Conjeturas y demostraciones
a partir del embaldosado con polígonos regulares

MARIO DALCÍN[1]

VERÓNICA MOLFINO[2]

Resumen

Se presenta una experiencia llevada a cabo con doce profesores de matemática de magisterio y que formó parte de un curso de actualización para profesores magisteriales de Uruguay. Los objetivos de la misma fueron promover la reflexión acerca de la importancia de formular conjeturas y las formas de establecer su validez, articular el trabajo en lápiz y papel con el ambiente dinámico, y analizar si sus propias producciones estaban en el ámbito de una geometría empírica o una geometría deductiva. Los profesores trabajaron en equipos en una misma actividad durante quince días, combinando instancias presenciales y a distancia. La experiencia posibilitó que los profesores vivenciaran algunos procesos inherentes a la actividad matemática y que son relevantes para un docente magisterial.
Palabras clave*: Conjetura y demostración, polígonos regulares, embaldosado.*

Resumo

Nós apresentamos um experimento realizado com doze professores de matemática e que fazia parte de um curso de reciclagem para professores do magistério do Uruguai. Os objetivos foram promover a reflexão sobre a relevância de conjecturas e formular maneiras de estabelecer a sua validade, o trabalho conjunto com lápis e papel com o ambiente dinâmico, e analisar suas próprias produções foram no campo da geometria empírica ou geometria dedutiva. Os professores trabalharam em equipes na mesma atividade por duas semanas, combinando instâncias e distância. A experiência possibilitou que professores viveram alguns processos envolvidos na atividade matemática que são relevantes para um ensino de professores.
Palavras-chave: *Conjectura e demonstração, polígonos regulares, mosaico.*

Introducción

La experiencia que se reporta en este artículo fue realizada en el marco del curso "La demostración en geometría" de actualización de profesores de Magisterio que tenían a su cargo cursos de Matemática, en cualquiera de los 22 institutos magisteriales de Uruguay, durante el año 2010. Explicamos brevemente algunas características del curso, el contenido abordado, la metodología de trabajo empleada, la bibliografía usada y la

[1] Instituto de Profesores 'Artigas', Departamento de Matemática del Consejo de Formación en Educación, Uruguay – mdalcin00@gmail.com

[2] Instituto de Profesores 'Artigas', Departamento de Matemática del Consejo de Formación en Educación, Uruguay – veromolfino@gmail.com

forma de evaluación, dado que la experiencia reportada se llevó a cabo luego de tres meses de trabajo conjunto y las producciones se vieron afectadas por ese trabajo previo. El curso tuvo una duración de cuatro meses y se realizó en forma semipresencial: las instancias presenciales se hicieron cada 15 días e implicaban 6 horas de trabajo continuado y en forma de taller de todos los participantes del curso que viajaban desde distintas partes del país, el trabajo a distancia se desarrolló en la plataforma virtual del Departamento de Matemática de Formación Docente -que promovía el curso- e involucraba instancias de trabajo tanto individuales como en equipos.

Los contenidos desarrollados en el curso articularon tres aspectos: i) temas geométricos presentes en los cursos de magisterio que permiten desarrollar los procesos cognitivos propios de la demostración: ángulos entre paralelas, criterios de congruencia de triángulos, triángulos y cuadriláteros -discusión sobre las diferentes definiciones y criterios para su clasificación y propiedades-, polígonos, polígonos regulares, teorema de Pitágoras, ángulos en la circunferencia; ii) comparación de diferentes paradigmas presentes en la evolución histórica de la humanidad, vinculados a la fundamentación y argumentación geométrica (geometría egipcia, geometría griega) (Eves, 1995; Euclides, 1992); iii) presentación de teorías didácticas que dan cuenta de los procesos cognitivos propios del aprendizaje de la demostración en geometría y las consecuencias para su enseñanza (niveles de pensamiento geométrico de Van Hiele (Fuys, Geddes y Tischler, 1988; de Villiers, 1999), esquemas de demostración (Sowder y Harel, 1998) y tipos de pruebas (Balacheff, 2000a), funciones de la demostración (de Villiers, 1993; Battista y Clements, 1995), articulación entre los procesos de construcción y demostración (Itzcovich, 2005), geometría natural y geometría axiomático natural (Houdement y Kuzniak, 1999, 2000; Kuzniak, 2006).

