

PONENCIA

DE LO SIMBÓLICO A LO GRÁFICO. EFECTOS DE LA TECNOLOGÍA EN LA EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Pedro Gómez y Cristina Carulla

“una empresa docente”, Universidad de los Andes, Bogotá
pgomez@uniandes.edu.co

Nos hemos quejado de la enseñanza tradicional de las matemáticas porque induce un aprendizaje procedimental y simbólico. La tecnología se veía como una posible solución, particularmente por el énfasis que puede darle a la representación gráfica. No obstante, aparece otro riesgo: un aprendizaje centrado exclusivamente en la representación gráfica que no se puede conectar con los aspectos simbólicos y numéricos del aprendizaje. Presentamos dos ejemplos de situaciones de enseñanza y aprendizaje en que se hace patente este problema. Lo ideal es una enseñanza que promueva un aprendizaje equilibrado en las relaciones entre todos los sistemas de representación.

INTRODUCCIÓN

La enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas escolares tradicionales se ha caracterizado por un gran énfasis en el manejo procedimental de los aspectos simbólicos de los objetos matemáticos. Se ha argumentado repetidamente que los estudiantes construyen un conocimiento matemático extremadamente parcial (Gómez,1996) constituido principalmente por algoritmos que les permiten transformar unas expresiones simbólicas en otras. Las diferentes propuestas para la mejora de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas (e.g., NCTM, 1991) han insistido en que este tipo de aprendizaje debe evolucionar. Se espera que el estudiante construya un conocimiento matemático en el que se logre un mayor equilibrio e interacción entre los diferentes sistemas de representación (Kaput,1992), se obtenga un manejo estructural de los objetos matemáticos (logrando verlos como objetos sobre los que se pueden efectuar otros procedimientos; e.g., Sfard,1991) y se desarrolle la capacidad para resolver problemas prácticos que se encuentren expresados en lenguaje no matemático (Schoenfeld,1992).

La tecnología (calculadoras y programas de computador) se ha visto como una de las posibles soluciones a este problema (Dreyfus,1994; Fey,1989). La posibilidad de interactuar dinámicamente con los objetos matemáticos en diversos sistemas de representación debería permitirle a los estudiantes construir un conocimiento matemático más cercano a lo que se desea (Gómez,1997). Aunque los resultados que hasta ahora se han obtenido como consecuencia de la utilización de la tecnología en la educación matemática no son concluyentes, la mayoría de los estudios muestran

efectos positivos que van en la dirección correcta (Dunham y Dick, 1994; Balacheff y Kaput, 1996; Ruthven,1996).

En este artículo queremos resaltar un posible problema de las aplicaciones aparentemente exitosas de la tecnología a la educación matemática. Se trata de una nueva forma de construir el conocimiento matemático por parte de los estudiantes que participan en estas experiencias. En cambio de aproximarse a los objetos matemáticos desde un punto de vista exclusivamente simbólico, los estudiantes tienden ahora a restringirse a la representación gráfica de esos objetos. Aunque este tipo de comprensión de las matemáticas tiene sus ventajas, también tiene sus desventajas. Los estudiantes “ven” los objetos matemáticos exclusivamente a partir de sus características gráficas. Al olvidar el aspecto simbólico y al conectarlo con la representación gráfica de manera parcial, la capacidad de los estudiantes para resolver problemas se reduce. No se logra un equilibrio entre los dos sistemas de representación. Aparentemente, el énfasis en salir de lo simbólico e ir hacia lo gráfico ha llevado la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas a un nuevo extremo. En este artículo analizamos este tipo de problema con motivo de un proyecto de innovación curricular en preálculo que involucró las calculadoras gráficas. Presentamos dos casos de estudios en los que se aprecia este problema del énfasis en lo gráfico en detrimento del manejo simbólico y resaltamos las deficiencias que resultan en la capacidad de los estudiantes para resolver problemas.

El artículo presenta una visión general de las matemáticas escolares tradicionales y de las metas de la educación matemática con respecto a la comprensión de los estudiantes. En seguida, discute algunas de las características de la utilización de la tecnología en la educación matemática, con especial énfasis en el manejo de los sistemas de representación. Se presenta una discusión sobre la conexión entre los sistemas de representación gráfico y simbólico y su relación con la utilización de la tecnología. A continuación se presentan dos ejemplos de situaciones en las que la comprensión centrada en el sistema de representación gráfico implica deficiencias en la capacidad de los estudiantes para resolver problemas. Finalmente, se desarrolla una discusión y se proponen algunas conclusiones.

MATEMÁTICAS ESCOLARES TRADICIONALES¹

Un estudiante puede tener diferentes “niveles” de comprensión de las matemáticas, en general, y de un concepto, en particular. Sin embargo, hay dos extremos. En el primer extremo, la comprensión del estudiante es esencialmente procedimental y simbólica. “Saber matemáticas” significa para el estudiante conocer un número suficiente de procedimientos (algoritmos) que le permitan transformar una expresión simbólica en una sucesión de otras expresiones, de tal forma que la última expresión de la lista tenga la forma que él reconoce como válida para proponer una respuesta. El estudiante debe ser capaz de reconocer qué algoritmos le corresponden a qué

¹. La mayor parte de lo que se presenta en esta sección y la siguiente fue tomado de (Gómez,1996).

