em teia | Revista de Educação Matemática e Tecnológica Iberoamericana
Universidade Federal de Pernambuco
ISSN 2177-9309
Pós-Graduação em Educação Matemática e Tecnológica EDUMATEC

REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA E SUA ARTICULAÇÃO COM O HEXÁGONO DE DURER NAS AULAS DE MATEMÁTICA

REGISTERS OF SEMIOTIC REPRESENTATION AND THEIR ARTICULATION WITH DURER'S HEXAGON IN MATHEMATICS CLASSES

Veridiana Rezende
Doutorado em Educação para a Ciência e a Matemática
Universidade Estadual do Paraná – Paraná – Brasil
PPGECEM – Educação em Ciências e Matemática – Unioeste - Brasil
rezendeveridiana@gmail.com

Mariana Moran
Doutorado em Educação para a Ciência e a Matemática
Universidade Estadual de Maringá – Paraná - Brasil
marianamoranbar@gmail.com

Thais Michele Martires
Licenciatura em Matemática
Universidade Estadual do Paraná – Paraná - Brasil
thamy_thaismichelli@hotmail.com

Wilian Barbosa Travassos
Mestrado em Educação para a Ciência e a Matemática
Universidade Estadual de Maringá – Paraná – Brasil
wiliantravassos@hotmail.com

Resumo

Apresentamos neste texto uma investigação acerca das possibilidades do uso de diferentes registros de representação semiótica no ensino de Fractais. Participaram deste estudo 17 alunos do 3º ano do Ensino Médio. A coleta de dados se deu por meio da resolução de cinco tarefas matemáticas sobre o fractal Hexágono de Durer, nas quais articulam diferentes registros de representação, além de fotos das construções no software GeoGebra e um diário de campo. Os resultados evidenciaram dificuldades dos alunos no que diz respeito aos cálculos numéricos decimais e fracionários. Contudo, as tarefas e suas diferentes representações propiciaram subsídios teóricos metodológicos para o ensino de Fractais com base em suas diferentes representações de modo a contribuir com o desenvolvimento intelectual dos alunos.

Palavras-chave: Ensino de Matemática. Ensino Médio. Geometria dos Fractais. Hexágono de Durer. Registros de Representação Semiótica.

Abstract

We present in this text an investigation about the possibilities of the use of different registers of semiotic representation in the teaching of Fractais. Participated in this study 17 students of the 3rd year of high school. Data collection was done by means of the resolution of five mathematical tasks on Durer's Hexagon fractal, in which they articulate different representation registers, as well as photos of the constructions in GeoGebra software and a field diary. The results evidenced difficulties of the pupils with respect to decimal and fractional numerical calculations. However, the tasks and their different representations led to analyzes that give theoretical methodological subsidies for the teaching of fractions based on their different representations in order to contribute to the intellectual development of students.

Keywords: Teaching of Mathematics, High School, Geometry of the Fractais, Durer's Hexagon, Registers of Semiotic Representation.

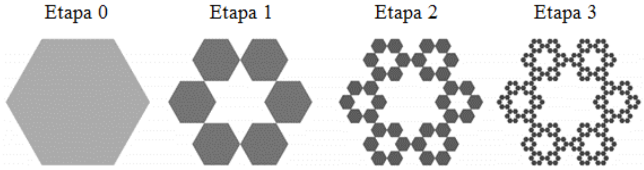
INTRODUÇÃO

O estudo da Geometria dos Fractais nas aulas de Matemática propicia aos alunos o desenvolvimento do pensamento geométrico e o conhecimento de diferentes conceitos matemáticos por meio de suas construções, beleza e complexidade. A Geometria dos Fractais tem como precursor o Matemático Polonês Benoit Mandelbrot, que iniciou seus estudos sobre o tema em meados de 1948. O pesquisador ficou conhecido principalmente por suas contribuições na área, sendo o termo "fractal" definido por ele no ano de 1975, baseando-se na palavra latina *fractus*, que significa quebrar, fragmentar.

De acordo com Barbosa (2005), a Geometria dos Fractais está associada à ciência do caos, a qual possui uma regra que aparentemente não existe. Certos fractais associados a fenômenos da natureza podem estar relacionados a montanhas, rochas, plantas, relâmpagos etc. As estruturas fragmentadas e complexas dos fractais fornecem aproximações para estas formas, colocando uma certa ordem e padrão ao Caos.

Os fractais possuem algumas características próprias, sendo que as principais são: a autossimilaridade, a complexidade infinita e a dimensão fracionária. A autossimilaridade se refere ao comando de ampliação ou redução do fractal. Cada parte do fractal é semelhante à figura inicial, e igualmente semelhante ao todo. Neste caso, existem dois tipos: a autossimilaridade exata e a aproximada ou estatística (CARVALHO, 2005). A figura 1 trata de um exemplo de autossimilaridade exata.

Figura 1: Três etapas do Hexágono de Durer.



Fonte: autores.

Na autossimilaridade aproximada, os padrões não se repetem com exatidão, como por exemplo os ramos de uma planta, conforme ilustra a Figura 2.

Figura 2: Ramos de uma folha de samambaia.

Fonte: Nunes (2006, p. 33).

Em relação à complexidade infinita, segundo Carvalho (2005), qualquer que seja o número de iterações realizadas sobre uma figura fractal, nunca se obterá a imagem final, pois num fractal sempre é possível realizar mais iterações, resultando em uma estrutura complexa. Além disso, os fractais possuem dimensão fracionária, e trata-se de um número real não inteiro que está associado à sua irregularidade ou fragmentação.

As Diretrizes Curriculares do Estado do Paraná – DCE para o ensino de Matemática (PARANÁ, 2008) contemplam a Geometria dos Fractais como uma das componentes para o Ensino de Geometrias, e recomenda que seus estudos devem ser iniciados nos anos finais do Ensino Fundamental e aprofundados no Ensino Médio. Este é um dos motivos que tem levado os autores deste artigo ao desenvolvimento de pesquisas relacionado ao ensino da geometria dos fractais nas aulas de Matemática. Além disso, a Geometria dos Fractais possibilita o uso de diferentes recursos didáticos para o estudo de conceitos matemáticos, tais como o manuseio de instrumentos de desenho (régua, compasso, transferidor, esquadro), diferentes *softwares* de geometria dinâmica e materiais manipuláveis, que geralmente são atrativos para os alunos.

Em busca de um encaminhamento metodológico para as nossas pesquisas, temos nos respaldado na Teoria dos Registros de Representação Semiótica, do pesquisador francês Raymond Duval, que preconiza as especificidades da aprendizagem em matemática, por se tratar de uma ciência abstrata cujo acesso aos objetos matemáticos só ocorrem por meio de representações. Nesse sentido, o pesquisador define quatro grandes grupos de registros de representação semiótica, de modo que a articulação entre estes registros é que pode proporcionar a aprendizagem em Matemática.

Sendo assim, apresentamos a seguir aqueles que consideramos como principais pressupostos da teoria dos registros de representação semiótica, a sua articulação com tarefas matemáticas associadas ao fractal Hexágono de Durer, e o relato e os principais resultados de uma implementação realizada com alunos do 3º ano do Ensino Médio de uma escola pública do interior do Paraná.

Registros de representação semiótica e sua articulação com a geometria dos fractais

A Teoria dos Registros de Representação Semiótica tem suas origens nos anos 1970, decursivo das investigações realizadas pelo pesquisador, filósofo e psicólogo de formação Raymond Duval. Sua teoria, que propicia diversas contribuições para a Educação Matemática, tem sido amplamente divulgada principalmente a partir de sua obra *Sémiosis et pensée humaine: Registres sémiotiques et apprentissages intellectuels*, publicada na França no ano de 1995.

