As transformações isométricas no GeoGebra com a motivação etnomatemática

Isometrics transformations in GeoGebra with ethnomatematics motivation

MITCHELL CHRISTOPHER SOMBRA EVBANGELISTA[1]

Resumo

A pesquisa teve como objetivo fazer com que alunos do Ensino Médio, de uma escola pública estadual de São Paulo, aplicassem e construíssem o conhecimento do objeto matemático Transformações Isométricas por meio da Rotação, Translação e Reflexão. Nesta pesquisa, usamos elementos motivadores, a Etnomatemática com a Geometria Sona do grupo étnico africano chamado Cokwe e a Geometria Dinâmica com o uso do software GeoGebra. A metodologia utilizada, Design Experiment, possibilitou o aprimoramento de uma sequência de atividades, gerando o produto final da pesquisa. O desenvolvimento deste trabalho permitiu concluir, após as análises feitas dos protocolos das atividades propostas, que a Etnomatemática, com apoio do GeoGebra, favoreceu a aprendizagem das Transformações Isométricas.

Palavras-chave: *Isometrias; Etnomatemática; GeoGebra.*

Abstract

The research aimed to make high school students in a public school of São Paulo, to applyand build knowledge of de mathematical object Isometric Transformations by Rotation, Translation and Reflection. In this study we use these motivating factors, the Ethnomathematics with Sona Geometry of ethnic group called African Cokwe and Dynamic Geometry using the software GeoGebra. The methodology used was the Experiment Design, enabling the improvement of a sequence of activities and generating the final product of research. The development of study revealed after the analyzes of protocols of the proposed activities, the Ethnomatematics, with the support of GeoGebra, favores the learning of Isometric Transfomations.

Keywords: *Isometric; Ethnomathematics; GeoGebra.*

Introdução

Durante o Mestrado, ao pesquisarmos sobre Geometria no Ensino Básico em artigos, dissertações e teses, deparamos com a expressão *"African Fractais"*, título do livro de Ron Eglash (2002), pesquisador americano que realizou descobertas de formações de fractais na África e que constatou estas formações por toda a sua cultura, arquitetura e arte.

[1] Pontifícia Universidade Católica (PUC-SP) – profmitchellmat@gmail.com

A Geometria, tanto no Ensino Fundamental como no Médio apesar de constar nos documentos oficiais através de menções teóricas para a sua utilização, isso não acontece na prática.

Segundo Pavanello (1993, apud Gouveia 2005)

> A maioria dos alunos do 1º grau [Ensino Fundamental] deixa de aprender Geometria, pois os professores das séries iniciais limitam-se, em geral, a trabalhar somente a aritmética e as noções de conjunto. O estudo de Geometria passa a ser feito – quando não é eliminado – apenas no 2º grau [Ensino Médio], com o agravante de que os alunos apresentam uma dificuldade ainda maior em lidar com as figuras geométricas e sua representação porque o Desenho Geométrico é substituído, nos dois graus do ensino, pela Educação Artística. (PAVANELLO 2005, p.6).

Percebendo este abandono em muitas escolas, resolvemos pesquisar e propor, por meio da motivação da etnomatemática e com um suporte tecnológico, a utilização da Geometria Sona (Desenhos do povo Africano Cokwe) para observação de regularidades que possam contribuir para o aprendizado das transformações geométricas.

Verificamos segundo Piaget e Garcia (1983), em quais estágios de desenvolvimento psicogenéticos os alunos conseguiram atingir com a aplicação da sequência de atividades. Estes estágios investigados foram o intrafigural, o interfigural e o transfigural.

As atividades constavam de uma parte de construção do conceito sobre transformações isométricas e vinham sempre acompanhadas da outra parte a qual chamamos de aplicação, sendo que nestas últimas verificamos se os alunos conseguiram atingir os referidos estágios.

A cada encontro fizemos os registros de gravação em vídeo com uma máquina fotográfica, gravando as respostas e as intervenções que os alunos apresentavam durante a aplicação das atividades.

Por fim apresentamos as considerações finais com propostas de possíveis aprimoramentos atendendo à metodologia utilizada.

1. O PROJETO DE PESQUISA

1.1. Questão de Pesquisa

Partindo do princípio de que a maioria dos alunos possui dificuldades em compreender as relações Geométricas, quando aplicadas sem uma relação interdisciplinar com problemas do seu dia-a-dia, buscamos apoio na Geometria Sona do povo Cokwe do

Continente Africano para relacionar os desenhos que imprimem na areia e representam lendas e mitos como exemplo de correlação cultural bem sucedida.

Utilizando-se das transformações isométricas sem o conhecimento acadêmico, este povo mostra um alto grau de perfeição nas suas construções.

Introduzimos o conceito das transformações isométricas por meio de uma sequência de atividades com a proposta de resolução de problemas de rotação, reflexão e translação construídas com o software *GeoGebra.*

Como de alguma forma a tecnologia, principalmente a computacional, deve estar presente nas escolas, propusemos uma sequência de atividades neste trabalho tendo como princípio a introdução do conhecimento das transformações isométricas com a motivação etnomatemática e utilizando o software de Geometria Dinâmica, o GeoGebra.

Diante do exposto temos a seguinte questão:

O u**so da Geometria Sona do povo Cokwe e o software GeoGebra são agentes motivadores que podem contribuir para a aprendizagem das transformações isométricas?**

Esta questão de pesquisa está posta e todos os instrumentos foram orientados para responder esta questão de pesquisa, que acreditamos ser complexa, porém pôde trazer elementos formativos que nortearam este trabalho e também servirão para contribuir para pesquisas futuras.

1.2. Justificativa

Verificamos que, em muitos casos, a geometria está locada para os capítulos finais dos livros didáticos, e quase sempre pelo extenso currículo da disciplina de matemática nunca se esgotam a tempo a álgebra e a aritmética, para dar espaço à geometria. Justificativa que disfarça a má formação atual do professor no que se refere ao aprendizado da geometria, não só por culpa deste, mas principalmente das instituições de ensino superior que formam o futuro professor.

Em 2009 ao integrarmos o grupo de pesquisa: TecMEM - Tecnologias e Meios de Expressão em Matemática, e cursarmos a disciplina de Autoformação pelo uso das TICs durante o mestrado, sentimos um maior interesse, que já era latente, de utilizarmos a Geometria com novas tecnologias para a aprendizagem em Educação Matemática, usando a etnomatemática como motivação de aprendizagem.

Neste curso de TICs trabalhamos com o software livre chamado GeoGebra, que além de proporcionar uma interface geométrica, também oferece uma janela com as informações algébricas que simultaneamente se interligam e registram as informações matemáticas quando da realização das atividades.

A Etnomatemática junto com a Geometria se apresentam como áreas da Matemática que geram possibilidades interdisciplinares para construção de conhecimento. No livro: "Geometria Sona - Matemática duma Tradição Africana" de Gerdes (2008) vislumbramos a oportunidade de unir ao estudo das transformações isométricas a motivação Etnomatemática com a utilização do GeoGebra. Esta escolha se deu por se tratar de um software livre e com ótimas opções de fácil manejo de suas ferramentas de simetria.

