Simetrias nas Cercaduras das Fachadas de Azulejos de Aveiro usando o GeoGebra

Symmetries in the Fencing of the Mosaic Facades of Aveiro using GeoGebra

LURDES CARLOS[1]

ANA BREDA [2]

Resumo

Com este trabalho pretende-se classificar os motivos existentes nas cercaduras[3] dos azulejos que revestem fachadas de Aveiro, estabelecendo uma ligação entre este Património e a Matemática. As atividades a desenvolver com os alunos requerem um trabalho prévio de recolha fotográfica, que se pode estender a qualquer parte do país, e que pode envolver uma visita de estudo, saída de campo ou trabalho de casa, sendo solicitado que cada aluno fotografe uma cercadura. Neste trabalho seguimos duas vertentes: criar com o GeoGebra, exemplares dos 7 frisos[4] a partir de um elemento recolhido num motivo dos azulejos ou procurar as simetrias existentes nas cercaduras fotagrafadas utilizando o GeoGebra e proceder à sua classificação.
Palavras-chave*: GeoGebra; Simetrias, Frisos.*

Abstract

This study has as a goal the classification of frieze patterns on tiles covering facades of Aveiro, establishing a link between this heritage and mathematics.The activities with the students require a previous work of photogathering, which can be extended to any region of Portugal, and may involve a field trip or a homework in which each student select and photograph a house facade.Within this context we have in mind the creation, using GeoGebra, of examples of the seven frieze patterns starting from a collapsed element in one of the tiles or the search of the symmetries in beadings also with the aid of GeoGebra proceeding to their classification.
Keywords*: GeoGebra; Symmetries, Friezes.*

Introdução

Este trabalho resulta da dissertação do Mestrado em Matemática para Professores realizado na Universidade de Aveiro. A escolha do GeoGebra no apoio à criação e classificação das simetrias existentes nos motivos dos azulejos das fachadas de Aveiro revelou-se uma ferramenta essencial na criação dos diferentes tipos de frisos a partir de um pequeno elemento extraído de um azulejo e na procura das simetrias, nos azulejos

[1] Agrupamento de Escolas de Fafe, Fafe - m.lurdes.carlos@gmail.com

[2] Departamento de Matemática Universidade de Aveiro - ambreda@ua.pt

[3] Fiada de azulejos que contornam uma área delimitada pelos elementos da arquitetura (muito comuns em fachadas até à primeira metade do século XX).

[4] Figura geométrica do plano que admite como simetrias um grupo de isometrias que fixam uma reta, designada por centro do friso. Só existem sete tipos de frisos.

com motivos mais complicados. Com este trabalho não se pretende criar animações para serem utilizadas pelos alunos mas sim que sejam os alunos a criar os seus frisos e a descobrir as simetrias existentes nas cercaduras. Esperamos contribuir, em particular, para a sensibilização dos estudantes na preservação deste revestimento de fachadas e apresentar-lhes outro ponto de vista relativamente a este material.

Para a criação dos sete tipos de frisos foi usada uma fotografia de um azulejo pertencente a uma cercadura à qual se extraiu um elemento, neste caso um *ramo* tal como ilustrado na figura 1.

Figura 1: Azulejo e elemento usado na construção dos diferentes frisos

Com o *ramo* escolhido procedeu-se então à construção dos 7 frisos com o GeoGebra. Foi usada a versão 4.4 (GeoGebra) e os conceitos necessários seguem orientações do Programa de Matemática do Ensino Básico (Bivar, Grosso, Oliveira, & Timóteo, 2013), as constantes na Brochura de Geometria disponibilizada pelo Ministério da Educação (Breda, Serrazina, Menezes, Sousa, & Oliveira, 2011) e o Programa de Matemática para os cursos profissionais de nível secundário (Direcção-Geral de Formação Vocacional, 2004/05).