La metodología del curso consistió en i) trabajar en la modalidad de taller, poniendo a los participantes como centro de la construcción de sus propios aprendizajes a través de la discusión grupal de los contenidos abordados, tanto en las instancias presenciales como en las virtuales; ii) articular el trabajo específico en torno a dos modalidades: la del lápiz y papel y la de la Geometría Dinámica, con el objetivo de que los participantes experimentaran ambas modalidades como forma de tener las herramientas necesarias para una rica discusión acerca de las ventajas y desventajas de cada ambiente (de Villiers, 1997; Balacheff y Laborde, 1998; Balacheff, 2000b); iii) resaltar la importancia de la articulación entre los procesos de construcción y demostración, iv) analizar, desde los marcos teóricos tratados, qué tipos de pruebas elaboran los participantes; v) promover la indagación por parte de los profesores acerca de qué tipo de pruebas elaboran sus propios estudiantes de magisterio; vi) discutir acerca de la transición entre distintos tipos de pruebas; vii) analizar libros de texto utilizados en formación docente (de Villiers, 1998).

La evaluación del curso consistió en i) ocho actividades –una por quincena- que se entregaron en las respectivas instancias presenciales. Algunas de estas actividades consistieron en la resolución de problemas geométricos específicos, otras en el análisis de las producciones de los participantes, a la luz de las referencias teóricas tratadas en el curso; ii) un trabajo final donde los participantes seleccionaron la producción de uno de sus grupos de magisterio sobre una actividad geométrica concreta. Debían, en primer lugar, analizar qué tipo de pruebas presentaban y qué funciones de la demostración observaban en ella. Luego proponer actividades geométricas con el fin de que dichos estudiantes transitaran hacia estadios más elaborados de pruebas y a un espectro más amplio de funciones de la demostración.

1. La actividad propuesta, el modelo geométrico considerado y la forma de trabajo

En sus intervenciones tanto presenciales como virtuales, así como en sus trabajos de evaluación, los docentes participantes del curso, reflejan concebir la matemática a enseñar como un cuerpo acabado de axiomas, definiciones, teoremas, demostraciones y algoritmos. Su concepción de enseñanza es la de transmitir un producto que es ese cuerpo acabado de resultados matemáticos (definiciones, teoremas…). Esto lleva a concebir la enseñanza como un proceso relativamente lineal.

El curso buscó cambiar esta visión de los profesores centrando la atención en los procesos matemáticos y promoviendo la reflexión acerca de la importancia de dichos procesos: axiomatizar, definir, demostrar. En especial, la reflexión en torno al proceso de formular conjeturas y las formas de establecer su validez.

La actividad que reportaremos en este artículo fue propuesta en el sexto encuentro presencial. En las primeras tres horas de este encuentro se había discutido en torno a los artículos de Houdement y Kuzniak (1999, 2000) y Kuzniak (2006), donde los autores proponen un marco conceptual que permite dar cuenta, desde la geometría y el pensamiento que pone en juego un estudiante de enseñanza primaria, hasta la geometría con la que trabaja un matemático. Hacen una distinción entre:

Geometría I. La geometría natural. La fuente de validación es la realidad, el mundo sensible. Hay una cierta confusión entre el modelo y la realidad. La deducción se hace centralmente mediante la percepción y el uso de instrumentos.

Geometría II. La geometría axiomática natural. La fuente de validación se basa sobre lo hipotético deductivo en un sistema axiomático lo más preciso posible. Pero dicho sistema axiomático se mantiene lo más fiel posible a la realidad.

Geometría III. La geometría axiomática formalista. Se cortan los lazos de la geometría con la realidad. El razonamiento lógico se impone y los axiomas no se basan en lo sensible, en lo real.

Estas Geometría I, Geometría II y Geometría III podrían pensarse en un primer momento como niveles a través de los cuales una persona estudiando geometría debería transitar; concebirlas como una jerarquía: la Geometría II mejor que la Geometría I, la Geometría III mejor que la Geometría II. Así es como ha sido concebida tradicionalmente la enseñaza de la geometría, como un camino unidireccional, siempre ascendente.

Sin embargo, no se trata de dirimir cuál de estas geometrías es mejor, no es eso lo que está planteado: Consideramos que una forma más productiva de pensar en estas tres geometrías es la de concebirlas como tres geometrías posibles, como tres enfoques distintos de un mismo hecho, pero donde ninguno niega a los otros. Las prácticas de un sujeto abordando una actividad geométrica son las que permiten determinar en cuál de estas tres geometrías está trabajando en cada momento. Estas tres geometrías son tres dimensiones distintas y el camino deductivo es uno de esos caminos (Geometría II), pero el camino puede ser el de constatar mediante mediciones (Geometría I), o validar al interior de un sistema axiomático formal (Geometría III). Cada una de estas dimensiones no niega a la otra. Esto permite concebir la formación de un estudiante en el ámbito de la geometría como un tránsito continuo entre estas tres dimensiones y por tanto la formación del profesor debería tenerlas en cuenta.

