático. Assim, por exemplo, uma reta no plano pode ser representadade diversas maneiras, sendo que a sua construção pode ser feitas de forma geométrica e algébrica simultaneamente.

Essa coordenação simultânea de registros que o GeoGebra oferece constitui-se como um elemento essencial na exploração das propriedades dos objetos matemáticos.

Diante desse cenário e procurando alternativas que contribuam para o ensino e aprendizagem do CDI, ao abordar especificamente o tema otimização de funções, pode-se formular as seguintes questões: Quais as contribuições do GeoGebra na resolução de problemas de otimização de funções? Quais são os recursos podem ser explorados no sentido de se modelar tais problemas?

Com isso, serão apresentados a seguir alguns fundamentos teóricos para procurar elucidar e responder tais questionamentos.

1. Fundamentação teórica

A Matemática é uma ciência que se utiliza do raciocínio lógico-dedutivo, entretanto emmuitas situações, no que se refere ao ensino e aprendizagem de seus conceitos, não são explorados alguns aspectos cognitivos como a intuição ea imaginação no processo de construção do conhecimento matemático, sendo que o tratamento dos objetos matemáticos é feito de maneira axiomática. Ávila (2011) explicita e defende o ponto de vista do ensino baseado em características intuitivas:

> A ideia de que o pensamento matemático se reduz a seus aspectos lógico-dedutivos – uma ideia muito difundida, mesmo entre professores de Matemática – é incompleta e exclui o que há de mais rico nos processos de invenção e descoberta. O pensamento matemático vai muito além do raciocínio dedutivo. Em seus aspectos mais criativos, a Matemática depende da intuição e da imaginação, às vezes até mais que da dedução. (ÁVILA, 2011, p. 4)

Courant e Robbins (2000) criticam o método axiomático afirmando que o mesmo traz poucos benefícios, a não ser que os postulados sejam simples e pouco numerosos. Segundo os autores, em contrapartida ao ensino carregado de abstrações, que pode ser resumido apenas a um sistema construído por meio de axiomas e demonstrações e sem nenhuma preocupação com a exploração alguns aspectos cognitivos, a intuição constitui o núcleo de qualquer invenção matemática, mesmo nos campos mais abstratos, sendo um elemento da construção dos conceitos matemáticos. Para os autores:

> O ensino da Matemática tem algumas vezes degenerado em exercício repetitivo e vazio de soluções de problemas, o que pode desenvolver capacitação formal, mas não conduz a uma real compreensão ou maior independência intelectual. A pesquisa matemática tem mostrado uma tendência no sentido da super especialização e da ênfase excessiva na abstração. (COURANT e ROBBINS, 2000, prefácio do autor)

Para Ávila (2011) formular conjecturas por meio de analogias, intuições e a seguir demonstrá-las rigorosamente constitui uma tarefa essencial do pesquisador em Matemática:

> O pesquisador, com sua experiência e familiaridade em determinada área de investigação, valendo-se das várias modalidades do raciocínio (indução, analogia de uma situação com outra, argumentos de plausibilidade) e da intuição, e levado a suspeitar da validade de um novo resultado ou teorema. A demonstração, em geral, e a etapa final, que completa o trabalho de investigação. (ÁVILA, 2011, p. 5)

O autor ainda reitera a importância da intuição no pensamento matemático:

> A intuição éa faculdade mental que permite obter o conhecimento de maneira direta, sem a intervenção do raciocínio. Os matemáticosfrequentemente se referem a algum fato como “intuitivo”, querendo com isso dizer que se trata de algo cuja veracidade e facilmente reconhecível. Mas é bom lembrar que “intuitivo” não e sinônimo de “fácil”. Há muitas verdades profundas e difíceis que são aprendidas pela intuição. (ÁVILA, 2011, p. 4)

Analisando tais pontos de vista que convergem para a proposta desse trabalho, como referencial teórico serão utilizadas as ideias ligadas ao uso da intuição e do rigor segundo a visão do filósofo e matemático francês Henri Poincaré, que aborda em suas obras como *A Ciência e a Hipótese* (1984) e *O Valor da Ciência* (1995), alguns temas que discutem o papel da intuição, da lógica e da hipótese na construção do pensamento cientifico. Também serão utilizadas as noções e as característicasdo raciocínio intuitivo descritas por Efraim Fischbein (1991).