1. Os 7 grupos de Frisos

Um friso é uma figura geométrica do plano que admite como simetrias um conjunto de isometrias (translação, reflexão de eixo r, rotação e reflexão deslizante) que fixam uma reta - centro do friso. As translações com uma única direção fazem parte deste grupo de isometrias constituindo assim um subgrupo cíclico infinito.

Só existem 7 tipos de frisos que designaremos por quatro letras justapostas[5]: $pxyz$

- a primeira letra é sempre p;
- x=m, se o grupo de simetrias contém uma reflexão de eixo perpendicular ao centro do friso, e x=**1**, nos restantes casos;
- $y = m$, se o grupo de simetrias contém uma reflexão de eixo no centro do friso, $y = g$, se o grupo de simetrias do friso contém uma reflexão deslizante mas não contém nenhuma reflexão de eixo no centro do friso, e $y = 11$nos restantes casos;
- $z = 22$ se o grupo de simetrias do friso contém uma rotação de ordem 2 (amplitude 180º), e $z = 11$ nos restantes casos.

2. Azulejo: um breve apontamento

Apesar de não ser uma criação portuguesa, o azulejo adquire em Portugal um lugar de grande relevo, sendo presença constante em revestimentos interiores ou exteriores de edifícios e verificando-se uma permanente evolução e diversificação ao longo de cinco séculos[6]. Esta importância da azulejaria portuguesa é reconhecida mundialmente verificando-se uma procura turística a este nível que tem ecos na imprensa internacional, como por exemplo, o *The New York Times*, que elegeu os azulejos portugueses como um dos doze tesouros da Europa.

A escolha dos motivos dos azulejos deve-se sobretudo à abundância deste património em todo o país, não só em imóveis classificadas tais como igrejas e museus, mas sobretudo nas mais variadas fachadas de casas e prédios. Todos os exemplares usados neste estudo pertencem a fachadas de Aveiro.

3. Construção dos 7 tipos de frisos a partir de um elemento recolhido num azulejo

Com esta atividade pretende-se levar os alunos a construir os 7 tipos de frisos a partir do motivo escolhido num azulejo. Previamente os alunos devem tomar conhecimento das

[5] Nomenclatura usada de acordo com a Brochura de Geometria (Breda, Serrazina, Menezes, Sousa, & Oliveira, 2011))

[6] Não pretendemos neste trabalho abordar a azulejaria do ponto de vista histórico, no entanto, sugerimos a título de exemplo a leitura dos livros:, (dos Simões & de Oliveira, 1997) (dos Santos Simões, 1997), (Veloso, Almasqué, & Milheiro, 2000) e (Sarrico, 2009).

características de cada grupo de frisos.

Os alunos deverão perceber quais as isometrias necessárias à construção de cada friso e proceder à sua elaboração definindo o centro do friso, translações, centros de rotação e eixos de reflexão perpendiculares ao centro do friso.

A construção pode ser iniciada pelo friso que só admite simetrias de translação no seu conjunto de isometrias e sequencialmente introduzir as restantes isometrias: reflexão de eixo no centro do friso, que designaremos por h; reflexão de eixo perpendicular ao centro do friso, que designaremos por p; rotação com centro pertencente ao centro do friso e reflexão deslizante. A atividade ficará concluída com a construção dos dois frisos que admitem como simetrias quatro das isometrias.

3.1. p111 – Simetrias de translação

Construir um friso gerado por translações de módulo mínimo $\vec{u}$, com a direção do centro do friso. Os alunos deverão escolher o centro do friso, assim como o comprimento do vetor, podendo explorar diferentes direções e vetores após a conclusão da construção.

Figura 2: Friso do tipo p111

3.2. p112 – Simetrias de translação e de rotação de ordem 2

Construir um friso gerado por translações de módulo mínimo $2\overline{O_1 O_2}$ e pela rotação de centro O_1 e amplitude $180°$, em que O_1 e O_2 são centros de rotação consecutivos pertencentes ao centro do friso. O friso pode ser todo construído com rotações sucessivas a partir da figura original e os alunos deverão explorar a sua construção.