situaciones, debe conocer una forma válida del algoritmo y debe ser capaz de aplicar el algoritmo de manera correcta. Esta forma de ver y de trabajar en matemáticas es muy común —la mayoría de los estudiantes que entran a la Universidad de los Andes la tienen (Gómez,1995) y las evaluaciones que se han hecho en las escuelas colombianas así lo demuestran (MEN, 1992)—y es producto, al menos parcialmente, de una tradición de las matemáticas escolares de la cual el estudiante no es el único partícipe (Gregg,1995). Esta visión de las matemáticas escolares no solamente se refiere al tipo de comprensión que tiene el estudiante, sino también al tipo de visión que el estudiante, el profesor y la institución tienen acerca de lo que son las matemáticas, de lo que significa aprender y comprender matemáticas y de lo que para ellos debe ser la enseñanza de las mismas (Valero et al., 1997; Perry et al., 1997). Para ellos, las matemáticas son principalmente un gran conjunto de expresiones simbólicas (fórmulas); saber matemáticas es conocer los algoritmos que permiten transformar estas expresiones en otras; y quien enseña bien matemáticas es aquel profesor que es más claro en presentar los algoritmos, en lograr que los estudiantes los retengan y en evaluar “justamente” este conocimiento (poniendo en las evaluaciones ejercicios que “mantengan la forma” —sean equivalentes desde el punto de vista del algoritmo— de los ejemplos y ejercicios que se han hecho en clase). La construcción de la tradición de las matemáticas escolares tiene múltiples fuentes. Sin embargo, esta situación es común y permanente porque enseñar y aprender matemáticas de esta forma es lo más cómodo para todo el mundo: para el estudiante, para el profesor y para la institución (Kilpatrick,1995).

¿Qué ventajas tiene esta forma de ver las matemáticas, de enseñarlas y de aprenderlas? Tiene muchas ventajas, aparentemente, a los ojos del estudiante, del profesor y de la institución. Adicionalmente, desde el punto de vista del diseño curricular, y particularmente desde el punto de vista de la innovación curricular, esta manera de hacer las cosas tiene una ventaja muy grande (Gómez,1996). Las desventajas son muchas. Basta ver las consecuencias de esta situación en la formación del bachiller (Fernández,1995). No solamente lo único que él sabe son las formas simbólicas y los procedimientos para manejarlas, sino que en muchos casos se las sabe mal. Pero lo más importante es que cuando la comprensión que un estudiante tiene de las matemáticas es de este tipo, entonces hay muy poca retención y muy poca transferencia: el estudiante olvida lo que aprendió a los dos días del examen y no es capaz de transferir su conocimiento matemático a entornos y situaciones diferentes de aquellos en los que lo aprendió (Resnick y Ford, 1990). Por otra parte, la visión del contenido como una secuencia de temas y el consiguiente aprendizaje secuencial de expresiones simbólicas y algoritmos genera en el estudiante una visión por compartimientos de un conocimiento matemático que no tiene esta característica.

Pero, tal vez, el principal defecto de este tipo conocimiento es que es producto de una comprensión extremadamente parcial de los conceptos y los procedimientos matemáticos. Los objetos alrededor de los cuales gira el discurso matemático que nosotros hacemos, ya sea como matemáticos o como profesores de matemáticas, no existen para el estudiante. Para el estudiante existe un único tipo de objeto matemático: la expresión simbólica. Si las expresiones simbólicas son los únicos

objetos matemáticos que ve el estudiante, entonces el “discurso matemático” se reduce al manejo y transformación de estas formas simbólicas. El estudiante actúa y razona sobre expresiones simbólicas y no sobre objetos matemáticos. Su “realidad matemática” es esencialmente una realidad sintáctica cuyo significado no puede ir más allá de aquel que las expresiones simbólicas tienen como sistema de signos que siguen un conjunto de reglas. Cuando el profesor o el libro de texto se refieren a características de objetos matemáticos o a relaciones entre ellos y estas características o relaciones no pueden ser asignadas directamente a propiedades de las expresiones simbólicas, el estudiante no “entiende” estas afirmaciones, no las puede justificar y las acepta y registra pasivamente como consecuencia de su respeto por la autoridad indiscutible del libro de texto y del profesor. No es posible hablar de verdad o validez más allá de la calidad con que se identifican y se utilizan expresiones simbólicas dentro de un proceso de transformación de las mismas. Pero, para el estudiante, las matemáticas no “hablan” sobre nada y él llega a tener solamente un tipo muy parcial de comunicación matemática. El aprendizaje de las matemáticas se convierte en una actividad individual en la que la interacción y comunicación con los demás (compañeros y profesor) no es necesaria ni importante.

VISIÓN ALTERNATIVA

El otro extremo de la comprensión en matemáticas es uno en el que los objetos matemáticos existen para el estudiante (Cobb,1993). Estos objetos matemáticos se encuentran representados en un conjunto interrelacionado de estructuras mentales. Estas estructuras están compuestas por nodos intensamente conectados de tal forma que un mismo concepto puede ser evocado desde diversos tipos de representación— no sólo la representación simbólica (Hiebert y Carpenter, 1992; Kaput,1992)— y con diferentes niveles en su estatus operacional–estructural (Sfard,1991; Douady,1995). De esta forma, el concepto no sólo evoca procedimientos, sino que este conjunto de procedimientos y el concepto en sí mismo se pueden ver como una globalidad que puede relacionarse con otros conceptos y procedimientos matemáticos. Cuando el estudiante “ve” los objetos matemáticos (en el sentido de que hay una multiplicidad de representaciones dentro de una estructura, que pueden ser evocadas por una situación problemática que involucra el concepto), entonces el estudiante puede construir un “discurso matemático”: puede hablar —y sabe que puede hablar— acerca de estos objetos. El estudiante es consciente de la existencia de una “realidad matemática” que es independiente de la autoridad del profesor y del libro de texto. El formalismo del lenguaje matemático deja de ser un fin y se convierte en un medio. Las expresiones simbólicas se perciben como uno de los múltiples sistemas de representación con los que él puede referirse a esta realidad matemática y el conjunto de reglas sintácticas que lo rigen es visto como una consecuencia de las propiedades de los objetos matemáticos que conforman esta realidad. El estudiante tiene entonces una “sensación del símbolo” (Arcavi,1994). Cuando el estudiante ve las matemáticas de esta manera, él puede escribir ensayos en el mismo sentido en el que lo haría un matemático y esta actividad se convierte en parte central de su visión de las