1.3 - Objetivos

O objetivo principal deste estudo é construir por meio de uma sequência de atividades, com quatro alunos do terceiro ano do ensino médio, o conceito de transformações isométricas: rotação, reflexão e translação, com o apoio do software de geometria dinâmica, o GeoGebra.

A sequência de atividades privilegiou o aspecto histórico-cultural de um povo africano, os Cokwes, que realizam desenhos chamados de Sona com a geometria das transformações isométricas nos seus desenhos há muitas décadas e esta produção está se perdendo com o passar do tempo. Fundamentado na Teoria da Etnomatemática D'Ambrósio (2001) e Gerdes (2008), e amparado nos estágios de desenvolvimentos psicogenéticos de Piaget e Garcia (1983) bem como utilizando a tecnologia, e o software GeoGebra, tivemos condições de propor aos alunos situações-problema para o aprendizado das transformações isométricas.

Por fim averiguamos quais os estágios de desenvolvimento psicogenético os alunos conseguiram atingir ao realizar tanto as atividades de construção, como as atividades de aplicação que foram propostas.

2. SOBRE A ETNOMATEMÁTICA

2.1. Perspectivas Etnomatemática

> Indivíduos e povos têm, ao longo de sua existência e ao longo da história, criado e desenvolvido instrumentos, de reflexão, observação, instrumentos materiais e intelectuais [que chamo de ticas] para explicar, entender, e aprender para saber fazer [que chamo matema], como resposta à necessidade de sobrevivência e transcendência em diferentes ambientes naturais, sociais e culturais [que chamo etnos]. Daí chamar o exposto acima de Programa Etnomatemática. (D'AMBRÓSIO, 2001, p. 60).

É impossível pensar os seres humanos afastados de tudo sem notar que estão juntos nesta simbiose com o mundo e as suas relações, ou seja, dizer que são entes distintos e, portanto, que não possuem uma correlação, sendo totalmente independentes um do outro.

Acreditamos que apesar das várias formas com as quais os seres humanos conseguiam sobreviver e se desenvolver em lugares distintos podemos sem problemas chamar estas matemáticas de Etnomatemática.

Percebeu-se a divisão do que era natural ao ser humano que se desenvolvia, descobria e com a matemática própria, resolvia suas necessidades cotidianas durante séculos, e assim, as comunidades modernas tendem, como uma etiqueta, desvincular o que é natural, cultural e social numa estrutura dogmática.

As variantes inventadas da matemática são as etnomatemáticas, pois não podemos conceber como, por exemplo, a multiplicação russa usada isoladamente seja o mesmo algoritmo que utilizamos aqui nas Américas.

Outro exemplo são as calculadoras chamadas de "ábacos" que é uma unanimidade no Oriente. Assim temos de pensar que cada grupo desenvolve a sua matemática própria e caracterizada, então podemos dizer que desde a pré-história os humanos sempre construíam conhecimentos para responder as suas necessidades e desejos.

2.2. Aspectos não-Ocidentais

Para fazermos uma relação entre os desenhos do povo Cokwe e de outras culturas não-Ocidentais acreditamos ser importante apresentar também as figuras de Kolam que têm a sua origem na Índia e geralmente são realizadas pelas mulheres mais velhas.

Assim como os Cokwes as Índianas também utilizam uma malha pontilhada para construir suas figuras.

A escolha destas figuras de Kolam[2] e os desenhos dos Cokwes são para mostrar que há duas formas de construção das figuras de Kolam e somente uma forma de representar os desenhos dos Cokwes, ou seja, apenas uma forma para os desenhos da Geometria Sona.

Vejamos a imagem da figura abaixo, onde uma mãe ensina sua filha a arte de desenhar figuras que decoram a entrada das casas:

Figura 1: A aprendizagem do traçado das figuras de Kolam de mãe para filha
Fonte: American Scientific nº 11, 2005, p. 51

Observamos que na construção das figuras de Kolam, assim como veremos nos Sonas dos Cokwe, a sua iniciação é feita com uma malha pontilhada demarcando o espaço em que será realizada a figura e depois se constrói o desenho, ou seja, utiliza-se uma espécie de geoplano.

As figuras são construídas desenhando por cima ou contornando os pontos, conforme podemos observar na figura seguinte.

[2] "Kolam" refere-se à arte decorativa desenhada na frente de divindades nas salas de puja (é uma forma de adoração no Hinduísmo), ou na frente das casas no sul da Índia. Na maioria das vezes feitas com pó de farinha de arroz moído, usado para fazer esses desenhos no chão molhado / úmido já borrifado com água (até mesmo as soluções diluídas de esterco de vaca que dá um fundo mais escuro para o chão de barro)

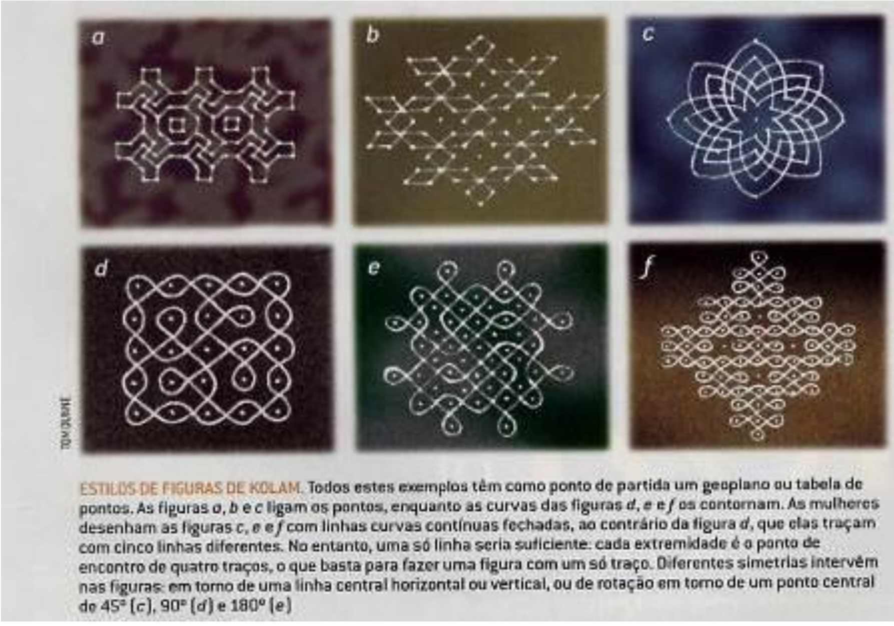

Figura 2: Padrões de figuras de Kolam
Fonte: American Scientific nº 11 – Edição Especial, 2005, p. 50.

É notório que em todas as figuras de Kolam encontramos padrões de preocupação com a simetria. Aqui não podemos afirmar que o conhecimento por parte do povo indiano de Tamil Nadu[3] pode ser acadêmico, mas há um interesse muito grande, especialmente nas famílias, ou grupos de desenhos, que demonstra particularmente ricas idéias matemáticas.