Em entrevista concedida à Revista Paranaense de Educação Matemática - RPEM, Duval (2013) discorre sobre as origens de sua teoria, e menciona que esta se trata de uma longa história, um percurso de desvios e impasses, como o avançar em um labirinto. Duval ingressou no IREM – Instituto de Pesquisa sobre o Ensino de Matemática de Strasbourg em 1970, um dos três primeiros IREM criados na França para acompanhar a reforma da Matemática "Moderna". Duval havia defendido sua tese de doutoramento, orientada por Pierre Gréco, cujo "[...] referencial teórico foi a epistemologia genética de Piaget para estudar o desenvolvimento de noções físicas e matemáticas em crianças e adolescentes" (DUVAL, 2013, p. 11).

Nesse período, anos de 1970, as investigações de Duval centravam-se em duas linhas: a primeira relacionada à compreensão de demonstrações por alunos do *Collége* (Nível de ensino correspondente ao Ensino Fundamental II, no Brasil), e a segunda, completamente diferente, relacionava-se à importância e variedade das formas de linguagem nas atividades matemáticas. Mas estas duas linhas foram abandonadas pelo pesquisador. A primeira, segundo Duval (2013), tornou-se óbvia, pois as experiências para inserir os estudantes no percurso das demonstrações, seja inspiradas em análises piagetianas relacionadas ao estágio das operações proposicionais, ou inspiradas numa abordagem heurística, segundo Pólya, tornavam a Geometria incompreensível.

Com relação à segunda linha de pesquisa, a que corresponde à importância e à variedade das formas de linguagem nas atividades matemáticas, Duval sofreu uma forte oposição. Ele questionava o principal ponto de consenso entre os professores e pesquisadores envolvidos na reforma do ensino da matemática no ensino Primário e no Secundário: “[...] A matemática não era, absolutamente, uma questão de linguagem, e a única coisa que importava em matemática eram os conceitos que, como tem sido repetido até aborrecer, são mentais” (DUVAL, 2013, p. 12). Além disso, Duval ia contra a teoria de Piaget que afirmava que a conceituação era feita a partir da “ação” e de “esquemas de ação” e não a partir da linguagem. Tudo isso acontecia numa época em que “[...] o estruturalismo reinava sobre todas as ciências humanas, a linguagem estava reduzida a códigos e a codificações” (DUVAL, 2013, p. 12).

Diante de suas inquietações, a compreensão de textos despertou em Duval a seguinte questão de pesquisa: *que tipo de representação é a mais pertinente para dar conta não apenas de um texto, mas de um raciocínio dedutivo, de uma argumentação, de uma escrita simbólica, etc.?* Para responder a esta questão, Duval elaborou um questionário que foi aplicado para alunos de 15-16 anos, após um ensino sobre funções afins. Estas questões realmente permitiam “[...] explorar todos os fenômenos cognitivos de compreensão e de aprendizagem relacionados à atividade matemática” (DUVAL, 2013, p. 14).

A partir dos resultados desta investigação, publicada pela primeira vez na França, no ano de 1988, as pesquisas de Duval ganharam cada vez mais reconhecimento da comunidade de Educadores Matemáticos. Afinal, segundo Duval (2013), os resultados desta pesquisa mostraram que “[...] a atividade matemática deveria ser analisada em termos de transformações de representações semióticas e não de conceitos puramente mentais” (2013, p. 14).

O termo *Registro* foi escolhido por Duval para distinguir os sistemas semióticos utilizados em matemática de outros sistemas semióticos utilizados fora da matemática. De acordo com Duval (2016), existem muitas representações possíveis para um mesmo objeto, no entanto, não existem muitos objetos para uma mesma representação. Tomemos como exemplo as representações dos objetos no quadro a seguir.

Quadro 1: O teste de justaposição para um natural

MARCAS UNIDAS ORGANIZÁVEIS EM FIGURAS ESPACIAIS	DENOMINAÇÃO VERBAL: ORDEM DE NUMERAÇÃO	DUPLA ORGANIZAÇÃO INTERNA: POSIÇÃO E BASE
Itens materiais ou desenhados (pseudo-objetos)	Produção oral (mental) de palavras	Escrita de uma expressão combinando algarismos
▌▌▌▌ ou ▌▌ ▌▌ dedos, palitos  a tarefa piagetiana ((((|) |) |) |) inclusões lineares * * * * configuração poligonal	«quatro» O léxico varia consideravelmente segundo as línguas. «0», não se pronuncia dentro da denominação verbal e oral dos números.	Invenção do «0» No sistema decimal: «4» No sistema binário: «100» $\frac{\mathbf{64}}{\mathbf{16}}$ em uma escrita fracionária com o sistema decimal.

Fonte: Duval (2011, p. 45).

Nessa justaposição do Quadro 1 relacionada a apresentações diferentes de um mesmo objeto, a saber o número 4, qual delas corresponde ao objeto? Para Duval, a resposta para esta questão é: nenhuma delas. Afinal, “[...] os objetos matemáticos são unicamente acessíveis por meio da produção de representações semióticas” (DUVAL, 2016, p. 17). Para Duval (2012b, p. 283), a limitação em apenas um registro de representação semiótica “[...] não favorece em nada as transferências e as aprendizagens ulteriores: torna os conhecimentos adquiridos pouco ou não utilizáveis em outras situações aonde deveriam realmente ser utilizados”. O pesquisador acrescenta que a compreensão de um conceito limitada a apenas um registro “[...] conduz a um trabalho às cegas, sem possibilidade de controle do “sentido” daquilo que é feito” (p. 283).

Mas, se os objetos matemáticos são abstratos e seus estudos são possíveis apenas por meio de suas representações, como não confundi-los com suas representações? Essa imposição de condições leva a um paradoxo denominado por Duval de *paradoxo cognitivo da matemática*. Duval alega que “[...] é a possibilidade de multirrepresentação potencial de um mesmo objeto que permite contornar este paradoxo” (DUVAL, 2013, p. 17). Esta é a condição fundamental para que o aluno saiba distinguir os objetos matemáticos de suas diferentes representações.

Duval (2011, 2017) classifica quatro grandes tipos de registros: Linguagem Natural, Simbólico (numérico, algébrico, operatório), Gráfico e Figural. Para o pesquisador, a noção de registro de representação semiótica trata-se de uma ferramenta preciosa para o ensino de Matemática, pois relaciona-se a fatores cognitivos que determinam a maneira matemática de trabalhar, e que são os primeiros fatores a levar em conta para organizar um ensino de Matemática desde os Anos Iniciais até os Anos Finais do Ensino Fundamental. Para o pesquisador, o objetivo prioritário do ensino de Matemática deveria ser “[...] o desenvolvimento de maneiras de ver, de raciocinar, de dizer e explorar, que são específicas da matemática, e que vão contra aquelas espontaneamente praticadas fora da matemática" (DUVAL, 2017, p. 115).

Para Duval (2003, 2012a), a atividade matemática se manifesta em termos de transformações de representações semióticas, classificadas em dois tipos: os tratamentos e as conversões. O ato de transitar de um registro de representação para outro é denominado por Duval como *conversão*. A conversão é o processo ao qual se realiza uma modificação externa ao registro representado, conservando a totalidade ou apenas uma parcela do conteúdo da representação inicial (DUVAL, 2012a). Como exemplo de conversão num contexto da Geometria dos Fractais, pode-se utilizar o Triângulo de Sierpinski. Na Figura 4 observam-se três níveis do Triângulo de Sierpinski: nível 0, 1 e 2.

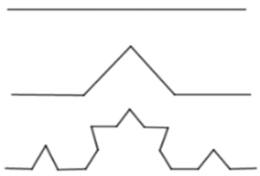
Figura 4: Níveis do Triângulo de Sierpinki.

Fonte: autores.