Por otro lado, Kuzniak (2006) plantea un vínculo entre el modelo de las Geometrías I, II, III y los niveles de van Hiele, lo cual facilita establecer conexiones entre un modelo medianamente difundido y manejado por los docentes, como es el de van Hiele, y este nuevo modelo.

La actividad propuesta a los docentes que reportamos en este artículo fue la siguiente:

¿Se puede embaldosar una superficie plana ilimitada, usando solamente polígonos regulares de igual lado? ¿De cuántas maneras?

La actividad fue propuesta a doce profesores que se desempeñaban en el año 2010 como docentes de matemática de magisterio en distintos institutos de Uruguay. La mitad de estos docentes tenían formación de maestros de enseñanza primaria, la otra mitad eran profesores de matemática de enseñanza media.

Se solicitó a los profesores que al abordar la actividad, fueran registrando los caminos seguidos, tanto los exitosos como los que no lo fueran, y que establecieran vínculos entre sus producciones y el modelo de Houdement y Kuzniak. Un profesor trabajó solo y los restantes en equipos de a dos o de a tres. El trabajo continuó a distancia durante dos semanas hasta el próximo encuentro presencial, momento en que debía entregarse el registro de las producciones.

El trabajo en la actividad se inició en las dos últimas horas del encuentro presencial y los profesores podían recurrir a los instrumentos que consideraran necesarios, ya fueran lápiz y papel, recortar polígonos en papel o trabajar en un ambiente dinámico. Los docentes participantes del curso tienen experiencias distintas en el trabajo en un ambiente dinámico, pero dado que los conocimientos del software a usar son mínimos para abordar la tarea y que tienen la posibilidad de trabajar en equipos, se hizo la opción de que los mismos docentes resolvieran las dificultades operativas que pudieran surgir. Los profesores del curso, autores del presente artículo, hicieron anotaciones sobre lo que fueron trabajando los distintos equipos en dicha ocasión.

2. Algunos resultados obtenidos

Todos los equipos consideraron inicialmente el problema de embaldosar una superficie plana ilimitada usando un solo tipo de polígono regular.

> *Alejandro – Los casos más sencillos son los siguientes: 3 hexágonos, 4 cuadrados, 6 triángulos.*

FIGURA 1: Primeros embaldosados obtenidos

El equipo de Ángela, Carmen y Liliana hizo las siguientes anotaciones en los primeros momentos de su trabajo:

– Vimos que tenía relación con la medida de los ángulos de los polígonos, más precisamente con que la suma de los ángulos que concurren en un vértice debe ser de 360º.

– Con el rectángulo también se puede cubrir el plano, lo mismo que con paralelogramos.

– Volviendo a los polígonos regulares, con el pentágono no se puede recubrir el plano. Calculamos la medida del ángulo interior del pentágono, es de 108º, por lo que no podemos formar 360º.

– Nos interrogamos qué sucedería con los pentágonos no regulares.

– Con figuras de más de 6 lados no se puede recubrir el plano.

El equipo de Antonio, Elena y Vicente, dibujando a mano alzada en lápiz y papel, fue el primero en encontrar polígonos regulares de más de un tipo, que pueden colocarse en torno a un vértice sin superponerse ni dejar espacios sin cubrir.

FIGURA 2: Intento fallido y embaldosado exitoso

También fue el primer equipo en crear con los mismos polígonos disposiciones distintas en torno a un vértice.

FIGURA 3: Dos disposiciones posibles para las mismas dos baldosas

Disposiciones distintas en torno a un mismo vértice también fueron halladas por los equipos de Ana, Beatriz y Cecilia y el de Laura y Laura.