2.2.2. A Geometria Sona do Povo Tu Tshokwe Filii (Cokwe)

Segundo Gerdes (2008) até o final dos anos 50, os nativos africanos do povo Tshokwe, ainda hoje com aproximadamente um milhão de pessoas que vivem no nordeste da Angola, reuniam-se em volta da fogueira e, após realizarem a sua caça, escutavam um deles contar histórias segundo um ritual preciso.

Marcavam no solo arenoso com os dedos, formando uma malha pontilhada de formato, podendo ser quadrada ou triangular dependendo do desenho a ser executado, e executavam os seus desenhos (Sona).

Na sua maioria monolineares, e realizavam os desenhos sem retirar o dedo da areia até o término de toda figura.

Vários Sona eram designados como ritual de passagem dos jovens para a idade adulta.

---

[3] **Tamil Nadu** é um dos 28 estados da Índia. Tamil Nadu fica no sudeste da península Indiana.

Segundo Bastin apud Gerdes (2008), as atividades artísticas dos Cokwe começam muito cedo: "Aprendendo, o jovem diverte-se ao fazer desenhos na areia com os dedos, estes desenhos chamados S*ona*, (nome que hoje se dá à escrita) aparecem nas paredes das casas pintadas por homens, mulheres e crianças. (GERDES 2008. p. 23)".

Fontinha (1983, apud Gerdes 2008), descreve que, quando os Cokwe (abreviação de Tshokwe) se encontram no terreiro da aldeia ou no acampamento de caça, sentados à volta da fogueira ou à sombra de árvores, costumam passar o tempo em conversas ilustrando-as com desenhos (*lusona,* plural: *sona*) na areia.

Apesar de muitos Sona representarem lendas, animais e fábulas o interessante já se percebe no início com a marcação de pontos constituindo uma malha ortogonal para facilitar posteriormente a construção, ou seja, até para preparar o terreno para realização do desenho já encontramos um traço do pensamento matemático, como ilustrado nas figuras seguintes.

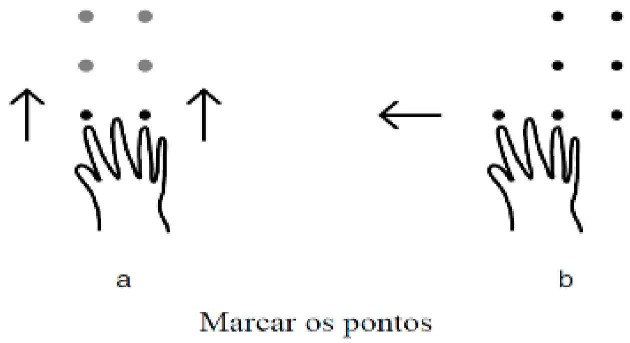

Figura 3: Extraída de Gerdes (2008) apud Fontinha (1983, p. 38)

Todo desenho que era realizado pelos Cokwe tinha um tema, por isso a malha a ser registrada no chão dependia do referido tema a ser construído pelos especialistas.

Vejamos um exemplo.

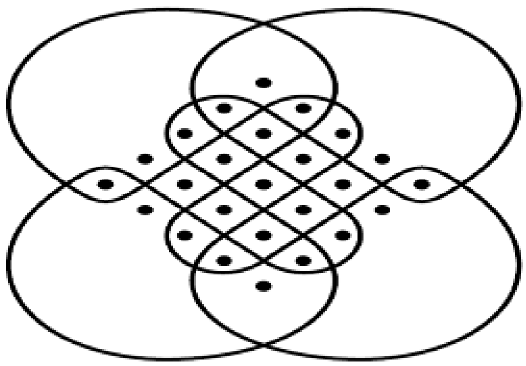

Figura 4: Fontinha (1983) apud Gerdes (2008, p.41)

Segundo Fontinha

> A Figura mostra um motivo traçado pelo desenhador cokwe de nome Mwata Muamuchico. Chama-se *sako rya uyanga*, isto quer dizer que "simboliza um pequeno atado de cauda de animais com 'remédios', que o caçador cokwe usa como amuleto na sua arma, para ter sorte na caça e evitar maus encontros. (FONTINHA APUD GERDES 2008, p. 41).

O significado e feitura dos desenhos mais difíceis são transmitidos por especialistas – *akwa kuta sona* (conhecedores de desenho) – a neófitos interessados nos S*ona*. Estes mestres de desenho faziam parte de uma elite, que procurava deixar o saber que havia recebido de seus antepassados aos seus descendentes diretos (GERDES apud FONTINHA, 1983, p. 44).

Figura 5 - O AKWA KUTA SONA, ou especialista, é o guardião da tradição de seu provo, os tshokwe. Fonte: Scientific American – Edição Especial nº 11, 2005, p. 68 – Etnomatemática

Segundo Fontinha (1983, apud Gerdes 2008)

> Com a penetração e ocupação coloniais a tradição de desenho entrou em decadência. Alguns missionários e etnógrafos recolheram *sona* e livraram-nos do esquecimento. A maior e a mais importante coleção de *sona* foram concluídas, em 1963, por Fontinha e publicada somente em 1983. Esse livro contém 287 desenhos diferentes recolhidos nos anos 1940 e no início dos anos 1950. Fontinha observa que em cada dia que passa e em cada velho que morre, vêem-se desaparecer testemunhos preciosos do seu passado coletivo. (FONTINHA APUD

GERDES 2008, pp.25-26)

A simetria como valor cultural do povo Cokwe apresenta uma série de desenhos facilitando a percepção das transformações isométricas, vamos apresentar e analisar alguns exemplos.

A seguir a relação das figuras que representam características de simetrias relacionadas nos itens acima com as suas denominações, explicando o que significa cada desenho, mostrando que há uma cultura do povo Cokwe por trás da prática de desenhos na areia.

Segundo Gerdes (2008) na figura 6 apresentam-se exemplos de S*ona* monolineares com uma simetria axial.