matemáticas como discurso acerca de unos objetos, sus características y sus relaciones que debe ser compartido, discutido y validado con los demás (Kilpatrick,1995; Sterrett,1992). Y cuando él ve los objetos matemáticos en este sentido, hay mayor probabilidad de que los recuerde con el transcurso del tiempo y de que pueda transferir ese conocimiento a entornos diferentes de aquellos en los que lo construyó. Desde esta perspectiva, “saber más” matemáticas no significa necesariamente haber “visto” más temas o ser capaz de resolver mecánicamente más tipos de ejercicios. Saber más matemáticas significa tener nuevas formas de conocimiento, más complejas en su estructura, que le permiten al estudiante ver el conocimiento matemático con mayor amplitud y que, además de darle la oportunidad de aprender más y mejor, le permiten utilizar el conocimiento adquirido de maneras más potentes (Mayer,1986).

En el caso de un problema como resolver la desigualdad $u + 21 < x^2 - 1$, el estudiante reconoce una relación entre dos objetos (funciones) e interpreta el problema con respecto a estos objetos. El problema puede ser visto desde diversos sistemas de representación y su solución no se restringe al manejo sintáctico de una expresión simbólica (Gómez,1994). Como el estudiante puede “ver” los objetos matemáticos, entonces hay mayor posibilidad de que él pueda modelar un fenómeno real con base en estos objetos matemáticos y, por tanto, hay mayor posibilidad de que él sea capaz de comprender y resolver problemas que involucran ese fenómeno (Chazan,1993).

TECNOLOGÍA Y EDUCACIÓN MATEMÁTICA²

Aunque la tecnología³ no es la solución a los problemas de la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, hay indicios de que ella se convertirá paulatinamente en un agente catalizador del proceso de cambio en la educación matemática. Gracias a la posibilidad que ofrece de manejar dinámicamente los objetos matemáticos en múltiples sistemas de representación dentro de esquemas interactivos, la tecnología abre espacios para que el estudiante pueda vivir nuevas experiencias matemáticas (difíciles de lograr en medios tradicionales como el lápiz y el papel) en las que él puede manipular directamente los objetos matemáticos dentro de un ambiente de exploración (Cornu y Ralston, 1992; Tall,1994). Estas experiencias matemáticas serán fructíferas siempre que se tenga en cuenta la complejidad del contenido matemático a enseñar, la complejidad de los procesos cognitivos involucrados en el aprendizaje de las matemáticas y el papel fundamental que deben jugar los

². La mayor parte de lo que se presenta en esta sección fue tomado de (Gómez,1997).

³. Utilizamos el término *tecnología* para designar todas aquellas herramientas (computadores, programas de computador, calculadoras) que utilizan los últimos adelantos computacionales para aportar al proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.

diseñadores de currículo y los profesores en el diseño e implantación de situaciones didácticas que, teniendo en cuenta las dificultades y las necesidades de los estudiantes, aprovechen la tecnología para crear espacios en los que el estudiante pueda construir un conocimiento matemático más amplio y más potente. El principal aporte de la tecnología consiste en que la interacción entre ella, el profesor y el estudiante está cambiando la visión que los actores tienen del contenido matemático y del proceso didáctico.

La tecnología puede jugar diferentes papeles en el proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Por una parte, la tecnología hace parte del medio de enseñanza puesto que es una parte del entorno que interviene en las interacciones con los sistemas simbólicos. Por esta razón, la tecnología puede apoyar la acción del agente didáctico (profesor) en el diseño de la situación que define el encuentro entre el estudiante y el medio. En este sentido, la tecnología puede jugar un papel tanto en el diseño de las situaciones que generan perturbaciones del sistema didáctico, como en la manera como estas perturbaciones afectan el sistema y son reconocidas por el mismo (Balacheff, 1996). Finalmente, la tecnología puede jugar un papel en el tipo de problemas que el sujeto puede afrontar, en la capacidad del sujeto para transformar unos problemas en otros, en los sistemas de representación utilizados por el sujeto y en los esquemas de validación que éste utiliza. De esta forma, se hace evidente que la evolución de las concepciones del sujeto puede depender de la presencia de la tecnología, como agente didáctico que influye en el funcionamiento del sistema.

Sistemas de representación

La utilización de la tecnología permite el manejo dinámico de múltiples sistemas de representación de los objetos matemáticos. Esta es una de sus características relevantes desde el punto de vista del aprendizaje de las matemáticas. Los sistemas de representación son un aspecto central de la comprensión del sujeto acerca de los objetos matemáticos y sus relaciones y de las actividades matemáticas que éste ejecuta cuando realiza tareas que tienen que ver con esos objetos (Janvier, 1987; Kaput, 1992). Las representaciones externas (actividades físicas del sujeto) permiten organizar la experiencia matemática que tiene lugar cuando se realiza una tarea. Las representaciones internas permiten tener un modelo de la forma como el sujeto organiza internamente la información. Desde el punto de vista de las actividades físicas del sujeto, un sistema de representación está compuesto por un conjunto de símbolos que se manipulan de acuerdo con reglas que permiten identificar o crear caracteres, operar en ellos y determinar relaciones entre ellos. Un mismo objeto matemático puede representarse en diferentes sistemas de representación. Por ejemplo, en el caso de las funciones, éstas pueden representarse en el sistema de representación simbólico ($y = x^2 - 4x + 3$), en el sistema de representación gráfico (ver figura 1) y en el sistema de representación tabular (ver figura 2), entre otros.