Fischbein assim como Poincaré afirma que a Matemática pode ser considerada sob dois pontos de vista: como corpo do conhecimento formal, rigoroso e dedutivo, exposto em alguns tratados e livros didáticos, e como uma atividade humanadefendida de maneira análoga pelos construtivistas.

O autor discute a interação existente entre três componentes básicos da Matemática como uma atividade humana: o formal, o algorítmico e o intuitivo.

O *aspecto formal* se refere aos axiomas, definições, notações, teoremas e demonstrações. Esses elementos são criados ou aprendidos, organizados, testados e usados nas atividades pelos estudantes.

O *componente algorítmico* diz respeito às técnicas de resolução de problemas e as estratégias padronizadas. Segundo Fischbein, é uma mera ilusão acreditar que o conhecimento de axiomas, teoremas, demonstrações, da maneira que encontramos formalmente nos livros-texto de Matemática, ou seja, o aspecto formal descrito anteriormente é condição suficiente para que um estudante seja capaz de resolver problemas matemáticos. Além do aspecto formal, se faz necessário criar habilidades e não somente à compreensão dos conceitos, sendo essas habilidades adquiridas somente pela prática e o treino sistemático.

O terceiro componente diz respeito à *intuição,* sendo um tipo de cognição que é aceito diretamente sem o sentimento de que algum tipo de justificação e solicitada. A principal característica da intuição é a denominada auto-evidência, em que as afirmações são aceitas sem que seja solicitada uma verificação ou demonstração a priori.

Essas componentes não podem ser analisadas nem se desenvolverem de maneira isolada, pois são as inter-relacionadas entre essas componentes que promovem o desenvolvimento das atividades matemáticas.

Fischbein alerta sobre a complexidade da relação entre os componentes formal, o algorítmico e a intuição. Essas interações e conflitos na atividade matemática não são facilmente identificados e compreendidos, todavia análises teóricas, observações atentas e estudos experimentais têm colaborado com as pesquisas em Educação Matemática para identificar possíveis dificuldades, interações e a importância dos componentes descritos anteriormente.

2. Metodologia e procedimentos metodológicos

Este trabalho apresenta as características de uma pesquisa qualitativa. Os resultados desta pesquisa são oriundos de um minicurso ministrado numa faculdade pública do Estado de São Paulo.

O minicurso, realizado no dia 17 de Outubro de 2012, teve duração de duas horas e apresentou como objetivo mostrar alguns recursos do software GeoGebra na resolução de problemas de otimização, com ênfase no problema de localização de um ponto para minimizar a distância total percorrida, sendo que sua utilização baseia-se nos princípios descritos no referencial teórico.

Os sujeitos da pesquisa se constituíram de 40 alunos, divididos em duas turmas, regularmente matriculados na mesma instituição de ensino nos cursos de tecnologia, sendo que os mesmos já cursaram ou cursam a disciplina Cálculo Diferencial e Integral e já tiveram contato com o assunto derivada de uma função.

O minicurso desenvolveu-se no laboratório de Informática da faculdade e foi ministrado pelos autores desse trabalho. Todos os computadores possuíam previamente instalados o software GeoGebra 4.0, sendo que nenhum dos estudantes que participaram do minicurso já havia utilizado tal recurso tecnológico, o que despertou um grande interesse por parte dos mesmos em utilizá-lo.

2.1. Objeto Matemático

Dentre as diversas aplicações de derivada de uma função, a resolução dos problemas de máximos e mínimos se constitui de um tópico, que além de sua importância inata na solução de problemas cotidianos voltados a área tecnológica, pode estimular em grande medida um incentivo ao estudo dos conceitos fundamentais do CDI por parte dos alunos.

Esse tipo de problema, por sua simplicidade e aplicabilidade em áreas como, por exemplo, logística e transportes, será o objeto de estudo na utilização do software como recurso auxiliar.

O problema selecionado baseia-se no Princípio de Fermat, que surgiu com a resolução do problema do caminho mínimo relacionado à trajetória da luz, em que se demonstrou que a mesma percorre a trajetória em tempo mais rápido.