> São alusivos a (a) uma cabeça de mocho (mutwe wa tskikungulu); (b) um galo de mato e um chacal (kanga nyi mukuza); (c) um morcego (tshinguzo); (d) uma pele de hiena com as manchas características (tshimbungu); (e) uma ave grande (linguali); (f) o acampamento dos circuncidados (mukanda): a fila de pontos ao centro indica os circuncidados; os pontos ao alto representam as máscaras protetoras do ritual e os de baixo os guardas do acampamento Gerdes (2008, p. 34) apud (Fontinha, 1983, p. 262; cf. Hamelberger, 1952, p. 325). (GERDES, 2008, p. 35)

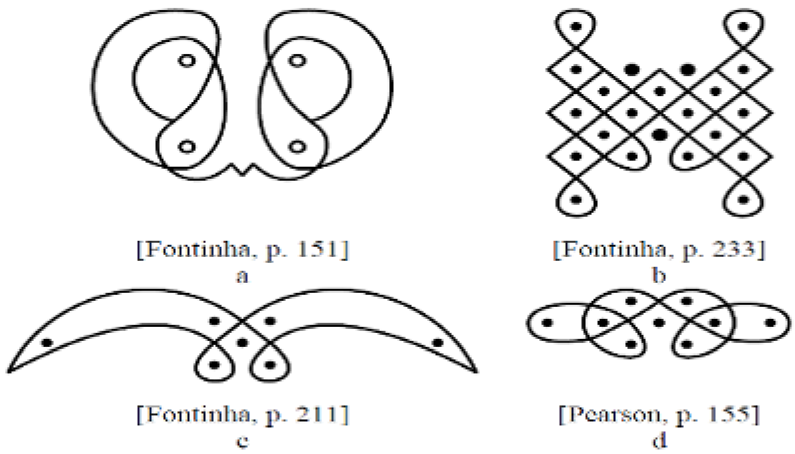

Figura 6: Sona monolineares com um eixo de simetria
Fonte: Gerdes (2008, p. 35)

De acordo com Gerdes (2008) na Figura 7 ilustram-se exemplos de *sona* monolineares com simetria dupla. Representam (a) kafundeje, designação dada a uma rapariga após a primeira menstruação; (b) tshanda huri, uma aranha no meio da sua teia; (c) pormenor de parte da cara de uma figura humana.

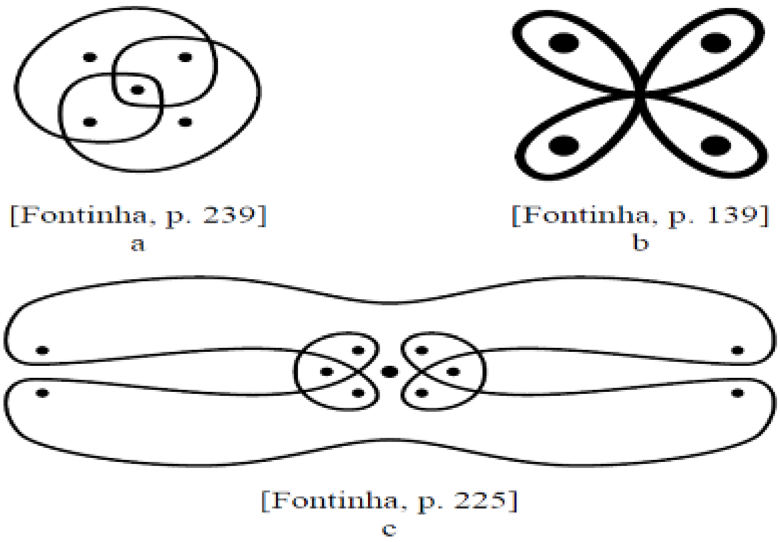

Figura 7: Sona monolineares com dois eixos de simetria
Fonte: Gerdes (2008, p. 37)

No nosso trabalho utilizamos duas atividades com a figura tshanda huri, uma aranha no meio da sua teia compondo transformações isométricas. Uma delas consistirá em selecionar parte da figura original e a partir dela a construção de toda a figura. A outra atividade será construir uma figura semelhante à original utilizando apenas as ferramentas de simetria do software GeoGebra.

3. ESCOLHAS TEÓRICAS

Para realizarmos uma análise com referência na história da ciência e da matemática, identificamos um lapso na história da geometria para conceituar a própria ideia de transformação geométrica sem passar pela análise e pela álgebra.

O desenvolvimento histórico da Geometria segundo Piaget e Garcia (1983) se divide em cinco etapas:

1ª) A era dos Gregos com “Os Elementos de Euclides”: Sem se aprofundarem nos pormenores dos seus Elementos, apresentam a contribuição de quatro dos seus maiores geômetras notáveis: Euclides, Arquimedes, Apolonius e Pappus.

2ª) A era da Geometria Analítica com mudanças significativas no tratamento que foi dado após os gregos, por Descartes com o “Discurso do Método” para bem comparar a sua razão e procurar a verdade nas ciências, que junto com Fermat, introduziu pares de números no lugar dos pontos no plano e as equações nas curvas. Passando por Newton e Leibniz, Bernoulli, finalizando com Euler e Lagrange que reduziram a geometria à análise.

Mas foi com Poncelet (1788-1867) e Chasles (1793-1880) que podemos afirmar claramente a superação da geometria analítica sobre a geometria antiga;

3ª) A Geometria Projectiva, onde Chasles e Poncelet introduzem uma nova concepção da geometria a partir dos métodos algébricos e dão um sentido puramente geométrico aos elementos imaginários;

4ª) Antecedentes da noção de transformação: A noção de transformação está na origem da nova geometria que se desenvolveu no século XIX.

5ª) A última etapa: algebrização foi com Lie e Klein, baseados na noção de grupo de transformações e as invariantes correspondentes, se tornou possível introduzir distinções precisas entre os diferentes tipos de geometria.

A Teoria dos Grupos pela qual Felix Klein se familiarizou através do livro de C. Jordan (1870), segundo Piaget e Garcia (1983), vai fornecer utensílios necessários para reformular os problemas em um nível mais elevado

> Os conceitos de Klein têm como ponto de partida a noção de grupo de transformações do espaço. Ora como Dieudonné indica, a grande originalidade de Klein é ter concebido a relação entre uma geometria e o seu grupo, destruindo os papéis destas duas entidades, sendo, portanto, o grupo o objecto primordial e os diversos espaços sobre os quais ele opera, evidenciando diversos aspectos da estrutura do grupo. (PIAGET E GARCIA, 1983, p.105)

3.1. Estratégia de solução para o estágio Intrafigural

Dado um paralelogramo ABCD, sejam P e Q os pontos médios de AB e BC. Seja o AC diagonal e DP e DQ segmentos que se cruzam em S e T com a diagonal. Prove que AS = ST = CT. Se resolvermos medir diretamente na figura os comprimentos dos segmentos indicados, temos:

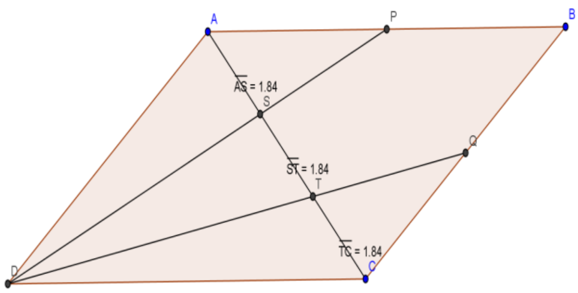

Figura 8: Adaptação e Construção nossa no GeoGebra. Fonte: Barroso e Martel[4] (2007)

[4] Figura construída no GeoGebra adaptada da atividade proposta por Ricardo Barroso e José Martel no artigo Caracterización geométrica del desarrollo de la tríade piagetiana. Disponível em:<http://personal.us.es/rbarroso/Pruebas/04Barroso.pdf>

Construindo, no GeoGebra, o quadrilátero ABCD e realizando as medidas, podemos comprovar que AS=ST=TC. Esta resolução apresenta conjecturas internas da figura, portanto se encontra no estágio intrafigural do desenvolvimento psicogenético em geometria. Observamos que utilizando a diagonal AC e os pontos médios dos segmentos AB e BC verificamos dinamicamente com esta construção que os segmentos que ligam os pontos de intersecção S e T entre os segmentos DP e DQ com esta diagonal geram três segmentos nesta mesma diagonal de mesma medida. Sendo eles AS=1,84, ST=1,84 e TC=1,84

O estágio seguinte é caracterizado segundo Piaget e Garcia por esforços para encontrar as relações entre os números. Este se manifesta concretamente na busca de transformações relativas a valores de acordo com as várias formas de correspondência. Contudo, estas transformações ainda não estão subordinadas aos conjuntos estruturados. Este é o período em que a geometria projetiva predomina. Vamos chamá-lo de interfigural.