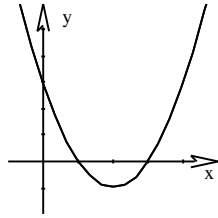


Fig. 1. Representación gráfica

x	y
-1	8
0	3
1	0
2	-1
3	0
4	3
5	8
6	15

Fig. 2. Representación tabular

La idea de sistema de representación permite caracterizar las actividades que realiza un sujeto cuando resuelve una tarea. Por un lado, se pueden hacer transformaciones sintácticas dentro de un mismo sistema de representación. En el caso del ejemplo anterior, la representación simbólica de la función puede transformarse en $y = (x - 1)(x - 3)$ y también en $y = (x - 2)^2 - 1$. De la misma forma, dentro del sistema de representación gráfico es posible hacer transformaciones sintácticas cuando, por ejemplo, se traslada la gráfica horizontal o verticalmente o cuando se varía la dilatación. El segundo tipo de actividad matemática es la traducción entre sistemas de representación. En este caso se pueden relacionar los efectos en la gráfica de la función de pasar de la expresión simbólica de base $y = x^2$ a la expresión $y = (x - 2)^2 - 1$ (en la que es posible identificar la localización del vértice) o a la expresión $y = (x - 1)(x - 3)$ (en la que se pueden ubicar las raíces). En tercer lugar, las situaciones reales (por ejemplo, el problema de la caída libre de un cuerpo) se modelan matemáticamente al expresar sus características fundamentales en un sistema de representación matemático (por ejemplo, expresando la situación como una relación entre dos variables —distancia y tiempo— de acuerdo con una expresión simbólica o gráfica). El cuarto tipo de actividad es la materialización de entidades específicas o relaciones en objetos conceptuales sobre los cuales es posible efectuar otras operaciones. En el caso de las funciones, por ejemplo, esta actividad le permite al sujeto pasar de ver la función como una “caja negra” que transforma unos números en otros a ver la función como un objeto que puede ser diferenciado o integrado. En el caso de la aritmética, esta actividad le permite al sujeto pasar de ver la adición como una operación que permite producir un número a partir de otros dos, a ver la adición como una operación con características propias como la conmutatividad y la asociatividad. Esta última actividad es de carácter diferente a las tres anteriores. Mientras que las tres primeras tienen que ver con la utilización de los sistemas de representación, la última se refiere a la manera como un manejo procedimental puede evolucionar y servir de base para la construcción de una visión conceptual de los objetos y las relaciones matemáticas. La comprensión del sujeto puede evolucionar a lo largo de dos ejes: un eje horizontal en el que se avanza en el manejo de los sistemas de representación de un concepto matemático y un eje vertical en el que se avanza en el proceso de materialización (de procedimental a conceptual) de este mismo concepto (Tall, 1994).

LO SIMBÓLICO Y LO GRÁFICO

Hemos visto cómo los objetos matemáticos se pueden representar en diversos sistemas de representación externa y cómo la comprensión en matemáticas depende de la evolución de las representaciones internas (Hiebert y Carpenter, 1992) y de la manera como la percepción de estos conceptos evoluciona desde una perspectiva operacional (procedimientos) a una perspectiva estructural (conceptos) (Sfard, 1991). La tecnología, como agente didáctico que organiza el encuentro entre el estudiante y el medio de tal forma que se generen perturbaciones del sistema, puede aportar de manera significativa en estos dos aspectos de la comprensión en matemáticas.

Por otra parte, del discurso anterior resalta la conjunción de tres elementos que aparecen repetitivamente:

- El énfasis en la tradición de las matemáticas escolares por el manejo exclusivamente simbólico de los objetos matemáticos
- La necesidad de que los estudiantes desarrollen un manejo de estos objetos matemáticos que tenga en cuenta la representación gráfica
- Las posibilidades que ofrece la tecnología para que esto se logre

En un proyecto desarrollado en la Universidad de los Andes en el área del precálculo se introdujo una innovación curricular que involucraba la tecnología (calculadoras gráficas) y que pretendía, entre otros objetivos, equilibrar el manejo de estos dos sistemas de representación. En este estudio se miró la utilización de las calculadoras gráficas en la enseñanza y el aprendizaje del precálculo, no solamente desde el punto de vista de sus efectos en aspectos particulares del currículo, sino también desde la perspectiva de la complejidad y la dinámica del sistema curricular en el que se introdujo, de tal manera que fue posible explorar la forma como sus elementos se relacionan y evolucionan en el tiempo. Utilizando un esquema cuasi-experimental en el que se recogió información de un grupo de estudiantes que siguió el currículo tradicional y de otros grupos que utilizaron la calculadora, se estudiaron múltiples aspectos curriculares de la innovación (Gómez et al., 1996). La utilización de la tecnología influyó en las visiones que la institución encargada del diseño curricular, la profesora y los alumnos tenían acerca de las matemáticas, de su enseñanza y de su aprendizaje (Carulla y Gómez, 1996). Este efecto en las visiones, junto con otros factores (como, por ejemplo, el cambio en la percepción de la autoridad por parte del estudiante) influyeron en el comportamiento de cada uno de los actores: la institución reformuló el diseño curricular y el tipo de actividades que propuso para ser realizadas como parte del proceso de enseñanza y aprendizaje (Gómez et al., 1996) y la profesora y los alumnos cambiaron su comportamiento y sus actitudes dentro del salón de clase (Valero y Gómez, 1996). Estos cambios en los comportamientos y los resultados de los mismos (i.e., nuevas actividades) influyeron en la forma como profesora y estudiantes interactuaron dentro del proceso de construcción del conocimiento matemático (Gómez y Rico, 1995) y los cambios en esta interacción

tuvieron consecuencias en el rendimiento (Gómez y Fernández, 1997), el aprendizaje (Mesa y Gómez, 1996) y las actitudes de los estudiantes (Gómez, 1995).