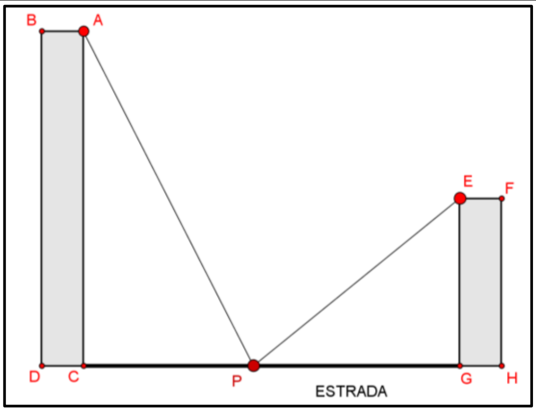
Por meio dos recursos do software objetiva-se modelar-se o problema privilegiando os aspectos cognitivos da intuição, do estabelecimento de conjecturas e do formalismo na construção do conhecimento matemático.

2.2 O encontro

O minicurso foi realizado com a participação de duas turmas de 20 alunos cada, sendo ministrado nos períodos da manhã e noite, onde se observou o comparecimento de todos os alunos que se inscreveram previamente.

Cada aluno no período escolhido trabalhou individualmente no laboratório de informática da faculdade, sendo que os mesmos acessaram pelo GeoGebra o arquivo contendo o seguinte problema proposto a seguir:

> Numa estrada, com 9 km de comprimento será construída uma estação de tratamento de água (ETA), localizada no ponto *P*, para abastecer duas cidades *A* e *E*, localizadas ao norte dos pontos C e G cujas distâncias são 8 km e 4 km respectivamente da estrada, conforme a figura 1 a seguir:



Determine a que distância $\boldsymbol{x}$ do ponto C deve ser instalada a estação de tratamento de modo que a soma das distâncias da estação às cidades $L = |\overline{AP}| + |\overline{PE}|$seja mínima.

FIGURA 1: Problema proposto

De maneira resumida, pois esse trabalho não apresenta o objetivo de detalhar como se construíram os objetos matemáticos no GeoGebra, temos o retângulo ABCD, com $med(\overline{AC}) = 8$, o retângulo EFGH com $med(\overline{EG}) = 4$ e o ponto P pertencente ao segmento $\overline{CG}$ podendo movimentar-se livremente sobre o mesmo, sendo $med(\overline{CG}) = 9$

Construindo-se os segmentos $\overline{AP}$ e $\overline{PE}$ de comprimentos variáveis, deseja-se saber onde devemos localizar o ponto P de modo que a soma $\mathrm{L} = |\overline{\mathrm{AP}}| + |\overline{\mathrm{PE}}|$ seja mínima.

No início permitiu-se que os alunos pudessem mover livremente o ponto P sobre o segmento $\overline{CG}$, entretanto sem a utilização de um sistema de coordenadas cartesianas.

Os alunos acharam interessante o fato do softwarepermitir uma manipulação dinâmica do problema, sem, inicialmente, encontrar-se uma solução. Esse recurso do GeoGebra constitui um importante recurso no processo de modelagem do problema.

Nesse primeiro momento, alguns alunos formularam algumas conjecturas, tais como:

Aluno 1 – A distância deve diminuir à medida que o ponto P se aproxima do ponto C, pois a hipotenusa $\overline{AP}$ parece ter medida maior que a hipotenusa$\overline{PE}$.

Aluno 2 – Acho que quanto mais próximo do ponto C a distância deve diminuir.

Aluno 3 – Sendo que uma distância aumenta e a outra diminui, não acabará “compensando” e, com isso, a distância total não seria constante?

Aluno 4 – Qual seria a distância quando o ponto P coincidir com o ponto C? E com o ponto G?

Observou-se que alguns alunos, por meio da intuição geométrica, possuem a convicção de que a distância diminui à medida que o ponto P aproxima-se do ponto C.

Esse componente intuitivo, conforme descreve Fischbein, constitui um ponto inicial para a formulação de questionamentos para posteriormente serem refutadas ou comprovadas.