No nível 0, a área inicial do Triângulo está representada pela parte pintada em preto na forma de registro figural. Com o objetivo de estabelecer relações algébricas e numéricas para essa representação, é possível denominarmos, simbolicamente, essa área por $A_{\triangle} = A$. No nível 1, está representada figuralmente a área do triângulo de acordo com as partes que estão pintadas em preto. Do mesmo modo, podemos representar essa área utilizando o registro simbólico algébrico da forma$A_{\triangle} = \frac{3}{4}A$. Utilizando o mesmo raciocínio dos níveis anteriores, é possível convertermos a área representada figuralmente no nível 2 para o registro simbólico da forma $A_{\triangle} = \frac{9}{16}A$. Dessa forma, é possível representar a área dos três níveis do Triângulo de Sierpinski na forma de registro figural e registro simbólico algébrico, de modo que o aluno possa associar o registro figural com o registro simbólico algébrico e vice e versa.

Além da conversão, existem as transformações que acontecem internamente ao registro. Essas modificações são denominadas por Duval como *tratamento*. Alguns exemplos de tratamento são: o cálculo numérico, que é um tipo de tratamento específico para expressões simbólicas; a paráfrase e a inferência, que são tratamentos no registro língua natural; a reconfiguração, que se aplica a figuras geométricas e a anamorfose que se aplica a toda representação figural (DUVAL, 2012a). Como um exemplo de tratamento num contexto da Geometria dos Fractais, pode-se utilizar curvas tipo Fractais de Koch, conforme Figura 5.

Figura 5: Níveis da Curva de Koch.



Fonte: autores.

Neste exemplo ocorreu um tratamento figural, pois inicialmente tinha-se um segmento de reta. Logo após, esse segmento foi reconfigurado de modo que foi dividido em 3 partes iguais, e a parte do meio foi substituída por um triângulo equilátero sem um dos lados, ficando assim com quatro partes. Então, a essa nova imagem, aplicou-se novamente essa construção em cada parte (nos 4 segmentos) reduzindo cada um deles na razão $\frac{1}{3}$. Tal iteração pode ser repetida "infinitamente" (BARBOSA, 2005).

Segundo Duval (2003), no processo de ensino, o tratamento é mais priorizado do que a conversão, por se apresentar como procedimentos de justificação. Já a conversão, do ponto de vista matemático, é vista como uma forma de "[...] escolher o registro no qual os tratamentos a serem efetuados são mais econômicos, mais potentes, ou para obter um segundo registro que serve de suporte ou de guia aos tratamentos que se efetuam em um outro registro" (DUVAL, 2003, p. 16).

Para o referido pesquisador, a compreensão global de um conceito ocorre por meio da conversão, por permitir o reconhecimento do mesmo objeto em suas diferentes representações, e proporcionar a coordenação entre diferentes registros de um mesmo objeto, afinal "[...] *passar de um registro de representação a outro não é somente mudar de tratamento, é também explicar as propriedades ou os aspectos diferentes de um mesmo objeto*" (DUVAL, 2003, p. 22, grifos do pesquisador). Segundo Duval (2012a), todas as representações são cognitivamente parciais em relação ao objeto que elas representam.

De acordo com Duval (1999, p. 18), "[...] cada representação não apresenta as mesmas propriedades ou as mesmas caraterísticas do objeto. Nenhum sistema de representação pode produzir uma representação cujo conteúdo seja completo e adequado ao objeto representado", por isso a importância de se diversificar os registros de representação durante o processo escolar dos alunos, afinal "tendo mais registros, há um aumento potencial de possibilidades de trocas e, por conseguinte, há um aumento também na escolha mais econômica" (MORETTI, 2002, p. 346). Além disso, o aluno pode escolher pela representação que considera mais econômica ou eficaz para determinada situação de aprendizagem.

Ao realizar a conversão entre os diferentes registros de representação semiótica, determinados critérios podem tornar a atividade de conversão um processo simples de ser realizado, ou apresentar complexidades que exigem um custo cognitivo maior - critérios estes que são oriundos do fenômeno denominado por Duval (2009) de *congruência semântica*.

Em relação aos critérios para indicar se duas representações semióticas são semanticamente congruentes, Duval (2014) especifica: i) correspondência entre as unidades significantes própria a cada registro; ii) univocidade para cada unidade significante a ser convertida. Para uma unidade de partida, não há mais de uma unidade (significante) possível no registro de chegada; iii) a ordem na organização das unidades significantes de partida é conservada na representação de chegada (DUVAL, 2014).

Quando uma atividade de conversão é semanticamente congruente, a passagem de uma representação a outra se faz de modo espontâneo. Contudo, na medida em que um ou mais critérios não são satisfeitos, as chances de fracasso tendem a elevar-se conforme o grau de não-congruência (DUVAL, 2009).

Nessas condições, apresentamos dois exemplos de congruência semântica entre um enunciado e sua expressão aritmética correspondente: a) João tem 6 bolinhas de gude e ganhou 3 em uma partida... Neste exemplo, "as três unidades significativas na frase são: tem 6 bolinhas, ganhou e 3 que correspondem, na mesma ordem, com as três unidades significativas na expressão aritmética: "6"; "+" e "3"" (MORETTI, 2002, p. 704-705); b) utilizando-se da língua natural, a expressão x é maior/igual a 14 apresenta congruência semântica com a sua representação no registro simbólico (algébrico) ou seja, $x \geq 14$.

Por outro lado, apresentamos um terceiro exemplo em que a expressão algébrica $x \geq 14$ também pode ser representada pela seguinte frase em linguagem natural: *Verifica-se que 14 não é menor que um determinado número, cujo valor seja desconhecido. Que número é este*? No entanto, diferentemente do exemplo b), este terceiro exemplo apresenta condições que tornam o processo de conversão mais complexo. Note que as unidades significantes *14 não é menor* e *determinado número cujo valor seja desconhecido* não atendem a dois dos três critérios de congruência semântica.

Neste terceiro exemplo, tanto a ordem das unidades significantes foram alteradas, não satisfazendo assim o critério referente a ordem, bem como o critério de univocidade não foi satisfeito, uma vez que a unidade significante *não é menor* apresenta correspondência com a unidade significante de chegada "≥" (maior/igual), contudo, *não é menor* possibilita interpretála como sendo apenas maior, apenas igual, ou até mesmo maior/igual, deixando de satisfazer assim o critério de univocidade semântica terminal.

São esses casos em que a conversão abre espaço para uma margem maior de erros no processo de conversão pelos alunos, conforme é explicado por Duval:

> O problema da congruência ou da não congruência semântica de duas representações de um mesmo objeto é, portanto, o da distância cognitiva entre estas duas representações, sejam elas pertencentes ou não ao mesmo registro. Quanto maior a distância cognitiva, mais o custo da passagem de uma apresentação a outra corre o risco de ser elevado, e também de não ser efetuado ou entendido (2012b, p. 105).

Em um problema no qual sua formulação não apresenta congruência semântica, tende a obter um número significativamente menor de acertos, se comparado ao mesmo tipo de problema que mobiliza os mesmos conhecimentos matemáticos, mas que, no entanto, possui congruência semântica (HILLESHEIM; MORETTI, 2013).

Assim, considerando os pressupostos da Teoria dos Registros de Representação Semiótica para o ensino e a aprendizagem da matemática, apresentamos neste artigo a possibilidade de articulação dessa teoria com a Geometria dos Fractais.

Para a explanação de nossas ideias, tomamos como base uma implementação de tarefas matemáticas relacionadas ao Fractal Hexágono de Durer, realizada com estudantes do 3º ano do Ensino Médio. Para a exploração deste fractal em sala de aula, elaboramos 06 (seis) tarefas que permitiram a exploração dos registros de representação semiótica descritos no quadro 3.

Quadro 3: Registros de representação semiótica contemplados neste trabalho.