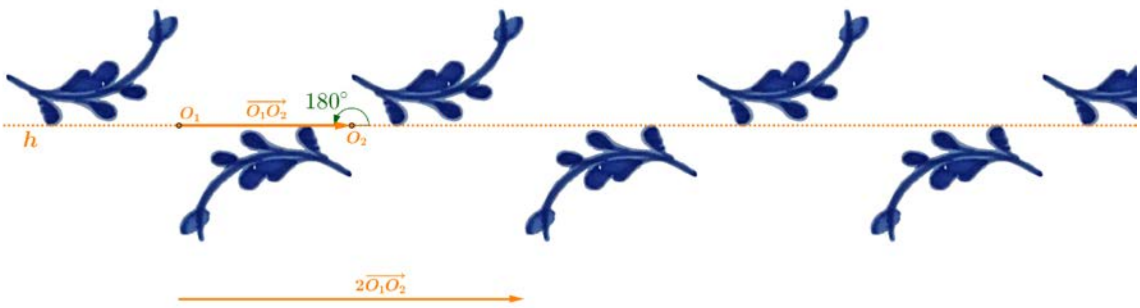

Figura 3: Friso do tipo p112

3.3. p1g1 – Simetrias de translação e de reflexão deslizante

Construir um friso gerado por translações de módulo mínimo 2 $\vec{u}$ e por reflexões deslizantes de eixo no centro do friso e segundo $\vec{u}$. Na construção deste friso o GeoGebra assume um papel fundamental na perceção da simetria de reflexão deslizante.

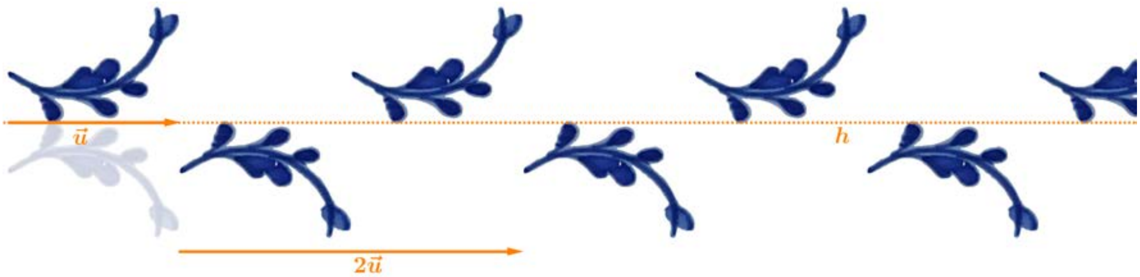

Figura 4: Friso do tipo p1g1

3.4. pm11 – Simetrias de translação e de reflexão de eixo perpendicular ao centro do friso

Construir um friso gerado por translações de módulo mínimo $\vec{u}$ e por reflexões de eixo perpendicular ao centro do friso. O friso pode ser construído a partir da figura principal e de dois eixos de simetria de reflexão perpendiculares ao centro do friso, obtendo os sucessivos eixos de simetria também por simetrias de reflexão a partir dos eixos definidos inicialmente.

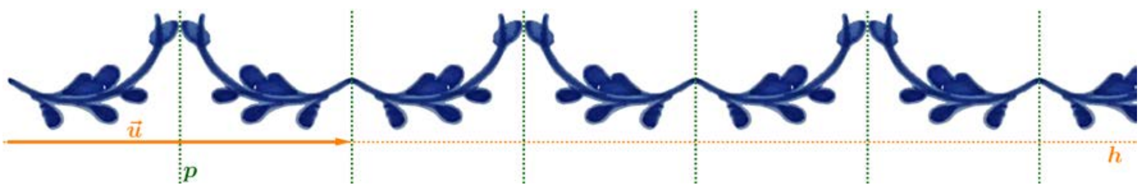

Figura 5: Friso do tipo pm11

3.5. p1m1 – Simetrias de translação e de reflexão de eixo no centro do friso

Construir um friso gerado por translações de módulo mínimo $\vec{u}$ e por reflexões de eixo no centro do friso. O friso pode ser obtido só por translações, a partir da figura inicial e da sua imagem pela simetria de reflexão de eixo no centro do friso, ou por simetria de reflexão de eixo no centro do friso, do friso do tipo $p111$ obtido em 3.1.