Sin embargo, estudios posteriores, en los que hemos profundizado en los efectos de la utilización de la tecnología en la comprensión de los estudiantes nos han permitido encontrar algunos resultados sorprendentes. En uno de estos estudios, exploramos la manera como los estudiantes, trabajando en grupos, utilizaban las calculadoras gráficas en la resolución de un problema sobre traslaciones y dilataciones de funciones radicales. En otro estudio, exploramos algunos aspectos de la comprensión de los estudiantes sobre las funciones cúbicas. En los dos estudios encontramos que los estudiantes tienden a trabajar de manera casi exclusiva en el sistema de representación gráfico y que esta manera de aproximarse a los objetos matemáticos y a los problemas que los involucran restringe sus capacidad para resolverlos.

TRANSFORMACIONES DE FUNCIONES RADICALES

En este estudio (Carulla y Gómez, 1997) nos interesamos en mirar qué rol puede jugar la calculadora gráfica en la aparición de perturbaciones (identificadas como situaciones en las que se encuentran diferencias entre lo que los estudiantes esperaban encontrar y lo que encontraron en la resolución del problema) y la manera como su utilización puede promover la consolidación de conocimiento previo o la construcción de nuevo conocimiento con el propósito de resolver la diferencia. Se grabó en video una actividad de resolución de problemas de una hora que involucraba el análisis de transformaciones de funciones en los sistemas de representación gráfico y simbólico. Esta actividad fue realizada durante una hora por tres estudiantes. Se transcribió la interacción entre los estudiantes y se identificó una situación donde aparecía una perturbación. Encontramos que, mientras salen de la situación de perturbación, los estudiantes pueden utilizar la calculadora gráfica para consolidar conocimientos previos o parciales. El rol de autoridad dado por los estudiantes a la información presentada por la calculadora, su manera deficiente de usar esta información, y la manera restringida como ellos leen e interpretan las gráficas (consecuencia de las enseñanzas previas sin calculadora), pueden inducir a los estudiantes a no utilizar correctamente la información, llevándolos a ignorar una situación alternativa en donde un nuevo conocimiento puede ser construido. Igualmente, encontramos que las calculadoras gráficas pueden inducir a los estudiantes a trabajar a menudo en el sistema de representación gráfico creando una negligencia hacia la utilización de los sistemas de representación numérico y simbólico.

En una primera tarea, los estudiantes debían dibujar las funciones $f(x) = (x-2)(x+3)(x-1)$ y $f(x) = -\sqrt[3]{x}$ y sus transformaciones correspondientes y analizar para las diferentes transformaciones los cortes con el eje X y el eje Y. En el caso de la segunda función, los estudiantes, al dibujarla en la calculadora gráfica y hallar el corte de la función con el eje Y, cometieron un error de lectura. En cambio de leer y

= 1.73, leyeron $y = 2$. Aunque, al resolver el problema con la primera función, confirmaron que el corte de $y = 2f(x)$ con el eje Y es el doble que el corte de $y = f(x)$ con el eje Y, cuando dibujaron la gráfica de $f(x) = 2 - 3^{-x}$, encontraron que ésta cortaba el eje Y en 3.46. Este resultado era claramente contradictorio con lo que ellos esperaban (el doble del corte hallado en la calculadora para $y = f(x)$, que era 2). Los estudiantes entraron en un estado de desequilibrio con esta perturbación. La calculadora les estaba dando un resultado (3.46) que era diferente del resultado que ellos esperaban (4). Dada la autoridad que ellos le daban a la información propuesta por la calculadora, la lectura deficiente del primer resultado nunca se puso en duda. Pero, *en cambio de mirar el problema desde otro punto de vista —el simbólico— que habría resuelto el problema, ellos buscaron una solución ad hoc a la contradicción, arguyendo que esto era el resultado de características particulares de la función radical.*

Nuestra interpretación de esta situación se resume en la gráfica siguiente.

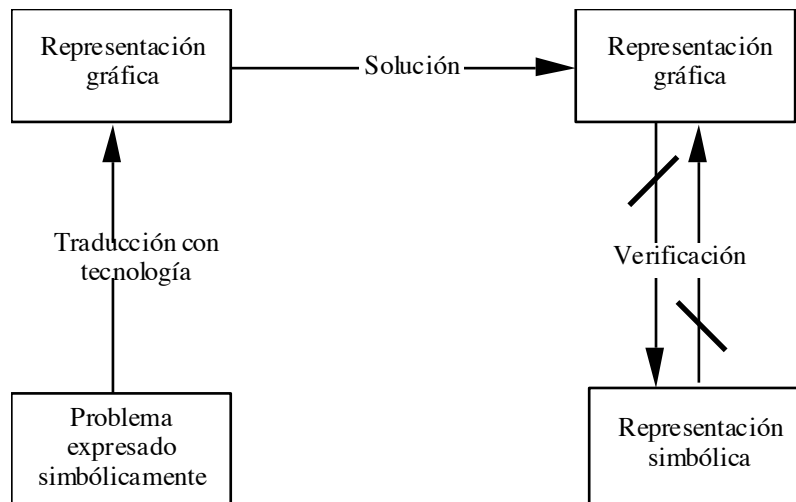


Fig. 3. El juego entre lo simbólico y lo gráfico

Un problema expresado simbólicamente es inmediatamente traducido por los estudiantes a la representación gráfica, con la ayuda de la tecnología. El problema se soluciona en el sistema de representación gráfica. Cuando surge una perturbación (consecuencia de una utilización deficiente de la tecnología), los estudiantes *no* buscan resolver la perturbación en el sistema de representación simbólico; permanecen en el sistema de representación gráfica y resuelven la contradicción con un argumento *ad hoc* que indica deficiencias en su conocimiento acerca de la función involucrada.