	Registros de Representação Semiótica			
	Figural	**Simbólico**		**Linguagem Natural**
		Numérico	**Algébrico**	
Modo de abordagem neste trabalho	Imagem do Hexágono de Durer por meio de: i) *Software* (GeoGebra); ii) Instrumentos de Desenho Geométrico	Cálculos numéricos relacionados a área e perímetro de figuras geométricas (formas fracionária e decimal).	Fórmulas de área e perímetro de figuras planas e generalizações de cálculos numéricos.	Descrição dos passos de construção do Hexágono de Durer (construído pelos alunos por meio de instrumentos de Desenho Geométrico).

Fonte: Autores.

As tarefas elaboradas sobre o fractal de Durer além de permitirem a articulação entre diferentes registros de representação semiótica, bem como a realização de tratamentos e conversões, permitem o uso de diferentes recursos didáticos tais como uso de lápis e papel, instrumentos de desenho geométricos (régua, compasso, transferidor) e o *software* de geometria dinâmica GeoGebra.

Especificamente em relação à construção de figuras, Duval (2011) apresenta três características cognitivas específicas: o seu valor intuitivo, o reconhecimento quase que imediato dos objetos representados e a possibilidade de construção com régua, compasso ou com *software*.

Para o presente trabalho, utilizamos o *software* GeoGebra e instrumentos régua e compasso para representar registros figurais. Em relação aos *softwares* e uso de computadores, Duval (2011) esclarece que eles não constituem um novo registro de representação, afinal, as representações exibidas pelos computadores são as mesmas que aquelas produzidas graficamente no papel para uma apreensão visual. No entanto,

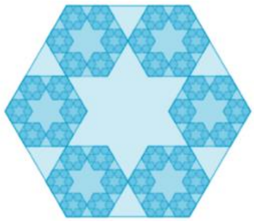
> [...] eles constituem um modo fenomenológico de produção radicalmente novo, fundamentado na aceleração dos tratamentos. Eles exibem no monitor tão rapidamente quanto à produção mental, mas com uma potência de tratamento ilimitada em comparação com as possibilidades da modalidade gráfico-visual. Obtemos, imediatamente, muito mais que tudo o que poderíamos obter à mão livre após, talvez, vários dias de escritas e cálculos ou constrição de figuras (DUVAL, 2011, p. 137).

Sendo assim, apresentamos a seguir as tarefas sobre o fractal de Durer que foram implementadas em sala de aula, juntamente com um relato e sistematização dos dados de implementação. Entendemos que este trabalho vai além de explorar a beleza estética, atrativa e visual dos fractais, e toma como princípio uma exploração matemática e cognitiva, baseada em tratamentos e conversões por meio da articulação de diferentes registros, e explorando o que Duval (2013, 2017) denomina como a *face oculta* da atividade matemática, aquela que não está prescrita nos currículos escolares, mas que se refere à essência da compreensão em matemática.

Procedimentos e sistematização dos dados da implementação das tarefas em sala de aula

Os procedimentos metodológicos adotados para a elaboração das tarefas foram baseados em Duval (2011, 2013), que defende o fato que a sua teoria pode respaldar metodologicamente as aulas dos professores. Nesse sentido, primeiramente selecionamos o fractal hexágono de Durer, conforme a figura 6, para ser explorado com os sujeitos da pesquisa.

Figura 6: Etapa 3 do Fractal Hexágono de Durer.



Fonte: autores.

Após a seleção do fractal, iniciamos nossas reflexões a respeito de tarefas matemáticas que poderiam explorar diferentes registros de representação semiótica, a articulação entre suas representações e os diferentes conceitos matemáticos possíveis de serem contemplados nas tarefas. Foram elaboradas 06 (seis) tarefas, em que foi possível explorar o uso de régua e compasso, *software* GeoGebra, e conceitos matemáticos como área, perímetro, semelhança, fração, radiciação, razão, simetria, números decimais, operações básicas etc. As tarefas foram implementadas por um dos autores deste trabalho, na presença da professora regente de uma turma, que continha 20 alunos do 3º ano do Ensino Médio de uma escola pública do interior do Paraná. A implementação das tarefas teve duração de sete horas/aulas.

Para o desenvolvimento das tarefas, os alunos foram organizados em grupos de dois ou três alunos para que eles resolvessem cada uma das tarefas, refletissem e criassem as suas próprias estratégias de resolução. O ambiente de sala de aula foi organizado de modo que os alunos pudessem trocar informações com os colegas, explicitar suas estratégias em linguagem natural (oral e/ou escrita); testar seus modelos de resoluções, debater e validar suas resoluções com os colegas.

Durante esse processo de resolução das tarefas pelos alunos, a pesquisadora e professora regente foram mediadoras da situação em sala de aula, buscaram devolver as perguntas dos alunos com outros questionamentos, de modo a levá-los a refletir sobre suas estratégias e possíveis erros, não disponibilizando a resposta aos estudantes. Após a resolução pelos alunos, a professora da disciplina, juntamente com a pesquisadora, formalizaram os conteúdos estudados, proporcionando a interação entre os alunos. Na sequência do texto, apresentaremos cada tarefa, os registros de representação semiótica envolvidos e exemplos de respostas dos alunos.

1ª Tarefa: Construção do Hexágono de Durer com régua e compasso

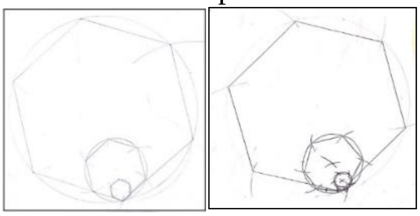
A primeira tarefa consistiu na construção do Fractal Geométrico Hexágono de Durer, utilizando régua e compasso. Para iniciar a construção, perguntamos aos alunos sobre quais figuras geométricas os alunos conheciam. As respostas que surgiram foram: quadrado, retângulo, triângulo, circunferência. Nenhum aluno mencionou figuras como trapézio, pentágono, hexágono etc.

Partindo da etapa zero do Hexágono de Durer no registro figural (ver Figura 1), um dos autores deste trabalho construiu junto com os alunos o fractal em questão. Esta construção pertence ao registro multifuncional figural, e a transformação realizada diz respeito ao tratamento figural, uma vez que as etapas posteriores dependem de modificações figurais ocorridas nas etapas anteriores.

Por meio desta tarefa foi possível introduzir a ideia de autossimilaridade, na qual ocorre o processo de repetição de um padrão em cada iteração seguindo uma proporção.

Os alunos também perceberam que o tamanho dos hexágonos tende a diminuir a cada iteração. A seguir, apresentamos algumas construções realizadas pelos alunos.

Figura 7: Hexágono de Durer construído pelos alunos A9 e A17, respectivamente.



Conforme aumentavam as iterações dos fractais, surgiam dificuldades por parte dos alunos em relação ao manuseio com régua e compasso. Na figura 7, notamos na construção do aluno A17, a partir da primeira iteração, alguns erros nas medidas e traçados. Esse aluno relatou que havia utilizado o compasso uma única vez em sala de aula, e que não tinha prática com o uso de régua e compasso.

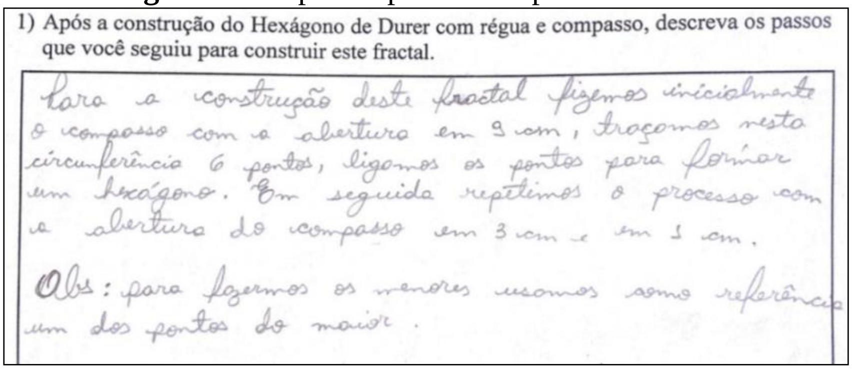
Além do aluno A17, os alunos A6, A9 e A14 também relataram dificuldades semelhantes na manipulação e utilização dos instrumentos para construção do fractal. Este fato possibilita inferir que tratamentos realizados especialmente em registros figurais, cuja forma obedecem determinado padrão, demandam não apenas conhecimento conceitual e procedimental, mas também habilidades no manuseio de instrumentos para sua construção, o que nos leva a refletir sobre qual representação semiótica se torna mais conveniente na introdução de construção dos fractais, incluindo a representação por meio de uso de computadores. Nas análises posteriores retomaremos a pergunta.