3.2. *Estratégia de solução para o estágio Interfigural*

Ao desenhar a outra diagonal BD no paralelogramo, as diagonais se cruzam nos seus pontos médios. Isto significa que os segmentos AM e DM são médios, e S indica o Baricentro do triângulo ADB. Pelas propriedades 2SM = AS.

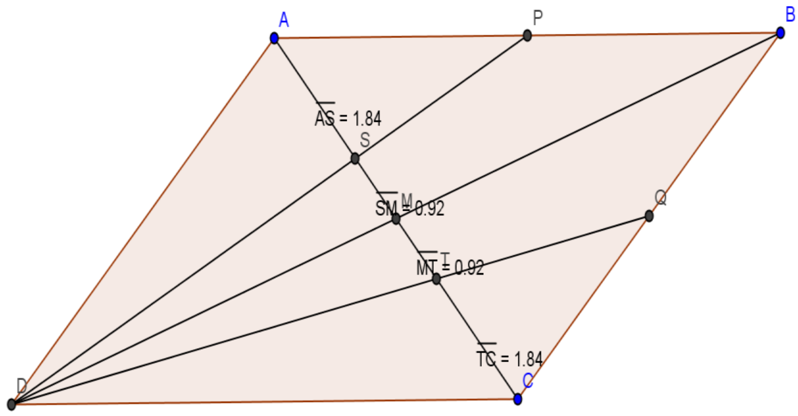

Figura 9: Adaptação e Construção nossa no GeoGebra. Fonte: Barroso e Martel (2007)

Da mesma forma, quando se considera o triângulo BCD, 2MT = TC. Como AM = MC, temos SM = MT e ST = AS = 2SM =TC. Nesta estratégia são apresentados elementos relacionados que não são internos ao valor inicial, mas estabelecem relações entre um novo elemento, a segunda diagonal BD e os triângulos da nova mediana, levando em conta as propriedades de Euclides para a resolução, ou seja, representa o estágio interfigural.

3.3 Estratégia de solução para o estágio transfigural

Na rede de paralelogramos na figura, a transformação homotética de centro D e razão 3 permite as seguintes correspondências: AS→WV, ST→ VX, TC→XY

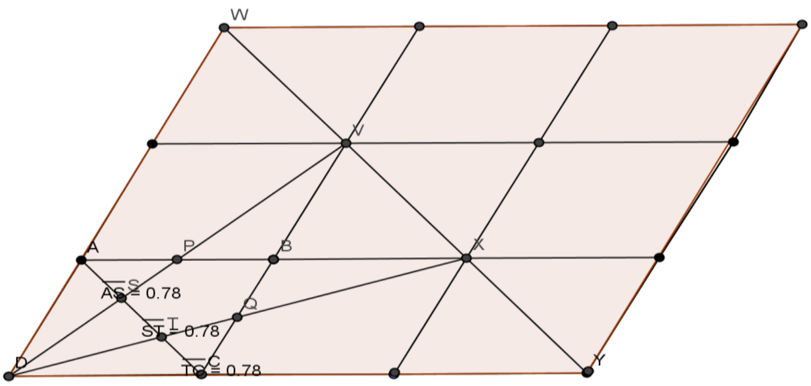

Figura 10: Adaptação e Construção nossa no GeoGebra. Fonte: Barroso e Martel (2007)

Uma vez que WV, VX e XY são diagonais de paralelogramos de mesmo tamanho, originando AS, ST e TC, devem manter-se com a mesma medida. Como podemos observar, desta vez a estratégia de solução é caracterizada pela preeminência da estrutura das transformações homotéticas.
Verificamos geometricamente que o problema é resolvido com uma estratégia do estágio transfigural.
Neste problema geométrico pode-se aplicar uma dupla perspectiva, caracterizada em três figuras geométricas, e fazendo uma generalização de outras duas figuras.

No nosso trabalho, estamos analisando estes estágios junto aos alunos do Ensino Médio através de uma sequência de atividades na construção das isometrias com o software livre GeoGebra.

4. Metodologia *Design Experiment*

Na década de 1990 houve um movimento para desenvolver uma nova metodologia a fim de realizar estudos de intervenções educativas, e esta metodologia recebeu o nome de *Design Experiment.*

Brown (1992) foi pioneira no desenvolvimento desta metodologia utilizando como se fosse uma engenharia de aprendizagem para investigar e analisar as comunidades escolares como comunidades de aprendizagem.

Colins *et al* (2004) dizem que o seu projeto de pesquisa foi desenvolvido para resolver várias questões centrais para o estudo da aprendizagem, incluindo:

> a) A necessidade de abordar questões teóricas sobre a natureza da aprendizagem num contexto;
> b) A necessidade de abordagens para o estudo dos fenômenos de aprendizagem no mundo real, no lugar do laboratório;
> c) A necessidade de ir mais além das estreitas aprendizagens;
> d) A necessidade de obter resultados da pesquisa da avaliação formativa. (COLLINS *ET AL*, 2004, p. 3, tradução nossa).

Os participantes que se envolverão neste que podemos chamar de "projeto de experiências no ensino", para o termo D*esign Experiment*, deverão ser o pesquisador, o professor e o aluno na sala de aula.

Observamos que no *Design Experiment* o professor também é o pesquisador. Na figura 11, ilustramos os aspectos críticos da pesquisa feita por Brown (1992) numa sala de aula da época.

Assim como é impossível mudar de aspecto no sistema sem criar transtornos em outros, também é difícil estudar qualquer aspecto, independente do sistema operacional inteiro. Na figura 11, apresentamos o sistema proposto por Brown (1992):

Figura 11: As características Complexas do Delineamento Experimental. Fonte: BROWN, 1992, p.142 – (Tradução nossa)

Segundo Steffe e Thompson (2000) a finalidade principal da experiência ao utilizar esta metodologia de ensino é fazer com que o investigador realize uma experiência, diretamente com alunos aprendendo matemática e desenvolvendo raciocínio.