COMPRESIÓN DE LAS FUNCIONES CÚBICAS

Encontramos resultados similares en un estudio que realizamos sobre la comprensión de los estudiantes acerca de algunos aspectos particulares de la función cúbica (Carulla y Gómez, 1998). El estudio se centró en la actuación de varios grupos de estudiantes al enfrentar problemas que involucran gráficas de funciones cúbicas. Nuestro propósito era el de describir algunas características de las gráficas que los estudiantes hacían como respuesta a los problemas y el de explorar, con base en esas descripciones, algunas de las características de la comprensión de los estudiantes con relación al concepto de función cúbica. El estudio se realizó en dos fases. En la primera fase se construyó una categorización de algunas de las características de las gráficas producidas por los estudiantes y se formularon conjeturas acerca de las posibles concepciones que producían estas características. En la segunda fase, con un grupo diferente de estudiantes, pero con los mismos problemas, se comprobó la persistencia de estas características. Para asegurarnos de la existencia de las dificultades identificadas, presentamos a los estudiantes una solución del problema, diseñada por nosotros, y que incluía todos los errores producto de estos obstáculos epistemológicos. Les pedimos que corrigieran esta solución y que comentaran una serie de afirmaciones que reafirmaban la concepción errada que habíamos identificado. Encontramos que una proporción importante de los estudiantes tienen esta concepción parcial de la función cúbica en la que se percibe el dominio de la función como un subconjunto propio de los números reales.

Uno de los problemas que se propuso a los estudiantes era el siguiente:

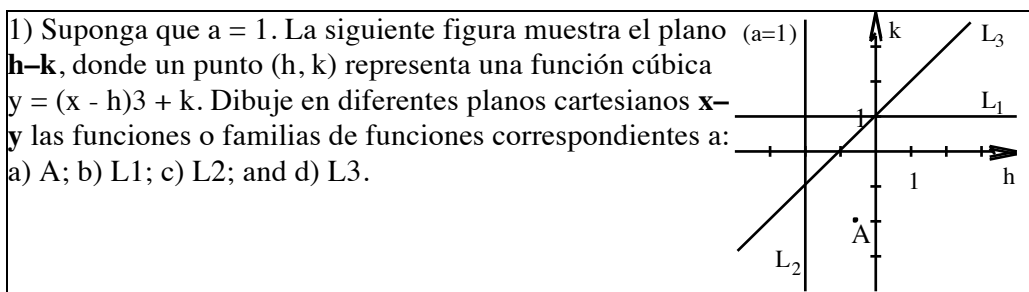
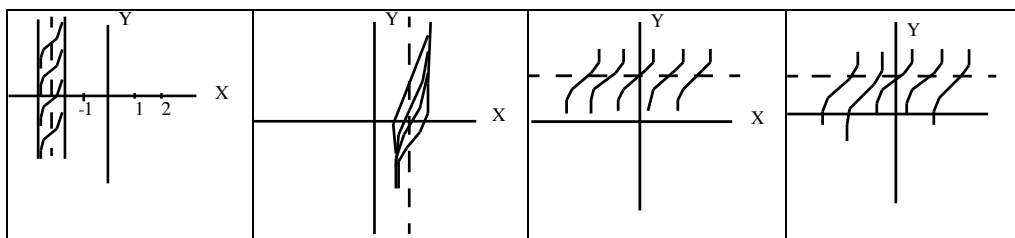


Fig. 4. Problema propuesto

Algunas de las gráficas que produjeron los estudiantes eran de los siguientes tipos:



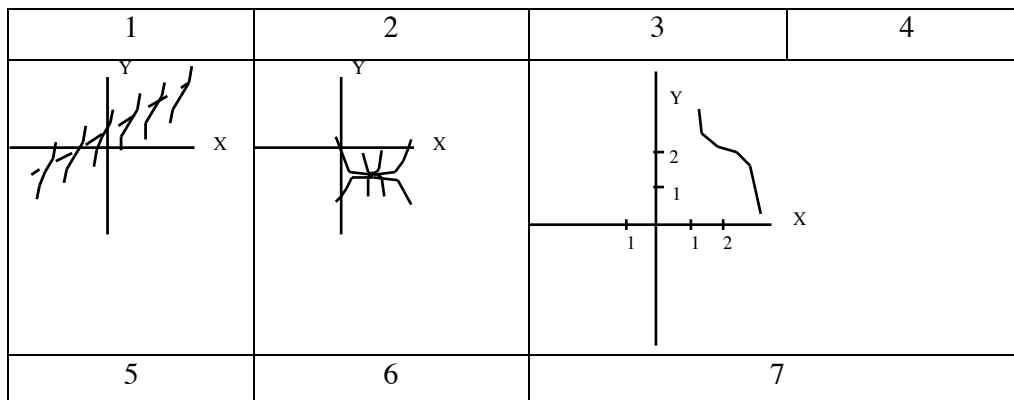


Fig. 5. Tipos de gráficas producidas por los estudiantes

En estas gráficas se aprecia una clara tendencia a dibujar las funciones cúbicas (para las que se puede completar el cubo) como si estas funciones tuvieran un dominio restringido, no pudieran cortar el eje Y, cuando se encuentran suficientemente alejadas de él y a tener un par de asíntotas verticales. Esta concepción de la función cúbica se comprobó cuando los estudiantes corrigieron la solución que nosotros les propusimos del problema (y que contenía estos errores) y les pedimos que comentaran afirmaciones al respecto que concordaban con la descripción que acabamos de hacer.

Una de las principales conclusiones que sacamos de estos resultados es que la percepción que los estudiantes tienen de la función cúbica es esencialmente gráfica. Ellos “ven” la función cúbica como un objeto gráfico al que le corresponde una descripción simbólica. Sin embargo, la identificación de las características de la función proviene exclusivamente de su representación gráfica y, los problemas de la utilización de la tecnología, como la problemática de los representantes (Schwarz y Dreyfus, 1995), y las características propias del objeto matemático, los llevan a construir concepciones erradas del concepto. Sin embargo, resulta evidente que si se mira el objeto desde el punto de vista simbólico, no es posible cometer estos errores. El análisis simbólico de la función cúbica implica de manera evidente que su dominio son los números reales y que no es posible que tengan asíntotas verticales. Sin embargo, no encontramos este tipo de argumento en la corrección a la solución propuesta, ni en los comentarios a las afirmaciones o en las entrevistas informales que realizamos. Esto nos hace pensar que la situación descrita en la figura 3 es persistente y puede verse como una característica de la forma como los estudiantes construyen su conocimiento matemático cuando la tecnología está presente.