2ª Tarefa: Descrição dos passos de construção do Hexágono de Durer

Após a construção do fractal com régua e compasso, foi solicitada aos alunos a descrição dos passos seguidos por eles na construção do Hexágono de Durer. Com esta tarefa tivemos a intenção de proporcionar aos alunos a conversão do registro figural (construção do fractal com régua e compasso) para a linguagem natural, ou seja, uma mobilização de um registro não-discursivo (figural) para um registro discursivo (linguagem natural).

Consideramos que esta tarefa trata-se de um importante exercício de reflexão para os alunos, pois para escreverem os passos de construção é preciso que eles retomem todo o procedimento de construção, pensem nos conceitos matemáticos e processos adotados e organizem suas ideias para transmitirem para o papel, em linguagem natural, os passos seguidos, conforme exemplo de resposta do aluno A16.

Figura 8: Resposta apresentada pelo aluno A16.



1) Após a construção do Hexágono de Durer com régua e compasso, descreva os passos que você seguiu para construir este fractal.

Para a construção deste fractal fizemos inicialmente o compasso com a abertura em 9 cm, traçamos nesta circunferência 6 pontos, ligamos os pontos para formar um hexágono. Em seguida repetimos o processo com a abertura do compasso em 3 cm e em 1 cm.

Obs: para fazermos os menores usamos como referência um dos pontos do maior.

Nesta tarefa, o objetivo consistiu em realizar a descrição (registro linguagem natural) dos procedimentos realizados na construção do Hexágono de Durer (registro figural). Deste modo, o processo de conversão toma como registro inicial a figura do Hexágono de Durer já construída pelo aluno. Contudo, esse processo exige um custo cognitivo maior quando comparado à atividade de conversão oposta (ilustração), ou seja, da descrição para a representação figural. Este custo cognitivo maior pode ser justificado pelo fenômeno de congruência semântica, uma vez que esse processo de conversão entre as representações especificamente desta atividade não se constituem como funcionalmente equivalentes, na qual toda informação de uma representação pode ser deduzida a partir da outra representação. E tampouco são computacionalmente equivalentes, na qual as inferências realizadas em uma representação podem ser rapidamente realizadas do mesmo modo na outra (DUVAL, 2009).

Na conversão do registro figural para o registro linguagem natural, referente ao Fractal de Durer, as unidades figurais possuem correspondência, ordem e univocidade semântica terminais. Entretanto, na descrição do processo de construção do Fractal de Durer, a congruência semântica já não se faz mais presente e o custo cognitivo da conversão tende a elevar-se conforme o grau de não-congruência.

Nota-se neste processo de descrição que a ordem de construção das unidades figurais do Fractal de Durer não são mais perceptíveis, visto que os tratamentos realizados na figura alteraram sua representação inicial, exigindo que o aluno recorra ao modelo mental dos procedimentos de construção do fractal. No processo de conversão, cada registro possui variáveis cognitivas específicas (DUVAL, 2003), exigindo do indivíduo diferentes níveis cognitivos no processo de "ida" e "volta" da conversão.

Segundo Duval (2009, p. 69), "a dificuldade da conversão de uma representação depende do grau de não-congruência entre a representação de partida e a representação de chegada". Não atender aos critérios de congruência é um fator que pode impossibilitar o aluno de realizar a conversão corretamente, porém, na medida em que o aluno consegue resolver tais atividades mesmo em níveis altos de não-congruência, é um forte indício de que o estudante possa ter compreendido a atividade a nível conceitual. Sobretudo, este processo de "ir" e "vir" entre os registros de representação é fundamental para a compreensão conceitual do objeto matemático trabalhado (DUVAL, 2009).

3ª Tarefa: Construção do fractal Hexãgono de Durer por meio do GeoGebra

A terceira tarefa consistiu na construção do Fractal Geométrico Hexágono de Durer no *software* GeoGebra. A aula foi realizada no laboratório de informática da escola e teve duração de duas horas/aula.

Cada aluno realizou a construção em um computador, seguindo os comandos dados pela pesquisadora com o auxílio da professora regente da turma. A construção do fractal no *software* foi feita até a sua 2ª iteração. Dando continuidade, os alunos aprenderam os comandos de coloração e retirada dos pontos. Neste momento, notamos o encantamento dos alunos no que diz respeito à visualização do fractal. Apresentamos alguns dos fractais construídos pelos alunos.

No que se refere à construção via *softwares* de figuras geométricas, Duval (2011) esclarece que essa construção não constitui um novo registro de representação, afinal as representações exibidas pelos computadores são as mesmas que aquelas produzidas graficamente no papel para uma apreensão visual. No entanto, o pesquisador aponta que os softwares "[...] constituem um modo fenomenológico de produção radicalmente novo, fundamentado na aceleração dos tratamentos" (DUVAL, 2011, p. 137). Afinal, os *softwares* permitem a obtenção imediata de vários elementos visuais que dificilmente obteríamos à mão livre.

Figura 9: Construção do Hexágono de Durer no GeoGebra

Uma das questões fornecidas aos alunos teve como objetivo nos possibilitar um *feedback* a respeito do uso do *software* GeoGebra para construção do Fractal de Durer: *Você teve dificuldades com a construção no software GeoGebra? Em caso positivo, especifique sua resposta.* Nesta questão, apenas um aluno (A5) alegou ter dificuldades na construção, pois segundo o aluno, o GeoGebra travava ao ampliar a imagem do fractal, dificuldade esta de origem técnica e não procedimental. Os demais alunos não relataram dificuldades, e se mostraram entusiasmados com os resultados obtidos, conforme falas dos alunos: "Não, foi interessante e mais divertido" (aluno A5), "Não, eu entendi bem e ficou lindo o meu (fractal) no GeoGebra" (aluno A7).

Nestas atividades com o software GeoGebra, os alunos tinham um breve conhecimento do *software,* mas apresentavam confusões em relação a algumas ferramentas similares, como reta e semirreta, polígono e polígono regular etc. Consideramos este um processo importante para a construção do conhecimento a respeito de conceitos geométricos, pois, no momento que o aluno clica na ferramenta *polígono* e verifica que um hexágono pode ser construído de diferentes maneiras (uma vez sabendo que um hexágono possui seis lados), permite ao aluno refletir sobre o fato de que nem todo hexágono possui a forma padrão regular, e que a ferramenta *polígono regular* permite compreender que todo polígono regular possui seus lados de medidas iguais. O mesmo pode acontecer para construção ou desconstrução errônea do conhecimento do conceito de reta, semirreta etc.

Em muitos casos, as representações computacionais são negligenciadas pelo fato de assumir uma postura mecânica, não autêntica. Entretanto, a construção de um fractal não consiste em plotar, de imediato, toda construção perante um único clique, mas sim na realização de operações e combinações efetuadas sobre significantes seguindo diversas etapas e definidas por regras, desenvolvendo, sobretudo, as capacidades cognitivas de tratamento, uma vez que os processos de construção quando conduzidos de maneira coerente obedecem, em partes, os mesmos procedimentos realizados com objetos físicos.