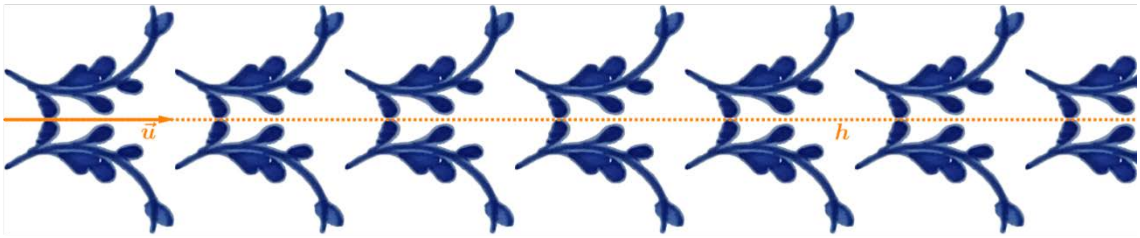

Figura 6: Friso do tipo p1m1

3.6. pmg2 – Simetrias de translação, de reflexão de eixo perpendicular ao centro do friso e de reflexão deslizante

Construir um friso gerado por translações de módulo mínimo $2\,\overline{V_1V_2}$, com V_1 e V_2 pontos da interseção do centro do friso com dois eixos consecutivos perpendiculares a este e pela rotação de centro M, ponto médio de $\overline{V_1V_2}$ e amplitude $180°$, em que O_1 e O_2 são centros de rotação consecutivos pertencentes ao centro do friso. Deste tipo de friso também fazem parte as simetrias de reflexão deslizante de eixo no centro do friso e vetor $\overrightarrow{V_1V_2}$. Neste caso podem ser exploradas diferentes sequências para a construção do friso, como por exemplo, a partir da figura inicial e da sua imagem pela rotação de centro O e pelas sucessivas imagens destas figuras pelas simetrias de reflexão de eixos perpendiculares ao centro do friso. A escolha do ponto O e do primeiro eixo de reflexão perpendicular ao centro do friso influenciará toda a construção.

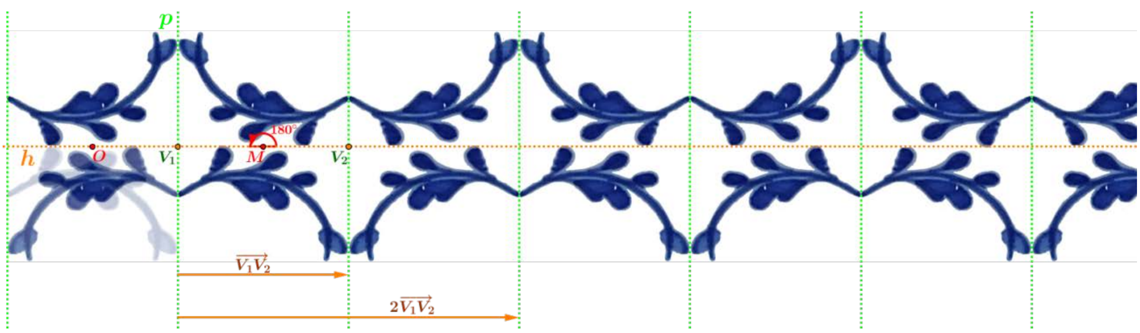

Figura 7: Friso do tipo pmg2

3.7. pmm2 – Simetrias de translação, de reflexão no centro do friso e de reflexão de eixo perpendicular ao centro do friso

Construir um friso gerado por translações de módulo mínimo $\vec{u}$ com a direção do centro do friso e pelas simetrias de reflexão no centro do friso e de eixos perpendiculares a este. Deste tipo de friso também fazem parte as simetrias de rotação de centros na interseção dos eixos de reflexão. Tal como na construção do friso anterior também aqui se podem explorar diferentes formas de obter este friso.