A seguir, solicitou-se aos alunos por meio de um comando do GeoGebra a visualização dos eixos do sistema de coordenadas cartesianas no sentido de se "algebrizar” o problema, conforme a figura representada a seguir:

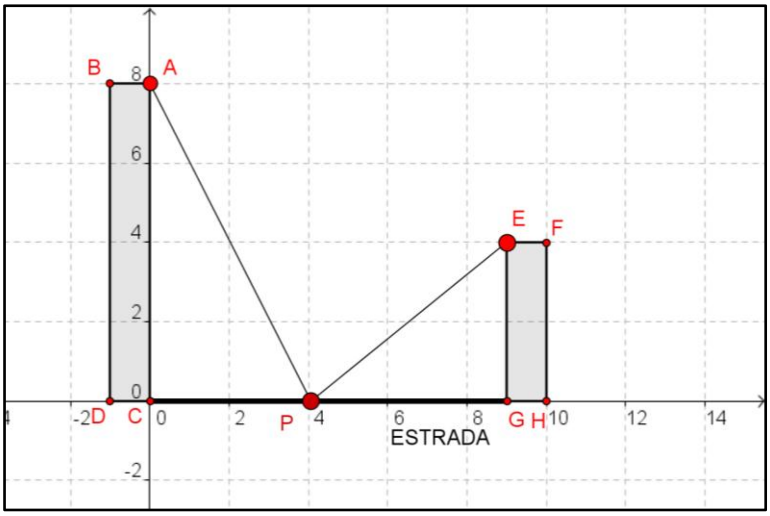


FIGURA 2: Utilização de um sistema de coordenadas cartesianas

Para essa situação, observou-se que alguns alunos procuravam posicionar o ponto P a uma distância qualquer do ponto C e posteriormente calculavam as medidas das hipotenusas $\overline{AP}$ e $\overline{PE}$, objetivando assim encontrar uma distância em que a mesma possa aumentar ou diminuir.

Outra conjectura interessante é o fato de alguns alunos perceberam que à medida que o ponto P desloca-se para a direita a distância $\overline{\mathrm{AP}}$ aumenta enquanto que a distância $\overline{\mathrm{PB}}$ diminui e vice-versa.

Nessa segunda etapa observou-se o componente algorítmico descrito por Fischbein, em que o aluno procura por meio de uma “técnica memorizada” ou a utilização de um teorema ou algoritmo para se encontrar a solução para o problema.

Após a formulação de conjecturas, realizou-se uma intervenção com o seguinte questionamento para os alunos: Como vocês imaginam que seria o gráfico da função

L(x), onde L representa a soma das distâncias $|\overline{AP}| + |\overline{PE}|$ e x a distância do ponto P ao ponto C?

Por se tratar de um problema de máximos e mínimos de uma função, uma hipótese elaborada por um aluno chamou a atenção:

Aluno 5 – Por se tratar de um problema de minimizar, então a função é polinomial do segundo grau e a sua representação gráfica é uma parábola.

Solicitou-se aos alunos que abrissem uma segunda janela de visualização, onde se utilizou um segundo plano cartesiano que possui o ponto X_1 de coordenadas variáveis, onde ao movimentar-se o ponto P observa-se o deslocamento do ponto X_1. Utilizando-se o comando habilitar rastro do ponto X_1 observa-se que o mesmo descreve no plano cartesiano a variação da distância total $L = |\overline{AP}| + |\overline{PE}|$ em função da distância x do ponto P ao ponto C.

Essa coordenação simultânea dos registros gráficos e geométricos é um dos grandes recursos que o GeoGebra possui no estudo e modelagem de problemas desse tipo. O uso dessa ferramenta permitiu aos participantes refutar algumas conjecturas formuladas anteriormente, quando se observou pelo gráfico gerado que o valor de L diminui num determinado intervalo de x e a seguir aumenta, sendo que para um determinado valor de x teremos a distância total L mínima.