A construção computacional pode auxiliar o aluno a compreender inicialmente os procedimentos de tratamento que são realizados no fractal de modo mais dinâmico, enriquecendo com detalhes as atividades de tratamento no registro figural, permitindo uma visão clara e precisa que posteriormente pode ser desenvolvida na prática com instrumentos manipuláveis.

Deste modo, retomemos a seguinte pergunta: *qual representação semiótica, incluindo o uso de computadores, se torna ideal na introdução de construção dos fractais?*

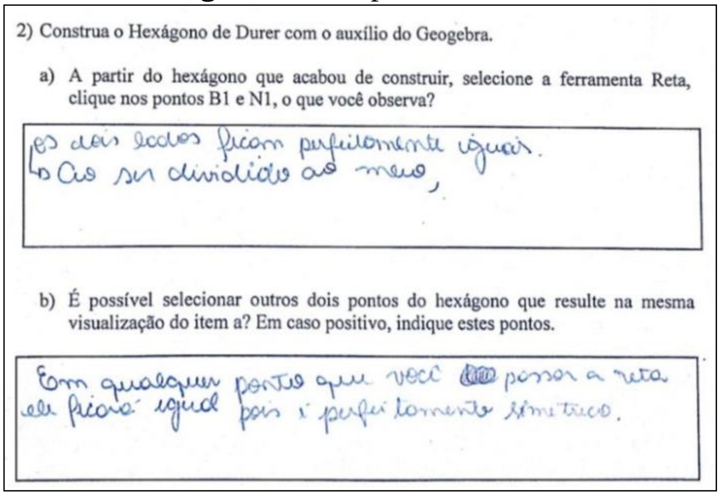
De fato, não existe uma representação ideal fácil no que se refere à apreensão conceitual do objeto matemático. O que apresentamos aqui são subsídios metodológicos que possibilitam contornar certas dificuldades subjacentes na construção de fractais, que por vezes podem passar despercebidas pelos olhos dos educadores por tomar conclusões apenas referentes ao produto final, desconsiderando o processo.

Nesse sentido, e por acreditarmos que ambas as construções do Hexágono de Durer – com régua e compasso e via *software* GeoGebra – proporcionam a mobilização de habilidades distintas e trazem contribuições importantes para o pensamento geométrico dos alunos, optamos por propiciar aos alunos ambas as construções.

4ª Tarefa: Eixos de simetria do Hegágono de Durer

Para concluir a referida construção, os alunos responderam duas questões relacionadas aos eixos de simetria existentes no fractal: a) A partir do hexágono que acabou de construir, selecione a ferramenta *Reta*, clique nos pontos B1 e N1, o que você observa? b) É possível selecionar outros dois pontos do hexágono que resultem na mesma visualização do item a)? Em caso positivo, indique estes pontos. No item a), a reta foi construída realizada com comando no *software.* Os pontos B1 e N1 referem-se a um dos pontos que, ao serem ligados por uma reta, formam um eixo de simetria; e o item b) tinha por objetivo verificar se os alunos conseguiam apresentar outros eixos de simetria. A seguir apresentamos algumas respostas dos alunos.

Figura 12: Respostas da aluna A17.


2) Construa o Hexágono de Durer com o auxílio do Geogebra.

a) A partir do hexágono que acabou de construir, selecione a ferramenta Reta, clique nos pontos B1 e N1, o que você observa?

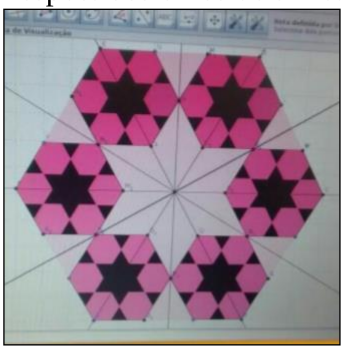
os dois lados ficam perfeitamente iguais.
Ao ser dividido ao meio,

b) É possível selecionar outros dois pontos do hexágono que resulte na mesma visualização do item a? Em caso positivo, indique estes pontos.

Em qualquer ponto que você passar a reta ela ficará igual pois é perfeitamente simetrico.

Podemos notar, como ilustra a figura 12, os pontos que dividem o fractal simetricamente. Consideramos que a aluna A17 entendeu o procedimento realizado no *software* para mostrar a simetria existente no Hexágono de Durer, embora tenha se equivocado ao responder que, em qualquer ponto que passar uma reta, o fractal será dividido igualmente.

Figura 13: Fractal com seus respectivos eixos de simetria construído pela aluna A5



Podemos evidenciar a importância do uso do *software* GeoGebra, pois propiciou uma melhor visualização do fractal, possibilitando a realização de várias iterações. No que diz respeito à representação visual, os alunos notaram que à medida que aumentavam as iterações, o tamanho dos hexágonos diminuíam cada vez mais, e a quantidade de figuras multiplicavam-se a cada etapa.

Percebeu-se que a manipulação do *software* contribuiu no entendimento de características básicas dos fractais como a autossimilaridade, pois os alunos notaram que os hexágonos em suas diferentes iterações são similares ao hexágono inicial, e a complexidade infinita, pois notaram ainda que poderiam criar quantas iterações desejassem. Os alunos ainda ficaram motivados a realizarem mais iterações, como um deles relatou: “*Que legal, como ficou* *bonito. Na sala não deu pra fazer assim",* diz a aluna A5, comparando a construção no GeoGebra com a construção com régua e compasso.

5ª *Tarefa: Área e perímetro dos hexágonos formados em cada etapa do Fractal*

A quinta tarefa consistiu em uma tabela que teve por objetivo explorar diferentes conceitos matemáticos tais como: área e perímetro do hexágono, números decimais, números fracionários, potências e raízes. Além disso, a tarefa 5 propicia aos alunos a realização de uma conversão entre o registro figural e o registro simbólico (numérico e algébrico). Além da conversão, a tarefa 3 também possibilita a realização de tratamentos simbólicos, por meio das transformações realizadas na representação numérica e também da representação numérica para a algébrica, porém, permanecendo no mesmo registro de representação - simbólico. Apresentamos no quadro 4, o quadro preenchido com os valores esperados.

Quadro 4: Cálculos de área e perímetro de etapas do Hexágono de Durer.

Etapa	Número de hexágonos formados em cada etapa	Número de hexágonos formados no total	Medida do lado de cada hexágono (cm)	Área de cada hexágono (cm²)	Perímetro de cada hexágono (cm)
0	1	1	9 cm	$\frac{243\sqrt{5}}{2}$ cm²	54 cm
1	6	7	3 cm	$\frac{27\sqrt{5}}{2}$ cm²	18 cm
2	36	43	1 cm	$\frac{3\sqrt{5}}{2}$ cm²	6 cm
3	216	259	1/3 cm	$\frac{\sqrt{5}}{6}$ cm²	2 cm

Esta etapa foi desenvolvida em dupla a fim de proporcionar um diálogo entre os alunos. Dispusemos aos alunos calculadoras científicas, no entanto, alguns optaram por realizar os cálculos sem o uso deste instrumento, possivelmente porque os alunos não têm o costume de utilizar a calculadora nas aulas de Matemática.

Percebemos dificuldades por parte dos alunos na realização desta tarefa, principalmente relacionadas à matemática básica, como cálculos envolvendo multiplicação, adição e divisão de frações, radiciação, potenciação e fatoração.

Diante das dificuldades apresentadas, dialogamos com os alunos, questionamos sobre os procedimentos que cada equipe havia adotado para a realização da tarefa, de modo que todos pudessem sanar as dúvidas, e realizar seus cálculos corretamente. Além disso, nesta etapa projetamos na lousa a Figura 1, referente às etapas do fractal de Durer, para auxiliar o raciocínio dos alunos em relação a cada etapa do Hexágono de Durer. Apesar das dificuldades, e com a mediação da professora e pesquisadora, os alunos realizaram a atividade, conforme registrado nas figuras 15 e 16.