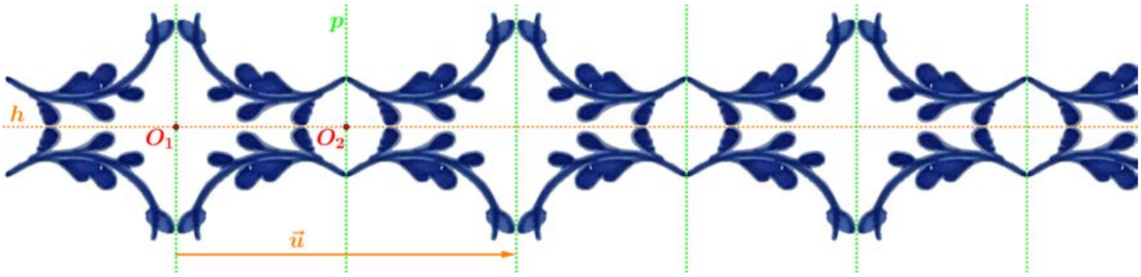

Figura 8: Friso do tipo pmm2

4. À procura dos 7 tipos de frisos nas cercaduras dos azulejos de Aveiro

Nesta atividade são usadas fotografias obtidas nas cercaduras dos azulejos das fachadas existentes em Aveiro e, neste caso, o objetivo é facultar cada uma das imagens numa aplicação do Geogebra e identificar os elementos necessários à classificação de cada um dos frisos. Na exploração de cada cercadura podem ser usadas diferentes abordagens tais como, por exemplo, proceder-se à seleção da figura mínima necessária à construção do friso e, a partir dela, fazer a sua reconstituição.

Algumas das cercaduras aqui apresentadas foram seccionadas de modo a obter outro tipo de friso (ver figura 9 e Figura 15).

Figura 9: Cercadura com friso do tipo p111

Na cercadura da figura 9 a existência de linhas e pontos nas partes superior e inferior de cada azulejo, só permite identificar simetrias de translação em que a figura mínima necessária à construção do friso corresponde a um azulejo. No entanto, a partir desta cercadura podemos obter um friso com outras características sendo possível, com o Geogebra, usar figuras com diferentes percentagens de opacidade e, por exemplo, localizar os centros de rotação, tal como se sugere na figura 10.

Figura 10: Friso do tipo p112 a partir de uma secção de um friso do tipo p111

Figura 11: Cercadura com friso do tipo p112

Na pesquisa das simetrias existentes no friso da cercadura da figura 11 a podemos criar uma aplicação com duas figuras: a base com a cercadura completa com opacidade reduzida e como objeto fixo e a figura mínima necessária à construção do friso. Com o GeoGebra podemos então obter o centro do friso e os centros de rotação que nos permitem completar o friso (figura 12).