Sem as experiências oferecidas pelo ensino, não haveria nenhuma base para chegar a entender a matemática, a construção de conceitos feitos pelos alunos e operações ou mesmo para suspeitar que tais conceitos e operações possam ser muito diferentes dos conceitos dos investigadores.

Na aplicação da sequência de atividades estão relacionadas às diferentes variáveis internas e externas.

Para avaliar as diferentes variáveis, é necessário o uso de uma variedade de técnicas de avaliação, incluindo pré-testes e pós-testes padronizados, vistoria e técnicas de entrevista, bem como uma sistemática de pontuação das observações da sala de aula.

É uma questão artística determinar quais são os aspectos da situação de ensino que podem afetar o sucesso do projeto.

5. APLICAÇÃO DAS ATIVIDADES E ANÁLISE DOS RESULTADOS

Foram necessários quatro encontros para realizar esta pesquisa, vale registrar que planejamos inicialmente três encontros, mas foi preciso remodelar após o primeiro encontro quando se fez necessário alterar o local e o equipamento, mudando assim o ambiente de aprendizagem.

5.1. Primeiro Encontro

Para o primeiro encontro foi programada a apresentação do vídeo "Simetrias", havia telas mostrando um esboço da história do povo Cokwe e também a realização de duas atividades: uma de construção e outra de aplicação utilizando o GeoGebra.

A metodologia "*Design Experiment*" privilegia a reformulação para um aprimoramento da pesquisa e deste modo fizemos um ajuste na sequência de atividades.

Segundo o modelo de Brown (1992) tem-se a sala de aula, o professor-pesquisador, o estudante e a tecnologia, tudo isto integra o ambiente de aprendizagem, tornando-se um fator importante para um ambiente de aprendizagem significativo.

Fizemos uso de *pen-drives* com os arquivos do GeoGebra instalados, para que não houvesse a necessidade de instalação nos *notebooks.*

Iniciamos com apresentação da pesquisa dizendo quantos encontros e a forma como seria apresentada cada etapa dos encontros e entregamos o material para os alunos.

Os alunos participantes da pesquisa eram alunos do 3º ano do Ensino Médio os quais se propuseram a participar como voluntários.

Os encontros ocorreram fora do horário normal de aula. Os alunos chegavam mais cedo, em horários pré-determinados, já que estudavam no período noturno.

Antes de projetar o vídeo *"Simetrias"*, perguntamos aos alunos se os mesmos já haviam tido contato com o objeto matemático simetria. Dois alunos não haviam aprendido e nem tinham conhecimento algum sobre simetria, e os outros dois disseram que tiveram contato no cursinho pré-vestibular que freqüentavam, mas num enfoque físico, como rotação e translação da terra, mas nenhum deles possuía um conhecimento geométrico destas simetrias, rotação, reflexão e translação.

As técnicas de construção dos desenhos Sona foram as que mais chamaram a atenção dos alunos, e um comentou que apesar dos Cokwes marcarem uma malha pontilhada antes da realização dos desenhos, eles não constroem estes desenhos passando o dedo por cima dos pontos, mas sim em volta dos pontos, sem tocá-los.

Mesmo sendo uma atividade inicial, percebemos, nos registros, que os alunos, apesar de não terem estudado o objeto matemático simetrias, conseguiram identificar as características principais internas da figura, isto nos indica que estão no estágio intrafigural.

Neste encontro não foi esperado que os alunos se enquadrassem nos estágios interfigural e transfigural devido ao fato de permitir somente a observação sem manipulação, pois ainda não havia sido construído o conceito de rotação, reflexão e translação. Estas atividades de construção e aplicação ficaram planejadas para os encontros seguintes.

5.2. Segundo Encontro

No segundo encontro exploramos com o GeoGebra a primeira e a segunda atividade.

Inicialmente apresentamos as funcionalidades dos ícones, apresentando as suas ferramentas para que os alunos se familiarizassem com o *software*. Por exemplo, no ícone *"Ponto"*, mostramos que há ferramentas de *"Novo Ponto"*, *"Ponto de Intersecção"* e *"Ponto Médio"*, e assim por diante.

Foi necessário introduzir o uso do mouse para realizar as atividades dos próximos encontros devido ao fato de percebermos que os alunos perderam muito tempo na realização das atividades anteriores, pois estavam usando os *notebooks* pela primeira vez.

Resolvido o problema da limitação no manuseio do equipamento, fizemos segundo Brown (1992) o refinamento da qualidade do ambiente para aplicação da sequência de atividades.

Partimos então para a utilização das ferramentas do software a fim de realizar o desenvolvimento da primeira atividade, que chamamos de atividade de construção, em que os alunos seguiram passo a passo um roteiro para construir uma figura que se assemelha a uma roda de bicicleta com raios.

Inicialmente os alunos construíram um ponto A, em seguida um ponto B e realizaram rotações de A em torno do ponto B gerando um ponto A'.Continuaram, fazendo uma nova rotação de A' em torno de B gerando o ponto A", e assim por diante até completar oito rotações.

Foi solicitado que, após as rotações, construíssem os segmentos dos pontos gerados pela rotação até o ponto central, que era o ponto B e medissem todos os segmentos. Para tornar a figura robusta solicitamos que utilizassem a ferramenta ponto de intersecção para unir os pontos e a circunferência.

Notamos também que os alunos se encontravam no estágio intrafigural ao realizar esta atividade, pois identificaram a não alteração das propriedades internas da figura, ao movimentar o ponto A, e entenderam que os raios aumentavam igualmente, mas os ângulos permaneciam inalterados mantendo a isometria.

Quanto à pergunta: Em que sentido as rotações eram feitas, apenas a aluna Karlene respondeu incorretamente, pois disse que eram construídas no sentido horário, entretanto todas foram realizadas no sentido anti-horário.

Os alunos identificaram sem problemas a medida dos ângulos centrais que eram de 45°, porém nesse caso nenhum deles percebeu que se uma circunferência tem uma volta de 360°, ao dividi-la em oito partes iguais, naturalmente obteríamos 45° graus.

Concluímos então que os alunos continuaram apenas no estágio intrafigural, pois perceberam somente as relações internas da figura.

Eles fizeram somente uma relação entre os pontos e os segmentos (raios) que dividem a figura circunferência em oito partes iguais. Poderiam ainda relacionar a circunferência e os segmentos construídos anteriormente, que se tornaram seus raios, caso o fizessem teriam passado ao estágio interfigural, ou seja, inter-relacionando as figuras.

Por isso observamos que, dos quatro alunos, dois deles não conseguiram perceber que os segmentos, após a construção da circunferência, se tornaram raios desta circunferência.