Figura 15: Cálculos da área do fractal apresentado pelas alunas A3 e A17.

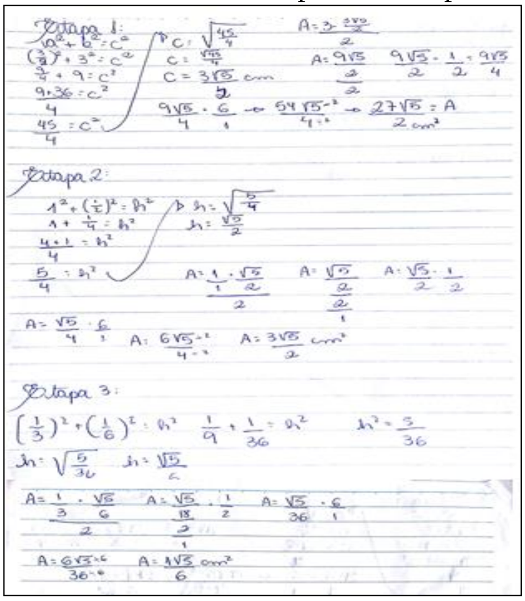
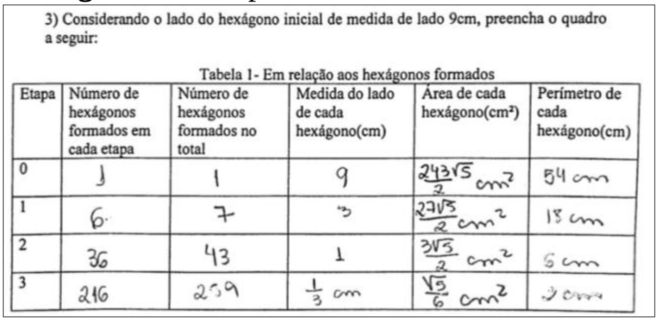


Figura 16: Respostas das alunas A3 e A17.



3) Considerando o lado do hexágono inicial de medida de lado 9cm, preencha o quadro a seguir:

Tabela 1- Em relação aos hexágonos formados

Etapa	Número de hexágonos formados em cada etapa	Número de hexágonos formados no total	Medida do lado de cada hexágono(cm)	Área de cada hexágono(cm²)	Perímetro de cada hexágono(cm)
0	1	1	9	$\frac{243\sqrt{5}}{2}$ cm²	54 cm
1	6	7	3	$\frac{27\sqrt{5}}{2}$ cm²	18 cm
2	36	43	1	$\frac{3\sqrt{5}}{2}$ cm²	6 cm
3	216	259	$\frac{1}{3}$ cm	$\frac{\sqrt{5}}{6}$ cm²	2 cm

As alunas A3 e A17 resolveram todos os cálculos, inclusive o cálculo da área. A aluna A17 relatou que, no primeiro dia desta etapa, não se lembrava de como resolvia as quatro operações com frações, mas, com o decorrer das aulas, pôde relembrar os conceitos e realizar as tarefas propostas. Além de problemas decorrentes de matemática básica, os alunos apresentaram dificuldades na contagem e no cálculo de área dos hexágonos em suas diferentes iterações.

Nota-se nesta atividade que três dos itens a serem respondidos apresentam congruência semântica entre o registro figural e o simbólico, são eles: *Número de hexágonos formados em cada etapa*; *Número de hexágonos formados no total* e *Medida do lado de cada hexágono*. Estes três itens consistem apenas na identificação e conversão das unidades significantes figurais para o registro simbólico, não exercendo nenhuma operação matemática para tal fim. Por outro lado, os itens: *Área de cada hexágono (cm²)* e *Perímetro de cada hexágono (cm)* não são congruentes no que diz respeito a seus registros figurais e simbólicos já que exigem atividades cognitivas mais complexas para se chegar à solução da atividade.

É importante atentar-se ao fato de que nestes dois últimos itens já não estamos tratando de verbos sinônimos, antônimos ou unidades significantes que apresentam correspondência, univocidade e/ou ordem com as unidades figurais do Hexágono de Durer. Os termos *área* e *perímetro* são conceitos matemáticos cujo campo maior é a geometria, e, deste modo, para o aluno realizar corretamente a atividade de conversão e posteriormente o tratamento, é preciso ter muito bem consolidadas em suas estruturas cognitivas as operações e regras inerentes a estes conceitos.

Nesta atividade, todos os alunos realizaram corretamente os itens propostos, com exceção do item referente à área do hexágono, sendo que apenas uma dupla realizou corretamente os cálculos, os demais erraram principalmente em operações básicas, visto que as nas primeiras iterações os alunos acertaram a área, mas na medida que iam aumentando as iterações, o número de erros aumentava. Entendemos que estes estudantes, do 3º ano do Ensino Médio, não estavam familiarizados com este tipo de cálculos, fato que consideramos importante de se explorar em todos os anos de escolarização.

No que diz respeito às generalizações matemáticas, é possível observar que esta atividade propõe a recorrência do aluno à forma de registro simbólico algébrico. Duval (2014) afirma que geralmente os alunos recorrem a estratégias baseadas em tentativas e erros e não utilizam espontaneamente de generalizações com letras. Duval (2014) também explica que várias operações cognitivas são designadas quando um problema solicita tal generalização, ou seja, para o aluno colocar na forma de equação (ou expressão algébrica) é necessário que não se confunda uma expressão literal com uma equação (ou expressão algébrica), e considere a variabilidade de respostas. Deste modo, com esta atividade buscou-se também desenvolver esse processo cognitivo de substituição e generalização de dados com o intuito de ampliar e refinar os resultados de um problema proposto.

Considerações finais

Nesta pesquisa, tivemos como pressuposto investigar as possibilidades do uso de diferentes registros de representação semiótica aliados à Geometria dos Fractais, no que concerne ao ensino de matemática. A intenção por esta linha de pesquisa nasce a partir das investigações que temos realizado sobre a Teoria dos Registros de Representação Semiótica, bem como de nossos estudos e pesquisas acerca da Geometria dos Fractais. Para este texto, essa articulação foi exemplificada com a apresentação de cinco tarefas matemáticas que envolvem o fractal Hexágono de Durer e os registros de representação semiótica.

A partir da escolha do Fractal de Durer, elaboramos tarefas matemáticas que envolvem: i) o registro figural – por meio da construção do Fractal com régua e compasso e da construção por meio do GeoGebra; ii) registro linguagem natural – por meio da descrição dos passos da construção do Fractal de Durer com régua e compasso; iii) registro simbólico (numérico) – por meio dos cálculos realizados para área, perímetro e quantidade de hexágonos construídos em cada etapa do fractal.

Em relação à resolução das tarefas, os alunos manifestaram maior interesse na construção do Hexágono de Durer por meio do *software* GeoGebra, comparado à construção com régua e compasso, fato que era esperado uma vez que o mundo tecnológico perpassa os muros das escolas e faz parte do cotidiano dos alunos. Essa manifestação dos alunos pela construção do fractal por meio do GeoGebra é exemplificada na fala do aluno A6, ao ser questionado sobre qual procedimento de construção ele tinha preferência (régua e compasso ou GeoGebra): *O software GeoGebra, pois é mais prático e fácil do que usando régua e compasso"* (A6).

Além disso, notamos dificuldades dos alunos no manuseio dos instrumentos de desenho, principalmente do compasso. Esse fato pode ser confirmado com os fragmentos de respostas de dois alunos, ao serem questionados se houve dificuldades ao resolverem as tarefas: *Sim, dificuldades com as medidas e prática com os materiais de desenho* (A14), e *Tive com o compasso, para coordenar ele no lugar certo* (A6). Neste caso, notamos que os instrumentos de desenho geométrico vêm sendo pouco explorados em sala de aula, embora eles permitam a visualização e o estabelecimento de relação entre procedimentos e propriedades geométricas presentes nas construções geométricas (BRASIL, 1998). Também é preciso considerar que o raciocínio e as habilidades exploradas por meio destes instrumentos são diferentes daqueles proporcionados pelos *softwares* de Geometria Dinâmica. Sendo assim, defendemos a importância do trabalho com ambos os recursos (instrumentos de desenho geométrico e *softwares*), afinal do ponto de vista de aprendizagens e habilidades matemáticas não é possível afirmar que um é melhor do que o outro, mas sim que eles são diferentes e se complementam.