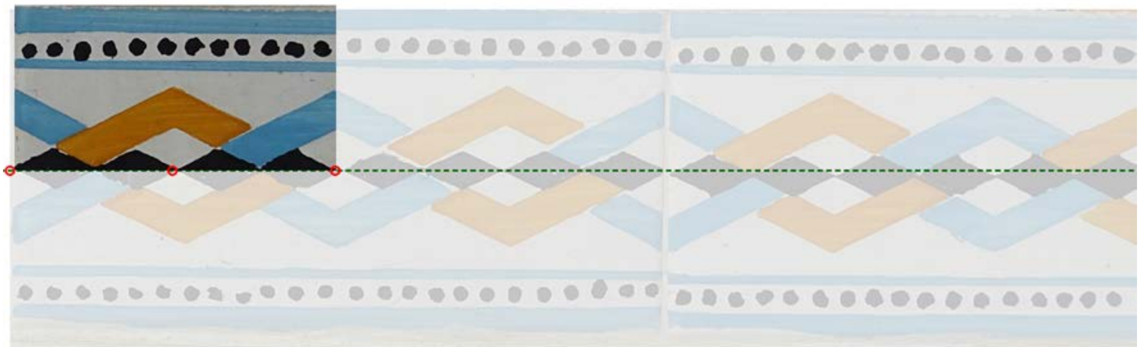

Figura 12: Construção de um friso com o Geogebra a partir de uma figura mínima

Figura 13: Cercadura com friso do tipo p1g1

Tal como para os frisos apresentados no ponto 3 também aqui podemos construir o friso a partir de um azulejo, definindo o eixo da reflexão deslizante e o módulo mínimo do vetor necessário à translação.

Figura 14: Elementos necessários à construção do friso da cercadura da figura 13

Na cercadura da figura seguinte, tal como na da figura 9 podemos obter diferentes tipos de frisos. Facilmente se identificam os eixos de reflexão do friso que corresponde à cercadura, coincidindo alguns com as extremidades dos azulejos.

Figura 15: Cercadura com friso do tipo pm11

Selecionando a figura mínima que corresponde à quarta parte de um azulejo podemos construir o friso definindo os sucessivos eixos de simetria tal como ilustrado na figura 16.

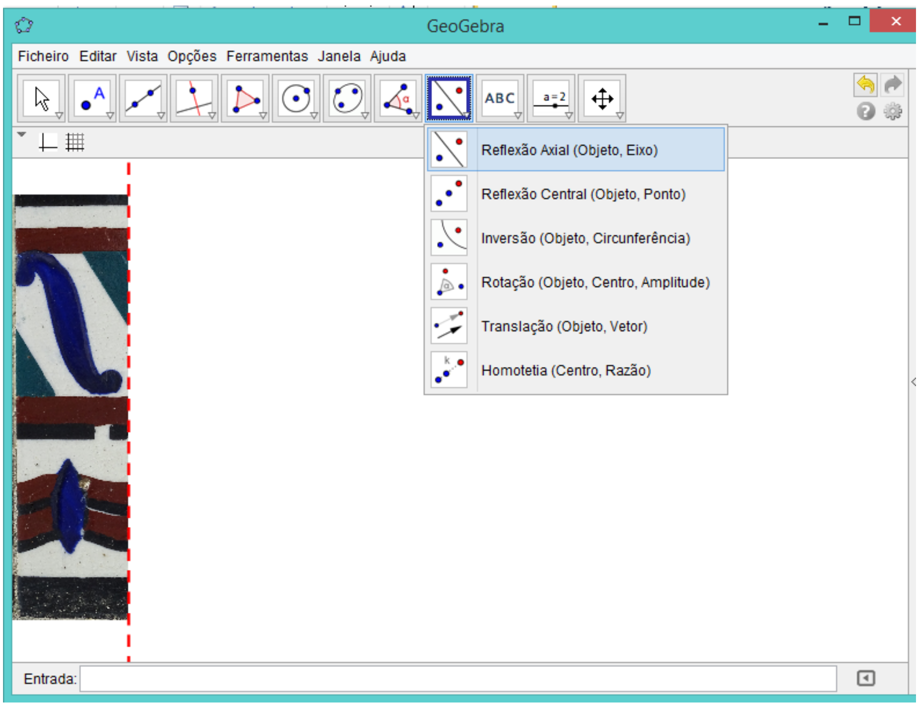

Figura 16: Construção de um friso do tipo pm11 usando o GeoGebra

Decompondo esta cercadura obtemos dois frisos com diferentes características: um friso do tipo *pmg2* e outro do mesmo tipo do inicial.