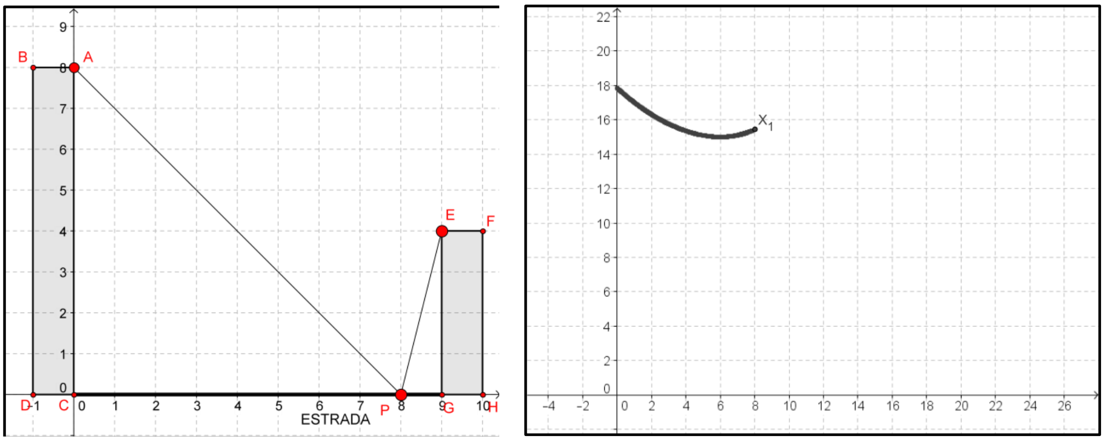


FIGURA 3: Janelas de Visualização

No sentido de se formalizar o problema, após interação e coordenação simultânea algebricamente o mesmo ser modelado da seguinte maneira:

Seja $x = |\overline{CP}|$a distância do ponto P ao ponto C e L a distância total. Sendo assim, temos que:

Minimizar: $L = |\overline{\text{AP}}| + |\overline{\text{PE}}|$

$$L = \sqrt{x^2 + 8^2} + \sqrt{(9 - x)^2 + 4^2}$$

$$L(x) = \sqrt{x^2 + 64} + \sqrt{(9 - x)^2 + 16}$$

O domínio da função L é o conjunto $D_L = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq 9\}$.

Para encontrarmos os extremos relativos da função L devemos impor a condição necessária em que:

$$\frac{dL}{dx} = 0$$

o que nos leva à seguinte equação:

$$\frac{x}{\sqrt{x^2 + 64}} - \frac{(9 - x)}{\sqrt{(9 - x)^2 + 16}} = 0 \qquad (I)$$

Resolvendo a equação I descrita anteriormente, temos que $x = 6\ km$.

Entretanto a equação I exige uma manipulação algébrica relativamente grande, considerando-se que para problemas com um número maior de variáveis o grau de complexidade da resolução aumenta.

Sendo assim, o GeoGebra pode ser utilizado novamente como ferramenta para encontrar-se o resultado otimização. Ao digitar no campo de entrada a lei de formação da função L, obtemos a sua representação gráfica conforme a figura a seguir:

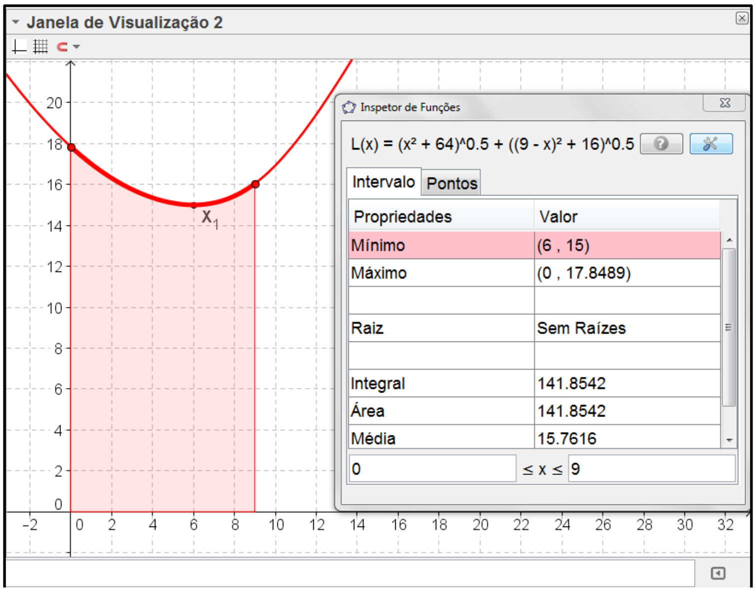


FIGURA 4: Gráfico da função L

O GeoGebra possui o comando inspetor de funções, onde ao selecionar a função que se deseja analisar obtemos algumas propriedades tais como Mínimo, Máximo, Raiz, Integral, Área da função. Esse recurso foi utilizado pelos alunos como forma de se validar os resultados encontrados. No caso da função em questão, encontramos como valor mínimo o ponto (6, 15), consequentemente temos a distância procurada $x = 6\ km$ e a distância mínima igual a $L = 15\ km$.