DISCUSIÓN

Los resultados de los estudios que acabamos de presentar nos hacen pensar que, cuando la tecnología está presente en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, es posible que los estudiantes desarrollen “formas” alternativas de

construir su conocimiento matemático. Estas concepciones tienden a centrarse en una visión exclusivamente gráfica de los objetos matemáticos, dejando a un lado el análisis simbólico de los mismos. Las gráficas tienden a convertirse también en una forma simbólica en el sentido de que la representación gráfica es también un sistema de notación con sus propias reglas y lo que el estudiante busca saber de las gráficas se circunscribe al manejo operacional de las mismas. Esta forma de concebir los objetos matemáticos implica una visión parcial de los mismos que trae como consecuencia la aparición de obstáculos epistemológicos inexistentes en el pasado (Sierpinska,1992) que pueden dificultar el progreso en la construcción de un conocimiento matemático apropiado.

Consideramos que esta es una consecuencia natural de los esfuerzos que se han hecho en los últimos años para mejorar la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. Se ha pasado de un aprendizaje esencialmente simbólico y procedimental a un aprendizaje en el que los estudiantes logran identificar los objetos matemáticos, pero exclusivamente desde el punto de vista gráfico. No tenemos dudas que la tecnología juega un papel central en esta nueva forma de aprender. Las calculadoras gráficas y los programas de computador le permiten al estudiante producir rápidamente y sin esfuerzo las gráficas de los objetos matemáticos, proceso que era extremadamente dispendioso e inexacto en el pasado. De manera natural ellos tienden a permanecer en este sistema de representación y buscan resolver los problemas con base en las características de los objetos matemáticos que pueden apreciar allí. Sin embargo, la representación gráfica permite observar solamente una parte de las características de los objetos matemáticos. Los estudiantes, al no tener en cuenta los sistemas de representación simbólico y numérico, se pierden de una parte de la visión global del objeto matemático.

Pero consideramos que la tecnología no es la única responsable de este problema. Los nuevos diseños curriculares, al intentar aprovechar “al máximo” las potencialidades de la tecnología, y los profesores, al tratar de adaptarse a esta nueva situación pueden estar olvidando a la representación simbólica y promoviendo una visión parcial de la comprensión en matemáticas. Tenemos entonces un nuevo problema: ¿Cómo recobrar la importancia de la representación simbólica en la comprensión de las matemáticas y lograr un equilibrio apropiado en el manejo de los diversos sistemas de representación cuando la tecnología está presente? Este es un problema tanto para los investigadores, como para los diseñadores de currículo y los diseñadores de soluciones tecnológicas en la educación matemática.

REFERENCIAS

- Arcavi, A. (1994). Symbol sense: Informal sense-making in formal mathematics. *For the Learning of Mathematics*. 14 (3), pp. 24-35.
- Balacheff, N. (1996). Conception, propriété du système sujet / milieu. *Documento no publicado*. Grenoble: Laboratoire Leibniz.

- Balacheff, N., Kaput, J.J. (1996). Computer-based learning environments in mathematics. En Bishop, A.J., Clements, K., Keitel, C., Kilpatrick, J., Laborde, C. (Eds.) *International handbook of mathematics education*. Dordrecht: Kluwer, pp. 469-501.
- Carulla, C., Gómez, P. (1996). Graphic calculators and precalculus. Effects on curriculum design. En Puig, L., Gutiérrez, A. (Eds.). *Proceedings of the 20th PME Conference*. Valencia: Universidad de Valencia, pp. 1-161.
- Carulla, C., Gómez, P. (1997). Graphic calculators and problem solving. Do they help?. En Pehkonen, E. (Ed.). *Proceedings of the PME 21 Conference*. Lahti: University of Helsinki, p. 1.224.
- Carulla, C., Gómez, P. (1998). Students' understanding of cubic functions. *Paper submitted to the PME 22 Conference*. Stellenbosch: University of Stellenbosch.
- Chazan, D. (1993). $F(X) = G(X)$?: An approach to modeling with Algebra. *For the Learning of Mathematics*. 13 (3), pp. 22-26.
- Cobb, P. (1993). Characteristics of Classroom Mathematics Traditions: An Interactional Analysis. *American Educational Research Journal*. 29(3), pp. 573-604.
- Cornu, B., Ralston, A. (1992). The influence of computers and informatics on mathematics and its teaching. Paris: UNESCO.
- Douady, R. (1995). La ingeniería didáctica y la evolución de su relación con el conocimiento. En Artigue, M., Douady, R., Moreno, L., Gómez, P. (Eds.). *Ingeniería didáctica en educación matemática. Un esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas*. México: una empresa docente y Grupo Editorial Iberoamérica, pp. 61-96.
- Dreyfus, T. (1994). The role of cognitive tools in mathematics education. En Biehler, R., et al. (Eds.) *Didactics of Mathematics as a Scientific Discipline*. Dordrecht: Kluwer, pp. 201-211.
- Dunham, P., Dick, T. (1994). Research on graphing calculators. *The Mathematics Teacher*. 87 (6), pp. 440-445.
- Fernández, F. (1995). Perfil de aprendizaje del estudiante de precálculo de la Universidad de los Andes. *Revista EMA*. 1 (1), pp. 39-45.
- Fey, J.T. (1989). Technology and mathematics education: A survey of new developments and important problems. *Educational Studies in Mathematics*. 20, pp. 237-272.
- Gómez, P. (1994). El método simbólico en las expresiones lineales con valor absoluto. ¿Por qué? ¿Para qué? *Boletín del Club EMA*. 7, pp. 2-3.
- Gómez, P. (1995). Calculadoras gráficas y precálculo. Efectos en las actitudes de los estudiantes. *Documento no publicado*. Bogotá: un empresa docente.