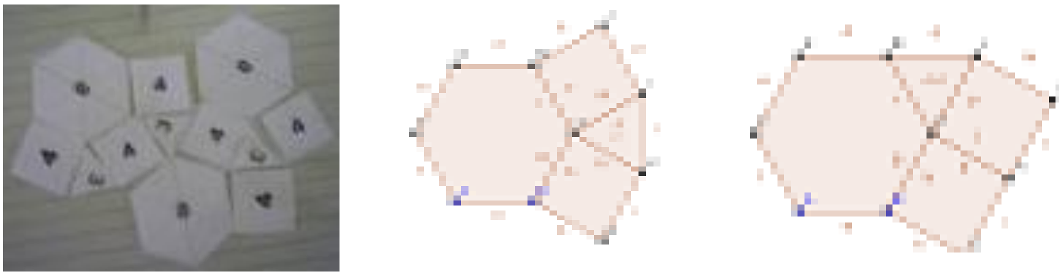

FIGURA 4: Dos disposiciones posibles para las mismas tres baldosas

Los equipos de Antonio, Elena y Vicente, trabajando con lápiz y papel, y de Ana, Beatriz y Cecilia, trabajando con polígonos recortados en papel, crearon las siguientes configuraciones:

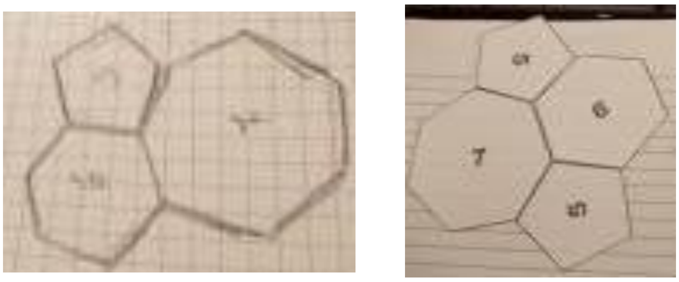

FIGURA 5: Distintos medios para un falso embaldosado

Alejandro, que trabaja solo, y el equipo de Ana, Beatriz y Cecilia obtuvieron estas nuevas configuraciones:

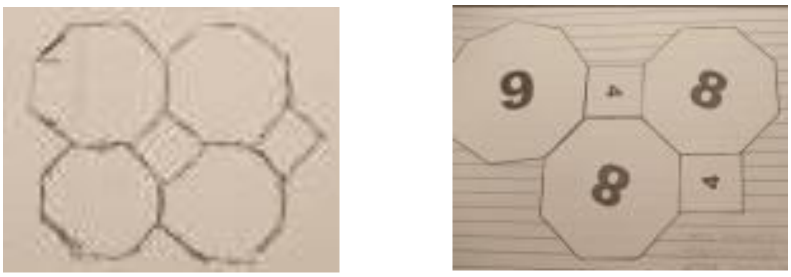

FIGURA 6: Nuevas propuestas de embaldosados

El equipo de Ana, Beatriz y Cecilia obtuvo nuevas posibilidades:

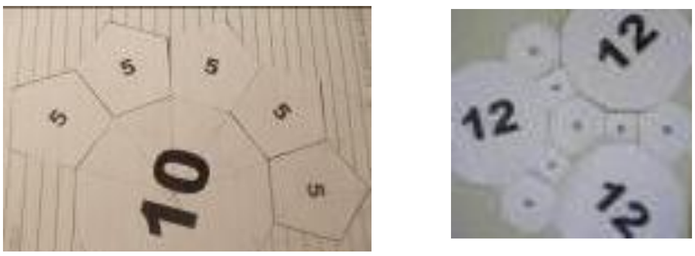

FIGURA 7: Nuevos intentos de embaldosados

El siguiente cuadro fue elaborado por Alejandro:

Nº lados	Ángulo interior	Nº lados	Ángulo interior
3	60	24	165
4	90	30	168
5	108	36	170
6	120	40	171
8	135	45	172
9	140	60	174
10	144	72	175
12	150	90	176
15	156	120	177
18	160	180	178
20	162	360	179

Cuadro 1: Número de lados del polígono regular y medida de su ángulo interior

Dice Alejandro:

– Sentí la necesidad de sistematizar de alguna manera la búsqueda y por eso recurrí a los diagramas de árbol, comenzando por el hexágono, la figura que pensaba que podía tener el ángulo mayor.

– Pensé en los valores de n para los cuales el ángulo del polígono 180(n-2)/n es entero.

– Esperaba una lista de 18 números y resultaron ser 22, es decir que hay cuatro enteros más de los evidentes, generados por ser divisores de 180.

– Recién entonces me di cuenta que podrían utilizarse polígonos con más de 6 lados!!

Ángela, Carmen y Liliana, después de hacer una tabla similar a la hecha por Alejandro y buscar combinaciones de polígonos, concluyeron:

– No encontramos combinaciones con pentágono o heptágonos. Las combinaciones son con polígonos de un número par de lados, a excepción del triángulo.