Em relação à tarefa 5, que se refere ao preenchimento da tabela, os alunos tiveram dificuldades em associar conceitos matemáticos ao fractal, e não se lembravam de como realizar operações com frações, números decimais, área e perímetro do hexágono, entre outros conceitos, já estudados por eles no decorrer do processo escolar. Por se tratar de um 3º ano do

Ensino Médio, esperávamos que os alunos tivessem desempenho mais avançado, ou pelo menos não indicassem tantas dificuldades ao realizar os cálculos. Ressaltamos que, diante dessas dificuldades, redobramos a nossa atenção e buscamos auxiliar cada grupo de alunos, lançando questões que os fizessem refletir sobre a tarefa.

Um dos pontos que consideramos mais relevante nesta pesquisa foi explorar diversos conceitos matemáticos em sala de aula de uma maneira diferente da habitual, indo ao encontro das ideias de Padilha (2012) no que se refere ao professor abandonar a zona de conforto, lançando tarefas diferenciadas para o trabalho em sala de aula. Os fragmentos de respostas dos alunos A14 e A6 sinalizam seus reconhecimentos em relação às tarefas diferenciadas, e sobre as aprendizagens proporcionadas: *Achei legal por que foi uma aula diferente das outras, foi dinâmica e ao mesmo tempo aprendi bastante"* (A14); e *Gostei, foi uma aula diferente e eu achei que não iria entender, mas até consegui fazer as contas com a ajuda da professora* (A6).

Isso nos faz refletir o quanto é importante para nós, professores, buscarmos caminhos diferentes para o ensino e para a aprendizagem de matemática. Sabemos que nem sempre é possível adaptar as aulas e utilizar tarefas como as citadas nesse trabalho, mas faz-se necessário um repensar a respeito das novas tecnologias e dos recursos que podem ser utilizados com o intuito de contribuir com o desenvolvimento intelectual dos alunos.

Tarefas como as citadas neste trabalho permitem ensinar e/ou revisar conceitos matemáticos, bem como aprofundá-los, e podem ser utilizadas em diferentes turmas e níveis de ensino, com explorações distintas, de acordo com a necessidade do professor. Dentre a diversidade de conteúdos possíveis de serem trabalhados na rede básica por meio da Geometria dos Fractais, citamos: área e perímetro de figuras geométricas planas, potenciação, frações, número decimais, operações básicas, funções, simetria, dentre outros. O professor pode, ainda, trabalhar álgebra, por meio das generalizações, e a exploração de gráficos no plano cartesiano considerando a função adquirida por meio da generalização. Fica a critério do professor utilizar de desenho geométrico, materiais manipuláveis e/ou *softwares* de Geometria Dinâmica.

Assim, consideramos que o encaminhamento das tarefas propostas possibilitou aos alunos adquirirem conhecimentos sobre a Geometria Fractal, participarem efetivamente das construções, e permitiu que os alunos vivenciassem uma experiência diferenciada nas aulas de Matemática. E, apesar das dificuldades dos alunos aqui mencionadas, contando com nossa intervenção durante todo o processo, podemos concluir, baseado nas ideias de Duval, que os alunos articularam diferentes representações semióticas, e que estas contribuíram com a compreensão dos conceitos matemáticos trabalhados. Ademais, defendemos que a abordagem proposta neste artigo proporciona em sala de aula uma exploração matemática e cognitiva dos conceitos abordados, baseada em tratamentos e conversões, explorando o que Duval denomina como a *face oculta* da atividade matemática.

REFERÊNCIAS

BARBOSA, R. M. **Descobrindo a Geometria Fractal** - para a sala de aula. 2. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2005.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática**. (3º e 4º ciclos do ensino fundamental). Brasília: MEC, 1998.

CARVALHO, H. C. **Geometria Fractal**: perspectivas e possibilidades no ensino de matemática. 2005. 101 f. Dissertação (Mestrado em Educação) - Pós Graduação em Ensino em Ciência e Matemática, Universidade Federal do Pará, Belém, 2005.

DUVAL, R. **Semiosis y pensamento humano:** Registros semióticos y Aprendizajes intelectuales (M. V. Restrepo, Trad.). Colombia: Universidade del Valle. (Obra original publicada em 1995), 1999.

DUVAL, R. Registros de representações semióticas e funcionamento cognitivo da compreensão em Matemática. In: MACHADO, S. D. A. (org.). **Aprendizagem em Matemática**. Campinas, SP: Papirus, 2003. pp. 11-33.

DUVAL, R. **Semiósis e Pensamento Humano**: Registros semióticos e aprendizagens intelectuais (Fascículo I). Tradução: Lênio Fernandes Levy e Marisa Rosâni Abreu da Silveira. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2009.

DUVAL, R. **Ver e ensinar a matemática de outra forma**: entrar no modo matemático de pensar: os registros de representação semióticas. Tânia M. M. Campos (Org.). Tradução: Marlene Alves Dias. São Paulo: PROEM, 2011.

DUVAL, R. Registros de representação semiótica e funcionamento cognitivo do pensamento. **Revemat: Revista Eletrônica de Educação Matemática**, Florianópolis, v. 7, n. 2, p. 266-297, dez. 2012a.

DUVAL, R. Diferenças semânticas e coerência matemática: introdução aos problemas de congruência. **Revemat**, Florianópolis, v. 7, n. 1, p. 97-117, 2012b.

DUVAL, R. Entrevista: Raymond Duval e a Teoria dos Registros de Representação Semiótica. FREITAS, J. L. M.; REZENDE, V. (Orgs). **RPEM**, v. 02, n. 03, p. 10-34, 2013.

DUVAL, R. Rupturas e Omissões entre Manipular, Ver, Dizer e Escrever: História de uma sequência de atividades em Geometria. In: BRANDT, C. F.; MORETTI, M. T. (Org.). **As Contribuições da teoria das Representações Semióticas para o Ensino e Pesquisa e na Educação Matemática**. Ijuí: Ed. Unijuí, 2014.

DUVAL, R. Questões epistemológicas e cognitivas para pensar antes de começar uma aula de matemática. **Revemat: Revista Eletrônica de Educação Matemática**, Florianópolis, v. 11, n. 2, p. 02-78, 2016.

DUVAL, R. How To Learn To Understand Mathematics? **JIEEM**. São Paulo, v. 10, n. 2, p. 114-122, 2017.

HILLESHEIM, S. F.; MORETTI, M. T. Alguns aspectos da noção da congruência semântica presentes no ensino dos números inteiros relativos. **Revista Espaço Pedagógico**, v. 20, p. 119-135, 2013.

MORETTI, M. T. O papel dos registros de representação semiótica na aprendizagem de matemática. **Contrapontos**. Itajaí/SC, Ano 2, n. 6, p. 423 – 437, 2002.

NUNES, R. S. R. **Geometria Fractal e Aplicações**. 2006. Dissertação (Mestrado em Ensino da Matemática) – Faculdade de Ciências, Universidade do Porto, 2006.

PADILHA, T. A. F. **Conhecimentos Geométricos e Algébricos a partir da construção de fractais com uso do *software* Geogebra**. 2012. Dissertação (Mestrado) – Centro Universitário Univates, Lajeado, 2012.

PARANÁ. **Diretrizes Curriculares de matemática do Estado do Paraná**, 2008.