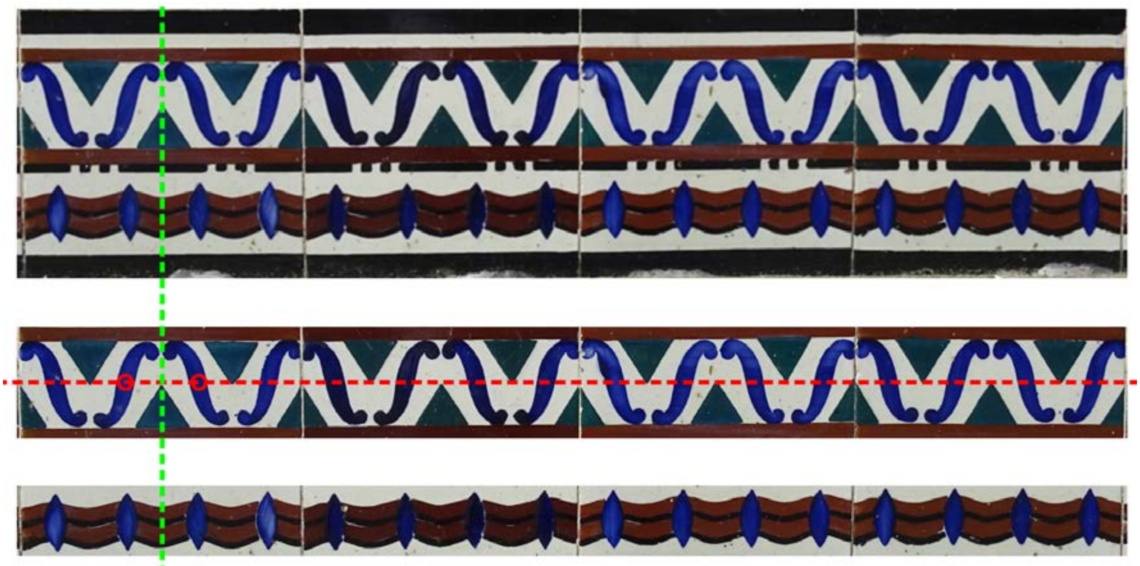

Figura 17: Decomposição de um friso do tipo pm11

No estudo das restantes cercaduras a pesquisa das simetrias existentes pode ser efetuada recorrendo a qualquer um dos métodos acima expostos.

Figura 18: Cercadura com friso do tipo p1m1

Figura 19: Cercadura com friso do tipo pmm2

Figura 20: Cercadura com friso do tipo pmg2

Considerações finais

Com este trabalho esperamos despertar o interesse nos alunos pelo conhecimento das simetrias de figuras planas, levando-os a observar os azulejos de uma outra perspetiva, a desenvolver o seu lado criativo e artístico e a familiarizarem-se com o software GeoGebra.

Referências

BIVAR, A., GROSSO, C., OLIVEIRA, F., & TIMÓTEO, M. (2013). Programa e Metas Curriculares do Ensino Básico. Lisboa: Ministério da Educação e Ciência.

BREDA, A., SERRAZINA, L., MENEZES, L., SOUSA, H., & OLIVEIRA, P. (2011). Geometria e Medida no Ensino Básico. Lisboa: Ministério da Educação, DGIDC.

DIRECÇÃO-GERAL DE FORMAÇÃO VOCACIONAL. (2004/05). Programa da disciplina de Matemática. Lisboa, Ministério da Educação.

DOS SANTOS SIMÕES, J. (1997). Azulejaria em Portugal no Século XVII, Tomo II - Elenco. Lisboa: Fundação Calouste Gulbenkian.

DOS SANTOS SIMÕES, J. M., & DE OLIVEIRA, E. G. (1997). Azulejaria em Portugal no Século XVII, Tomo I - Tipologia. Lisboa: Fundação Calouste Gulbenkian.

GEOGEBRA. (s.d.). Obtido em 29 de janeiro de 2015, de http://www.geogebra.org

SARRICO, P. (2009). Percurso do Azulejo de fachada de Aveiro: dinâmicas para a sua

Salvaguarda. Fac. Letras da Univ. de Coimbra: Dissertação de Mestrado em Museologia e Património Cultural.

VELOSO, A., ALMASQUÉ, I., & MILHEIRO, F. (2000). O Azulejo Português e a Arte Nova. Lisboa: Edições Inapa.