También sostienen:

– Nos dimos cuenta que [en un vértice] sólo podían haber entre tres polígonos (porque dos no tiene sentido) y seis polígonos (seis triángulos).

El equipo de Laura y Laura escribió en su reporte final:

– Inicialmente llegamos a unas cuantas posibilidades, además de las ya conocidas y comunes (6 equiláteros, 4 cuadrados y 3 hexágonos): 3, 10 y 15 lados; 4, 5 y 20 lados y otras más.

– Luego de "jugar" un poco con estas posibles combinaciones, empezamos a pensar en cómo obtener todos los polígonos regulares posibles, con la medida

de ángulos interiores que fuera un número natural, porque luego de obtenerlos sólo teníamos que hacer las combinaciones posibles.

Dice Alejandro más adelante:

– Tenía una lista con nuevos "descubrimientos"[...], en realidad no fue un trabajo geométrico, sino más bien aritmético[...]; tenía la sospecha de que no todas estas posibilidades "teóricas" teselaban, pero la complejidad de los dibujos hacía imposible construirlos con lápiz, por lo que recurrí a GeoGebra.

Confirma sus sospechas de que no sirven para embaldosar el plano combinaciones de polígonos regulares de 3, 9 y 18 lados, ni tampoco de 3, 10 y 15 lados.

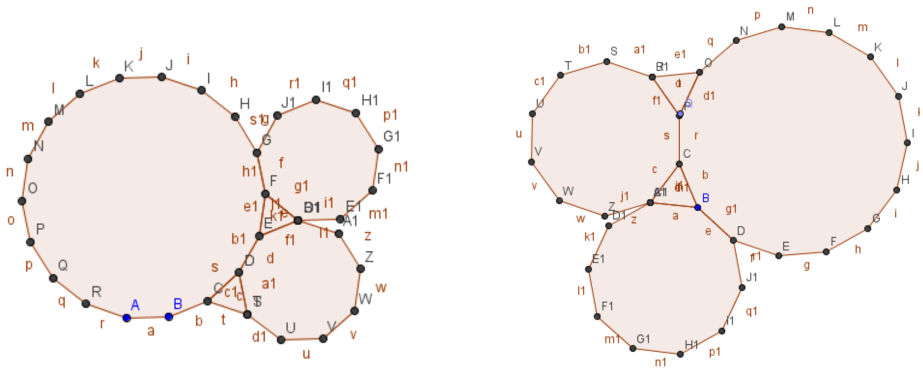

FIGURA 8: Embaldosados que no pudieron ser

Laura y Laura hacen una lista exhaustiva de todas las combinaciones posibles:

– Con tres polígonos regulares: 1 equilátero, 1 octógono y 1 polígono de 24 lados; 1 equilátero, 1 polígono de 9 lados y 1 polígono de 18 lados; 1 equilátero, 1 polígono de 10 lados y 1 polígono de 15 lados; 1equilátero y 2 polígonos de 12 lados; 1 cuadrado, 1 pentágono y 1 polígono de 20 lados; 1cuadrado, 1 hexágono y 1 polígono de 12 lados

1 cuadrado y 2 octógonos; 2 pentágonos y 1 polígono de 10 lados; 3 hexágonos.

Con cuatro polígonos regulares: 1 equilátero, 2 cuadrados y 1 hexágono; 2 equiláteros, 1 cuadrado y 1 polígono de 12 lados; 2 equiláteros y 2 hexágonos; 4 cuadrados.

Con cinco polígonos regulares: 3 equiláteros y 2 cuadrados; 4 equiláteros y 1 hexágono.

Con seis polígonos regulares: 6 equiláteros.

– Luego de llegar a estas combinaciones, con el programa GeoGebra empezamos a tratar de teselar el plano con algunas de ellas y empezamos a

observar que había combinaciones que al tratar de repetirlas no llenaban el plano.

Acompañan su afirmación con figuras creadas en GeoGebra para los casos de polígonos de 4, 5 y 20 lados y 5, 5 y 10 lados.