Na segunda atividade, qual chamamos de atividade de aplicação, os alunos abriram a figura 16 chamada de Barco e foram desafiados a construir a partir desta, a figura 17, como segue abaixo:

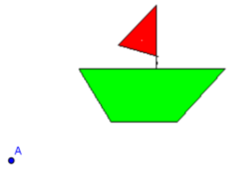

Figura 16: Barco

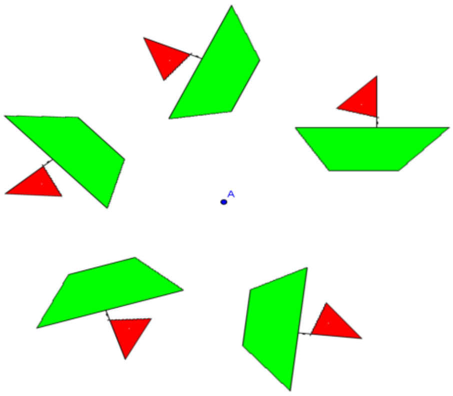

Figura 17: Barco Rotacionado

Nesta atividade tínhamos dois objetivos, verificar se os alunos conseguiam construir a figura 17 e identificar o estágio interfigural, pois notamos que além das rotações após a construção da figura 17, era razoável identificar também as reflexões invertidas, porém isto não aconteceu ao analisarmos as respostas.

Todos conseguiram identificar os ângulos utilizados para construir a figura 17 a partir da figura 16, mas o interessante foi a dupla Jair e Karlene que registrou a construção nesta ordem: a rotação dos ângulos 45°, 60º, 90° e 120°. Já a dupla Julia e Tadeu percebeu que ao dividir 360° por cinco, porque é o número de barcos que contém na figura 64, obtinham 72° então aplicou a rotação por este ângulo para compor a figura 16. Mesmo ao realizar as rotações de 45°, 60°, 90° e 120°, a dupla Jair e Karlene, assim como Julia e Tadeu, identificou os valores que compunham as rotações do barco da figura 64, mas ficaram no estágio intrafigural.

Podemos afirmar que houve erro por parte simplista da primeira dupla em dividir 360º por 5, construíram a figura com o mesmo número de barcos porém em posições diferentes da figura solicitada, não se atentaram para a posição.

5.3. Terceiro Encontro

Começamos este encontro sem a presença do aluno Jair por ter de trabalhar como ajudante de pedreiro. Portanto, continuamos com os outros três que compõem a pesquisa. Eles ficaram divididos em Julia e Karlene numa dupla e o aluno Tadeu sozinho em outro computador.

As atividades deste encontro estão relacionadas à reflexão em relação a um ponto, uma reta e também com as translações por um vetor.

O objetivo foi alcançado quando os alunos conseguiram perceber que as propriedades das figuras originais não se alteram.

Então podemos dizer que os alunos se encontravam, nesta fase do trabalho no estágio de desenvolvimento psicogenético chamado de intrafigural.

Nas reflexões e translações registradas nos protocolos, tanto escritos como nos salvos no GeoGebra, os alunos responderam que as medidas de distância entre os triângulos e bandeirinhas não se alteraram, portanto relacionaram os objetos aos segmentos que mantêm a mesma distância.

Ao movimentarem a figura original, perceberam que a distância permanecia inalterada e isso nos remeteu a identificar que os alunos estão no estágio interfigural.

Perguntamos aos alunos se conseguiam identificar outra simetria além das pedidas nas atividades. Tadeu identificou a translação invertida e Karlene e Julia identificaram a rotação, mesmo que timidamente nas suas justificativas. Porém pudemos identificar o raciocínio desenvolvido como transfigural, ou seja, os alunos atingiram um nível avançado em relação aos demais.

As propriedades das isometrias de reflexão e rotação foram assimiladas pelos alunos quando responderam corretamente sobre o que acontece ao verificar a relação entre os pontos, os triângulos e as bandeirinhas com relação a outro objeto qualquer, seja uma reta, um ponto ou um vértice.

Constatamos que os alunos conseguiram identificar as simetrias propostas de forma dinâmica.

5.4. Quarto Encontro

Neste quarto encontro as atividades foram voltadas à aplicação das transformações isométricas já apreendidas, e para isso utilizamos a figura Sona chamada *"aranha no meio da sua teia"*, em que uma parte da figura estava gravada no pen drive, desafiando os alunos a construí-la totalmente a partir desta única parte.

Após realizar a reconstrução solicitamos que identificassem quais isometrias foram necessárias para fazer a atividade e quais outras podem ser identificadas, além das transformações já utilizadas para responder as atividades.

Apesar de serem apenas duas atividades, os alunos não possuíam um roteiro para construção e análise, outrossim gostaríamos que os alunos elaborassem a suas próprias estratégias para resolver o problema e respondessem as perguntas relacionadas a cada atividade.

Os alunos resolveram esta atividade com a utilização da ferramenta "Reflexão em Relação a uma Reta" do GeoGebra, utilizando apenas a reflexão para compor a figura desejada.

Quando perguntados se percebiam outra transformação isométrica, todos responderam que, além da reflexão, podiam perceber a rotação.

Nesta atividade verificamos que mesmo movimentando a figura, os alunos se encontram nos estágios intra e interfigural, pois além de realizarem a construção sem dificuldades, conseguiram identificar outra isometria: a rotação.

Observamos também que os alunos não conseguiram identificar outra isometria que seria a translação invertida. Também não conseguiram sair do paradigma das rotações e reflexões, por isto não atingiram assim o estágio transfigural.

Neste encontro havia mais uma atividade, a nove, a qual consistia em produzir com a construção de um arco a figura *"aranha no meio da sua teia"* já reconstituída na atividade oito. Porém lembramos aos alunos que deveriam construir a figura 02 só com ferramentas do GeoGebra.

Para nossa surpresa, ao analisar os protocolos de construção que foram salvos, percebemos que uma dupla realizou duas tentativas. Tadeu e Julia construíram pela primeira vez utilizando reflexão e rotação e na segunda tentativa fizeram somente com rotação.

A dupla Jair e Karlene fez a sua construção somente com rotação e reflexão. Aqui devemos registrar que tiveram um pouco de dificuldade quando estavam utilizando o

GeoGebra, pois ao fazer a rotação apagavam, o indicador do ângulo (º) e, portanto, conseguiam digitar os ângulos corretamente, mas não faziam a rotação desejada Poe este motivo. Então foi necessária a intervenção do professor-pesquisador para corrigir este erro de aplicação.

Em relação aos estágios de desenvolvimento psicogenéticos, podemos notar que os alunos se encontravam nos estágios intrafigural e interfigural, mas não conseguimos identificar o estágio transfigural.

As atividades precisaram ser deslocadas no decorrer da aplicação devido ao ambiente e aos novos equipamentos que foram introduzidos, porque foi possível utilizar os equipamentos do laboratório de informática.

Nesse quarto encontro pudemos verificar que a nossa questão de pesquisa foi respondida a contento, porque percebemos que a motivação etnomatemática com a utilização do GeoGebra atingiu as contribuições necessárias, pois todas as questões foram respondidas corretamente, os alunos perceberam as simetrias existentes nas atividades e conseguiram trabalhar com o *software* sem problemas, exceto por falta do mouse no primeiro encontro, dificuldade que foi sanada.