- Gómez, P. (1996). Riesgos de la innovación curricular en matemáticas. *Revista EMA*. 1 (2), pp. 97-114.
- Gómez, P. (1997). Tecnología y educación matemática. *Informática Educativa*. 10 (1), pp. 93-111.
- Gómez, P., Carulla, C., Gómez, C., Mesa, V.M., Valero, P. (1996). Calculadoras gráficas y precálculo. En Barón, G., Mariño, O., Escobar, H. (Eds.) *Memorias del III Congreso Iberoamericano de Informática Educativa*. Cali: SENA.
- Gómez, P., Fernández, F. (1997). Graphics calculators use in Precalculus and achievement in Calculus. En Pehkonen, E. (Ed.) *Proceedings of the 21th PME Conference*. Lahti: University of Helsinki, pp. 3.1-3.8.
- Gómez, P., Mesa, V.M., Carulla, C., Gómez, C., Valero, P. (1996). *Situaciones problemáticas de precálculo. El estudio de funciones a través de la exploración con calculadoras gráficas*. México: una empresa docente y Grupo Editorial Iberoamérica.
- Gómez, P., Rico, L. (1995). Social interaction and mathematical discourse in the classroom. En Meira, L., Carraher, D. (Eds.). *Proceedings of the 19th PME Conference*. Recife: Universidade Federal de Pernambuco, pp. I-205.
- Gregg, J. (1995). The tensions and contradictions of the school mathematics tradition. *Journal for Research in Mathematics Education*. 26 (5), pp. 442-466.
- Hiebert, J., Carpenter, T.P. (1992). Learning and teaching with understanding. En Grouws, D.A. (Ed.) *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*. New York: Macmillan, pp. 65-97.
- Janvier, C. (1987). *Problems of Representation in the Teaching and Learning of Mathematics*. Hillsdale: Lawrence Erlbaum Associates.
- Kaput, J.J. (1992). Technology and Mathematics Education. En Grouws, D.A. (Ed.). *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*. New York: Macmillan, pp. 515-556.
- Kilpatrick, J. (1995). Curriculum change locally and globally. *Paper presented at the IX meeting of the CIAEM (Chile)*.
- Kilpatrick, J. (1995). Técnicas de evaluación para profesores de matemáticas de secundaria. En Kilpatrick, J., Rico, L., Gómez, P. (Eds.). *Educación matemática. Errores y dificultades de los estudiantes. Resolución de problemas. Evaluación. Historia*. México: una empresa docente y Grupo Editorial Iberoamérica, pp. 109-130.
- Mayer, R. (1986). Capacidad matemática. En Sternberg, R.J. (Ed.). *Las capacidades humanas. Un enfoque desde el procesamiento de la información*. Madrid: Labor Universitaria, pp. 165-194.

- MEN (1992). *Sistema Nacional de Evaluación de la Calidad de la Educación*. Bogotá: MEN.
- Mesa, V.M., Gómez, P. (1996). Graphing calculators and Precalculus: an exploration of some aspects of students' understanding. En Puig, L., Gutiérrez, A. (Eds.). *Proceedings of the 20th PME Conference*. Valencia: Universidad de Valencia, pp. 3.391-3.399.
- NCTM (1991). *Estándares curriculares y de evaluación para la educación matemática*. Reston: NCTM.
- Perry, P., Castro, M., Valero, P., Gómez, P., Agudelo, C. (1997). A look at teacher's professional knowledge through the design of class activities. En Pehkonen, E. (Ed.). *Proceedings of the PME 21 Conference*. Lahti: University of Helsinki, p. 1.257.
- Resnick, L.B., Ford, W.W. (1990). *La enseñanza de las matemáticas y sus fundamentos psicológicos*. Barcelona: M.E.C. - Paidós.
- Ruthven, K. (1996). Calculators in the mathematics curriculum: the scope of personal computational technology. En Bishop, A.J., Clements, K., Keitel, C., Kilpatrick, J., Laborde, C. (Eds.) *International handbook of mathematics education*. Dordrecht: Kluwer, pp. 435-468.
- Schoenfeld, A.H. (1992). Learning to Think Mathematically: Problem Solving, Metacognition, and Sense Making in Mathematics. En Grouws, D.A. (Ed.) *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*. New York: Macmillan, pp. 334-369.
- Schwarz, B., Dreyfus, T. (1995). New actions upon old objects: A new ontological perspective on functions. *Educational Studies in Mathematics*. 29 (3), pp. 259-291.
- Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics*. 22, pp. 1-36.
- Sierpinska, A. (1992). On understanding the notion of function. En Dubinsky, E., Harel, G. (Eds.). *The concept of function. Aspects of epistemology and pedagogy (Notes, Volume 25)*. Washington: Mathematical Association of America, pp. 25-58.
- Sterrett, A. (1992). *Using writing to teach mathematics*. Washington: The Mathematical Association of America.
- Tall, D. (1994). Computer environments for the learning of mathematics. En Biehler, R., et al. (Eds.) *Didactics of mathematics as a scientific discipline*. Dordrecht: Kluwer, pp. 189-199.

- Valero, P., Gómez, C. (1996). Precalculus and Graphic Calculators: The Influence on Teachers Beliefs. En Puig, L., Gutiérrez, A. (Eds.). *Proceedings of the 20th PME Conference*. Valencia: Universidad de Valencia, pp. 4.363-4.370.
- Valero, P., Perry, P., Gómez, P. (1997). The teaching of mathematics from within the school. A Colombian Experience. En Zack, V., Mousley, J., Breen, C. (Eds.). *Developing practice: Teachers inquiry and educational change*. Geelong: Centre for Studies in Mathematics, Science and Environmental Education, pp. 113-122.