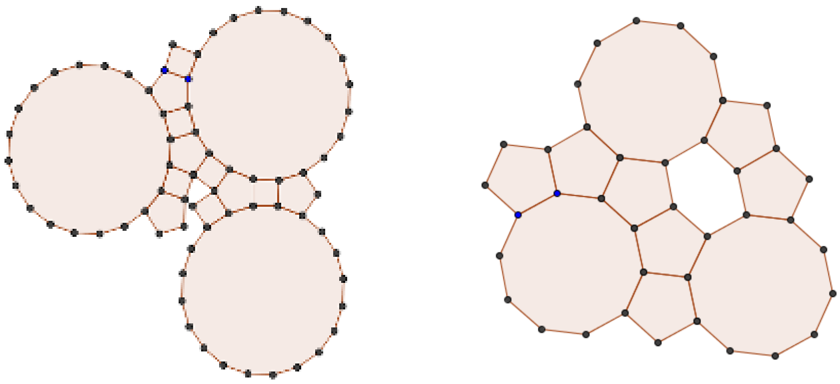

FIGURA 9: Nuevos embaldosados que no pudieron ser

El trabajo del equipo de Laura y Laura es el único que arriba a una conclusión final:

– *Con estas 16 combinaciones, se pueden obtener 20 "modelos" diferentes, de los cuales, 11 llenan el plano y 9 no permiten llenarlo.*

3. Reflexión acerca de los resultados reportados

Alejandro, cuya formación es de profesor de matemática de enseñanza media, no agrega ninguna explicación a su afirmación más allá de la figura. En la puesta en común alega que su afirmación es obvia y que la evidencia de la figura alcanza como fundamento. Su producción inicial es considerada en el ámbito de la Geometría I.

Un aspecto a resaltar del trabajo inicial de Ángela, Carmen y Liliana –la primera maestra y profesoras de matemática las últimas- es que hacen conjeturas respecto a embaldosados posibles con un solo tipo de polígonos no regulares, como el rectángulo y el paralelogramo. También se preguntan si es posible embaldosar con pentágonos no regulares, sin llegar a inclinarse por sí o por no. Estas conjeturas van más allá de responder la actividad geométrica específicamente planteada, pero son relevantes como preguntas que surgen al abordar una tarea matemática. En la puesta en común, algunos profesores preguntan en qué se basaron para conjeturar que "*Con figuras de más de 6 lados no se puede recubrir el plano.*" Ángela, Carmen y Liliana aclaran que estaban pensando en polígonos regulares. Incluso así, la conjetura sigue siendo cuestionada. Ángela, Carmen y Liliana amplían la aclaración y dicen que pensaron en polígonos regulares de un solo tipo y que una demostración podría hacerse siguiendo los mismos pasos que ellas siguieron para demostrar la imposibilidad de embaldosar con pentágonos. Ahora sí todos hacen acuerdo.

Lo hecho por Ángela, Carmen y Liliana, referido a la imposibilidad de embaldosar solo con pentágonos regulares o con un solo tipo de polígono regular de más de un lado, es considerado en el ámbito de la Geometría II.

La búsqueda iniciada por el equipo de Antonio, Elena y Vicente –maestro el primero y profesores de matemática los últimos-, al buscar combinar polígonos regulares de más de un tipo, fue hecha considerando dos polígonos, triángulo equilátero y cuadrado, justo los dos polígonos que habían servido para embaldosar cuando habían sido usados cada uno por separado. Es de resaltar la satisfacción de este primer hallazgo –tres triángulos equiláteros y dos cuadrados- que expresa el *"Sí!!"* subrayado que acompaña a la figura. El aspecto emocional presente en la actividad matemática es reconocido por todos los profesores y lo identifican con momentos concretos de gratificación que sintieron cuando ellos mismos fueron capaces de avanzar en la resolución de la actividad propuesta; también hacen acuerdo en que este aspecto raramente es vivido y ponderado en sus clases.

El equipo de Ana, Beatriz y Cecilia, las tres maestras, trabaja con polígonos regulares de papel; el equipo de Laura y Laura, ambas profesoras de matemática, es el primero en recurrir al trabajo en GeoGebra.

Tanto el trabajo en lápiz y papel, como el trabajo con polígonos recortados en papel, como el trabajo en GeoGebra, permitieron que los equipos crearan distintas configuraciones en torno a un vértice. En ese momento surgió una nueva faceta de la actividad propuesta que no estaba explícita en su enunciado inicial. Esto pautó el trabajo que, a partir de ese momento, siguieron llevando adelante los equipos, ya que además de buscar qué polígonos regulares podían disponerse en torno a un vértice, tuvieron que prestar atención a si estos mismos polígonos admitían otra u otras disposiciones en torno al vértice.