Entretanto, concluímos que os alunos não atingiram na sua maioria o estágio transfigural, exceto com algumas deduções bem próximas, como as de Tadeu que na quinta atividade conseguiu identificar a translação invertida. Tadeu foi o único que conseguiu transpor os estágios intra e interfigural, neste caso atingindo o estágio transfigural.

Neste trabalho o objetivo principal foi de elaborar uma sequência de atividades que gerasse um produto de pesquisa sobre as transformações isométricas com a utilização do software GeoGebra com a motivação da Etnomatemática da Geometria Sona.

Para o desenvolvimento e a elaboração da pesquisa foi utilizada a metodologia *Design Experiment* proposta por Brown (1992) com nove atividades aplicadas em quatro encontros.

Nos encontros foram entregues para cada dupla um *pen-drive* contendo arquivos no formato ggb (extensão dos arquivos do software GeoGebra) e um roteiro para a realização das atividades.

Estas atividades foram divididas em dois grupos: o primeiro é das *"atividades de construção"* e o segundo das *"atividades de aplicação"*.

Registramos que não deixamos isso claro para os alunos e, colocamos as atividades em ordem numérica sem dividi-las em blocos. Dividimos por transformação: atividades de rotação, reflexão e translação.

Por exemplo: Para introduzirmos o conceito de rotação utilizamos na primeira atividade comandos do roteiro onde os alunos construíram na prática a uma roda com aros. Queríamos saber se os alunos identificavam os raios, os ângulos internos da circunferência.

Na segunda fizemos com que os alunos aplicassem o conceito que construíram num na primeira quando receberam o arquivo do GeoGebra e aplicaram a rotação para reconstruir a figura apresentada.

A cada encontro fomos refinando e alterando as atividades junto com os quatro alunos.

Notamos que os alunos apesar de nunca terem utilizado o software GeoGebra conseguiram realizar todas as tarefas.

Analisamos as atividades encontro por encontro relacionando as respostas com os estágios psicogenéticos de Piaget e Garcia (1983) para determinar em quais estágios se encontravam os alunos.

Para este trabalho foram analisadas várias dissertações que tratavam do assunto Transformações Geométricas, e notamos que algumas utilizaram o recurso computacional para desenvolver suas atividades. Destas poucas utilizaram software livre, e constatamos uma predominância de aproximadamente 84% do uso do Cabri. Este foi um dos motivos pelo qual escolhemos o software GeoGebra, outro foi a possibilidade de analisar os registros através dos protocolos, que o próprio software disponibiliza, mostrando passo a passo como os alunos realizaram suas atividades.

Neste trabalho procuramos responder a seguinte questão de pesquisa: **A Geometria Sona do povo Cokwe e o software GeoGebra são agentes motivadores que podem contribuir para a aprendizagem das transformações isométricas?**

Após análises das atividades nos encontros, no decorrer do trabalho, concluímos que o software GeoGebra junto com a Geometria Sona contribuíram como agentes motivadores para produzir uma aprendizagem significativa e contextualizada das transformações isométricas.

Identificamos também que os alunos se encontravam na sua maioria os estágios intrafigural e o interfigural, percebendo as propriedades internas das figuras e relacionando algumas propriedades de mais de uma figura.

Registramos que apenas um aluno participante da pesquisa se encontrava no estágio transfigural de desenvolvimento psicogenético em geometria numa única atividade.

Concluímos com esta pesquisa que a sequência de atividades formulada pôde trazer uma experiência de aprendizagem que além de motivar, através dos desenhos dos especialistas Cokwes com a utilização do software GeoGebra, permitiu gerar um produto para as novas pesquisas sobre transformações isométricas.

Além de apontar nossas conclusões também levantamos algumas questões:

a) A escola pública está preparada para a aprendizagem da matemática com apoio da tecnologia?
b) Os professores estão preparados para utilizar a tecnologia na aprendizagem da matemática em sala de aula?

c) Como incluir digitalmente todos os alunos da escola pública para facilitar a aprendizagem da matemática?
d) Computadores nos laboratórios das escolas garantem a aprendizagem da matemática aos alunos da rede pública?

Muitas outras questões têm de ser feitas, como não é nosso objeto de pesquisa e sim trazer uma experiência prática que possa contribuir para a aprendizagem da matemática com apoio do recurso computacional, deixamos algumas indicações.

Como o professor também foi o pesquisador ficou fácil de notar que a estrutura de laboratório montada na escola estadual, onde foi feita a pesquisa, não favorece a aprendizagem de objetos matemáticos pela tecnologia dos computadores, já que o programa Acessa Escola foi elaborado apenas para pesquisa em internet, com restrição de 30 minutos por dia não podendo ser instalados softwares nas máquinas.

O laboratório também serve como depósito de alimentos não tendo pleno acesso dos alunos a sala de informática do próprio programa Acessa Escola. E durante os finais de semana o laboratório se mantém fechado.

O laboratório não funciona durante a noite porque o responsável pela sala tem horário até as 19 horas não favorecendo os alunos do noturno.

Em resumo a escola estadual local da pesquisa possui um excelente laboratório de informática, mas não é acessível para os alunos por não ser utilizado da maneira correta e o programa Acessa Escola é uma enganação, já que nenhum aluno durante três anos fez um acesso pelo mesmo.

REFERÊNCIAS

Barroso, Ricardo e Martel, José. Caracterización geométrica del desarrollo de la tríade piagetiana, 2007.
Disponível em <http://personal.us.es/rbarroso/Pruebas/04Barroso.pdf.> Acesso: 18/06/2010.

Brown, Ann. *Design Experiment*s: Theoretical and Methodological Challenges in Creating Complex Interventions in Classroom Settings - THE JOURNAL OF THE LEARNING SCIENCES, 2(2), 141-178, 1992.

Collins et al. Design Research: Theoretical and Methodological Issues. Journal of the Learning Sciences. Evanston, p. 13-42, 2004.

D'Ambrosio, Ubiratan. Etnomatemática – elo entre as tradições e a modernidade. Belo Horizonte. Autêntica, 2001.

Eglash, Ron. African Fractals: modern computing and indigenious design. United State of America. Rutgers University Press - 2ª edição, 2002.

Etnomatemática - Edição Especial n° 11. Scientif American Brasil. ISSN 1678-5229, 2005.

Gerdes, Paulo. Geometria Sona de Angola: Matemática duma Tradição Africana. Projecto de Investigação Etnomatemática, Universidade Pedagógica, Maputo, 2008.

Pavanello, Regina Maria. O Abandono do Ensino de Geometria: Uma Visão Histórica. Dissertação de Mestrado. UNICAMP, Campinas-SP, 1989.

Piaget, Jean, Garcia, Roland. Psicogénese e História da Ciência- Coleção Ciência Nova, No. 6, Flammarion, Lisboa, Portugal, 1983.

Steffe, L. P., & Thompson, P. W.. Teaching experiment methodology: Underlying principles and essential elements. In R. Lesh & A. E. Kelly (Eds.), *Research design in mathematics and science education* (pp. 267- 307). Hillsdale, NJ: Erlbaum, 2000.