O software ainda possibilita para a resolução do problema uma solução geométrica interessante, baseada no princípio de Fermat, que demonstrou que a luz ao refletir numa superfície plana e regular, formará ângulos iguais no ponto de incidência.

No caso do problema construindo-se uma circunferência com centro em C e raio igual a $\overline{AC}$ prolongando-se o segmento $\overline{AC}$ até interceptar a circunferência no ponto A_1. Ligando-se o pontoA_1com o ponto Eobtém-se o segmento $\overline{A_1E}$. A intersecção desse segmento obtido com o segmento $\overline{CG}$ é o ponto P procurado.

Demonstra-se que os triângulos A_1CP e EGP são semelhantes assim como os triângulos A_1CP e ACP são congruentes e com isso os ângulos $A\hat{P}C$ e $A_1\hat{P}C$ são congruentes, conforme descreve o princípio de Fermat, conforme a figura a seguir:

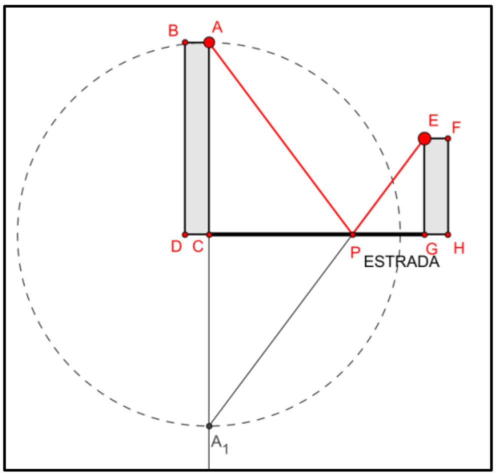


FIGURA 5: Solução geométrica do problema

Considerações Finais

Esta pesquisa apresentou como objetivo principal descrever algumas contribuições do software GeoGebra na resolução de problemas de otimização de funções procurando evidenciar quais são os recursos que podem ser explorados no sentido de se modelar tais problemas.

Observou-se que o software permite, sem muitos pré-requisitos por parte dos usuários, manipular de forma dinâmica objetos geométricos auxiliando intuitivamente dessa forma a formulação de conjecturas por parte dos alunos e posteriormente as possíveis validações e refutações dessas conjecturas.

A utilização do software possibilitou ao aluno de forma interativa auxiliar não somente no processo da elaboração do problema assim como a resolução do mesmo. Isso pode ser comprovado pela grande variedade de recursos que o GoGebra apresenta.

Efetuando-se tanto a solução algébrica quanto a geométrica, os alunos afirmaram que o GeoGebra possui uma variedade de recursos e ferramentas que auxiliaram em grande medida na compreensão, modelagem e resolução do problema em questão.

Com isso, concluiu-se que o uso de um recurso auxiliar computacional constituiu-se de uma valiosa ferramenta tecnológica que pode ser utilizada na construção do conhecimento matemático, conforme constatou-se na presente pesquisa e que pode abrir novas perspectivas no sentido de novas explorações do GeoGebra no ensino e aprendizagem da Matemática.

Referências

ÁVILA, G. S. S. (2011). *Várias Faces da Matemática: tópicos para licenciatura e leitura geral*. 2ª. ed. São Paulo: Edgard Blucher.

COURANT, R. e ROBBINS, H. (2000). *O que é matemática? Uma abordagem elementar de métodos e conceitos.* Tradução de Adalberto da Silva Brito. Rio de Janeiro: Ciência Moderna, 2000.

CRESWELL, J. W. (2010). *Projeto de pesquisa: métodos qualitativo, quantitativo e misto.* Tradução de Magda França Lopes. 3ª. ed. Porto Alegre: Artmed.

FISCHBEIN, E. (1991). *The interaction between the formal, the algorithmic, and the intuitive components in a mathematical activity*. In: Didactics of Mathematics as a Scientific Discipline. Dordrecht: Kluwer Academic.

POINCARÉ, H. *O valor da ciência*. Tradução de Maria Helena Franco Martins. Rio de Janeiro: Contraponto, 1995.

______. *A Ciência e a Hipótese*. Tradução Maria Auxiliadora Kneipp. Brasília: Editora UNB, 1984.

SIMMONS, G. F. (2007). *Cálculo Diferencial e Integral com Geometria Analítica.* v. 1. Trad. Seiji Hariki. São Paulo: Pearson Education do Brasil.