Nuevamente distintas herramientas –lápiz y papel o polígonos recortados en papel- permitieron hallar una misma configuración de polígonos regulares en torno a un vértice: en este caso, de cinco, seis y siete lados, respectivamente. La duda que se presentó a ambos equipos fue si estas baldosas efectivamente podían disponerse en torno a un vértice sin solaparse ni dejar espacio sin cubrir, o si la coincidencia era solo aparente. Ambos equipos crearon una situación en el ámbito de la Geometría I que no fueron capaces de resolver en el mismo ámbito de la Geometría I. Esto los llevó a hallar deductivamente la medida de los ángulos interiores del pentágono, exágono y eptágono para dirimir la situación. Este trabajo se dio en el ámbito de la Geometría II y se mostró efectivo donde lo visual y las mediciones de ángulos hechas con semicírculo se habían mostrado insuficientes.

Ana, Beatriz y Cecilia, después de crear la configuración con un cuadrado y dos octógonos, y la de un cuadrado, un octógono y un nonágono sostuvieron que si una es correcta, la otra no. En algún momento se dieron cuenta que bien podrían ser ambas configuraciones incorrectas. Hasta ese momento lo visual se estaba imponiendo en su forma de pensar. Nuevamente el argumento deductivo se hizo imprescindible. El trabajo en la geometría axiomática natural hizo posible resolver una situación que no pudo ser resuelta en la geometría natural.

El trabajo de Alejandro en esta etapa, así como el de los equipos de Ángela, Carmen y Liliana y el de Laura y Laura, mostró la necesidad de superar la búsqueda azarosa de combinaciones de polígonos capaces de disponerse en torno a un vértice, para pasar a hacer una búsqueda sistemática de todas las combinaciones posibles. Inició dicha búsqueda considerando los polígonos regulares con ángulos cuyas medidas sean números naturales. Es de resaltar que recién en este momento, Alejandro se dio cuenta que pueden intervenir en los embaldosados, polígonos regulares de más de seis lados; hasta el momento esta creencia había estado presente en su trabajo sin hacerse explícita. Su trabajo en esta nueva dirección le permitió concluir:

> *– Me di cuenta que una vez incluido un ángulo mayor que 150 ya no "había lugar" para otro igual o mayor que él.*

En este momento del trabajo de distintos equipos fue cuando repararon en la posibilidad de que tres (o más) polígonos regulares confluyeran en un vértice sin superponerse ni dejar espacio libre, pero que dicha combinación de polígonos no sirviera para embaldosar el plano. Esta confirmación por la negativa de algunos casos como los vistos en el trabajo de Alejandro, se resolvió en el ámbito de la Geometría I, y se llegó al trabajo en un ambiente dinámico porque "*la complejidad de los dibujos hacía imposible construirlos con lápiz, por lo que recurrí a GeoGebra"*.

Equipos que no llegaron por sus propios medios a una conclusión final que diera una respuesta a la actividad planteada, pero que 'necesitaban' conocer una respuesta, buscaron información sobre embaldosados, tanto en Internet como en libros, y las incluyeron en sus trabajos. En la puesta en común, realizada quince días después de iniciada la actividad en el encuentro presencial anterior, los docentes del curso optamos por que los distintos equipos compararan la respuesta dada por el equipo de Laura y Laura –la única conclusión final elaborada por los equipos- con la siguiente:

> Un recubrimiento del plano formado por más de un tipo de polígono regular y con idénticos vértices de figura se dice que es un recubrimiento semirregular. Esta condición adicional sobre los vértices de figura supone que los mismos tipos de polígonos deben concurrir en cada vértice, y deben concurrir en el mismo orden. Se puede demostrar que existen 18 modos de formar vértices de figuras con polígonos regulares de dos o más tipos. De estas 18 formas, 8 corresponden a teselaciones semiregulares. (Godino y Ruíz, 2002, p. 34)

De esta manera 'devolvimos' la actividad sin terminar a la reconsideración de los equipos, bajo la luz de los nuevos elementos de que disponía el colectivo en ese momento.

Consideraciones finales

La actividad propuesta posibilitó que los profesores participantes del curso trabajaran en equipos, en algunos casos integrados por maestros y profesores, durante un período de quince días. En ese lapso de tiempo, los equipos –salvo uno- no llegaron a elaborar una respuesta acabada a la actividad propuesta. Consideramos importante que profesores que mayoritariamente conciben la matemática como un cuerpo acabado de resultados (axiomas, definiciones, teoremas, algoritmos) hayan vivido la matemática como un proceso en construcción, donde las respuestas no se conocen de antemano y es necesario formular conjeturas y buscar argumentos que las sustentes, y que esos argumentos no siempre son demostraciones. El hecho de que los profesores abordaran un problema matemático para el que no conocían una respuesta de antemano hizo la experiencia enriquecedora más allá de que no arribaran a una respuesta acabada. Las producciones de los equipos mostraron que fue posible articular el trabajo en lápiz y papel con el trabajo en un ambiente dinámico y sirvieron para resaltar las virtudes del trabajo haciendo uso de una u otra herramienta. El trabajo en GeoGebra permitió avanzar en la resolución de la actividad, en momentos donde el trabajo en lápiz y papel no lo permitía. A través del registro de sus propias acciones ante la actividad propuesta, los docentes fueron capaces de verse a sí mismos abordando una actividad matemática, y de analizar si sus distintas producciones eran en el marco de la geometría natural o en el ámbito de la geometría axiomática natural. En todos los casos se constató un recorrido de ida y vuelta entre la Geometría I y la Geometría II.

Referencias

BALACHEFF, N. (2000a). *Procesos de prueba en los alumnos de matemáticas*. Bogotá, Colombia: Una empresa docente.

BALACHEFF, N. (2000b). Entornos informáticos para la enseñanza de las matemáticas: complejidad didáctica y expectativas. En *Matemáticas y educación. Retos y cambios desde una perspectiva internacional*, pp. 93-108. Barcelona, España: ICE de la Universidad de Barcelona y Editorial Graó.

BALACHEFF, N. y LABORDE, C. (1998). Lenguaje simbólico y pruebas en la enseñanza de las matemáticas: un enfoque sociocognitivo. En G. Mugny y J. Pérez (Eds.), *Psicología social del desarrollo cognitivo*. Capítulo 2, pp. 265-288. Barcelona, España: Anthropos.

BATTISTA, M. T. y CLEMENTS, D. H. (1995). Geometry and proof. *The Mathematics Teacher*, 88, 1, 48-54.

DE VILLIERS, M. (1993). El papel y la función de la demostración en matemáticas. *Epsilon*, 26, 15-30.

DE VILLIERS, M. (1997). The role of proof in investigative, computer-based geometry: Some personal reflections. En J. King and D. Schattschneider (Eds.), *Geometry Turned On:Dynamic Software in Learning, Teaching, and Research* (pp. 15-24). U.S.A. : Mathematical Association of America.

DE VILLIERS, M. (1998). To teach definitions in geometry or teach to define? En A. Oliver y K. Newstead (Eds.) *PME 22 Proceedings*. South Africa: Stellenbosch University.

DE VILLIERS, M. (1999). The van Hiele Theory - Defining and Proving within a Sketchpad Context. En *Rethinking proof with the Geometer's Sketchpad* (pp. 11-20). U.S.A.: Key Curriculum Press.

EUCLIDES (1992). *Elementos de Geometría I-II*. México: UNAM.

EVES, H. (1995). Introduçao à história da matemática. Campinas, SP: Editora da UNICAMP.

FUYS, D., GEDDES, D. y TISCHLER, R. (1988). *The van Hiele Model of Thinking in Geometry Among Adolescents*. U.S.A. : NCTM.

GODINO, J. D. y RUIZ, F. (2002). *Geometría y su didáctica para maestros*. España: Departamento de Didáctica de las Matemática, Facultad de Ciencias de la Educación, Universidad de Granada.

HOUDEMENT, C. y KUZNIAK, A. (1999). Sur un cadre conceptuel inspire de Gonseth et destine a etudier lenseignement de la geometrie en formation des maitres. *Educational Studies in Mathematics,* 40 (3), 283-312.

HOUDEMENT, C. y KUZNIAK, A. (2000). Formation des maitres et paradigmes geometriques. *Recherches en didactique des mathematiques,* 2, 89-116.

ITZCOVICH, H. (2005). *Iniciación al estudio didáctico de la geometría*. Buenos Aires: Libros del Zorzal.

KUZNIAK, A.(2006). Paradigmes et espaces de travail geometriques. Elements d'un cadre theorique pour l'enseignement et la formation des enseignants en geometrie. *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education,* 6 (2), April, 167–187.

SOWDER, L. y HAREL, G. (1998). Types of Students' Justifications. *The Mathematics Teacher*, Vol. 91, nº 8, noviembre, 670-675.