

FORMULAÇÃO DE PROBLEMAS NO CAMPO CONCEITUAL

MULTIPLICATIVO:

uma proposta para o ensino de multiplicação e divisão no eixo de produto de medidas

PROBLEM-POSING IN THE MULTIPLICATIVE CONCEPTUAL FIELD: a proposal for teaching multiplication and division in the product axis of measures

Renan Oliveira Altoé

Mestre em Educação em Ciências e Matemática
Centro Educacional São Camilo – ES - Brasil
renan.o.altoe@gmail.com

Rony Cláudio de Oliveira Freitas

Doutor em Educação
Instituto Federal do Espírito Santo – ES – Brasil
freitasrco@gmail.com

Resumo

Neste artigo, é analisada uma proposta de Formulação de Problemas, intitulada “Um passeio à lanchonete”, que pode contribuir para o ensino de multiplicação e divisão, inserido no Campo Conceitual Multiplicativo. Validada em uma pesquisa de Mestrado em Educação em Ciências e Matemática, de natureza qualitativa e seguindo a abordagem metodológica da Engenharia Didática, buscou oportunizar aos estudantes uma experiência no eixo do Produto de Medidas, em especial, na classe de problemas combinatórios. Os resultados apontaram que a proposta é potencialmente educativa para ensino dessas operações matemáticas, no que possibilitou a formulação de problemas que carregaram motivações e interesses, próprios dos estudantes, para a aprendizagem matemática.

Palavras-Chave: Formulação de problemas. Campo conceitual multiplicativo. Combinação. Engenharia didática.

Abstract

In this article, a proposal of Problem-Posing, entitled "A trip to a snack bar", which can contribute to the teaching of multiplication and division, inserted in the Multiplicative Conceptual Field is analyzed. Validated in a Master's Degree in Science and Mathematics Education research, of a qualitative nature and following the methodological approach of Didactic Engineering, it sought to give students an experience in the Measurement Product axis, especially in the class of combinatorial problems. The results pointed out that the proposal is potentially educational for teaching mathematical operations, allowing the problem-posing have motivated students' interests and motivations for mathematical learning.

Keywords: Problem-posing. Multiplicative conceptual field. Combination. Didactic engineering.

Introdução

Temos defendido a necessidade de ampliarmos o protagonismo discente, no que diz respeito à proposição de problemas em sala de aula, considerando, dessa vez, o envolvimento dos estudantes na formulação de problemas¹, compreendendo que suas produções podem desempenhar papel importante na aprendizagem. Autores como Chica (2001), Boavida *et al.* (2008) e Dante (2009) comungam da relevância dessa prática nas aulas de matemática, alegando que o processo de formulação contribui para o desenvolvimento da capacidade crítica, ajuda a exprimir ideias, relações e a aprofundar conceitos.

Segundo a Base Nacional Comum Curricular (BNCC), de 2017, o ensino de matemática deve proporcionar não somente momentos em que os estudantes resolvam problemas, mas que sejam incentivados a formularem problemas em outros contextos, prática essa que pode desenvolver as capacidades de criar, interpretar e avaliar. Além disso, destaca que, na Educação Básica, deve-se exercitar a curiosidade intelectual, incluindo a investigação, a reflexão, a análise crítica, a imaginação e a criatividade, para formular e resolver problemas e criar soluções (BRASIL, 2017). Assim, entendemos que a formulação de problemas pode oportunizar a concretização desse desejo para o ensino de matemática, desvelando interesses dos próprios estudantes na elaboração² de problemas.

Sendo assim, neste trabalho, analisamos uma proposta de Formulação de Problemas, intitulada “Um passeio à lanchonete”, elaborada com o intuito de contribuir para o ensino de multiplicação e divisão, inserido no Campo Conceitual Multiplicativo³. Trata-se de uma proposta desenvolvida em uma pesquisa de Mestrado em Educação em Ciências e Matemática, do Instituto Federal do Espírito Santo, *campus* Vitória - ES, e aplicada em uma turma de 5º ano de uma Escola Estadual de Ensino Fundamental e Médio, no município de Vargem Alta-ES. Seguindo o formato de história e elaborada em conjunto com a professora regente da turma, buscou aproximar os estudantes da categoria de relações ternárias, do eixo do Produto de Medidas, em especial, da classe de problemas combinatórios.

¹ Neste manuscrito, utilizamos “Formulação de Problemas” quando tratamos da prática em seu campo teórico, e “formulação de problemas” a ação/ato de formular o problema em sala de aula.

² Existem outras maneiras de se referir à ação/ato de formular problemas: elaborar, criar, produzir, gerar ou colocar.

³ O Campo Conceitual Multiplicativo ou das Estruturas Multiplicativas consiste de todas as situações que podem ser analisadas como problemas de proporções simples e múltipla para os quais geralmente é necessária uma multiplicação, uma divisão ou uma combinação dessas operações para resolvê-los (MOREIRA, 2015).

Formulação de Problemas: Breves Apontamentos

Temos assumido, com base em estudos de Silver (1994) e D'amore (2014), que a Formulação de Problemas se constitui de uma prática inserida na abordagem metodológica de Resolução de Problemas. Assim, ações docentes que se orientam por meio dessa metodologia de ensino podem oportunizar tanto a resolução quanto a formulação de problemas⁴ em sala de aula. Entendemos, assim, ser relevante que se façam novas reflexões sobre a proposição de problemas pelos estudantes, formulando seus próprios problemas de matemática.

No processo de resolver ou formular problemas, a comunicação e o envolvimento dos estudantes é fator expressivo para a aprendizagem. Resolver problemas “[...] exige que os alunos verbalizem seu pensamento, trabalhem em grupo, discutam e exponham em comum suas ideias para confrontá-las tanto entre eles mesmos quanto com o professor (VILA; CALLEJO, 2006, p. 149). Essas ações, como veremos adiante, também se atrelam à prática de formulação, uma vez que, ao gerar um problema, os estudantes verbalizam seu pensamento (por meio da escrita), podem trabalhar em grupos e, nesse ínterim, discutem e avaliam as suas ideias.

Apesar da formulação de problemas ser indicada como prática fundamental para a aprendizagem matemática, Silver (1994) afirma que os estudantes quase sempre resolvem os problemas apresentados pelo professor ou pelos livros didáticos e são, raramente, convidados a apresentarem seus próprios problemas de matemática. Segundo Altoé (2017), ao verificar se os estudantes tinham gostado de formular problemas nas aulas de matemática, identificou que todos eles manifestaram-se a favor, externando que formular problemas foi interessante e novo, uma prática que não tinham feito antes e que, normalmente, resolvem apenas os problemas que a professora registrava na lousa. Medeiros e Santiago (2013) e Pinheiro (2013), em suas pesquisas, apontaram que os discentes apresentaram dificuldades na formulação de problemas e sugerem que ela esteja mais presente nas aulas de matemática. Defendemos que “[...] aos alunos deve ser dada a oportunidade para formular problemas de determinadas situações e criar novos problemas quando modificando as condições de um determinado problema” (NCTM, 1991, p. 95).

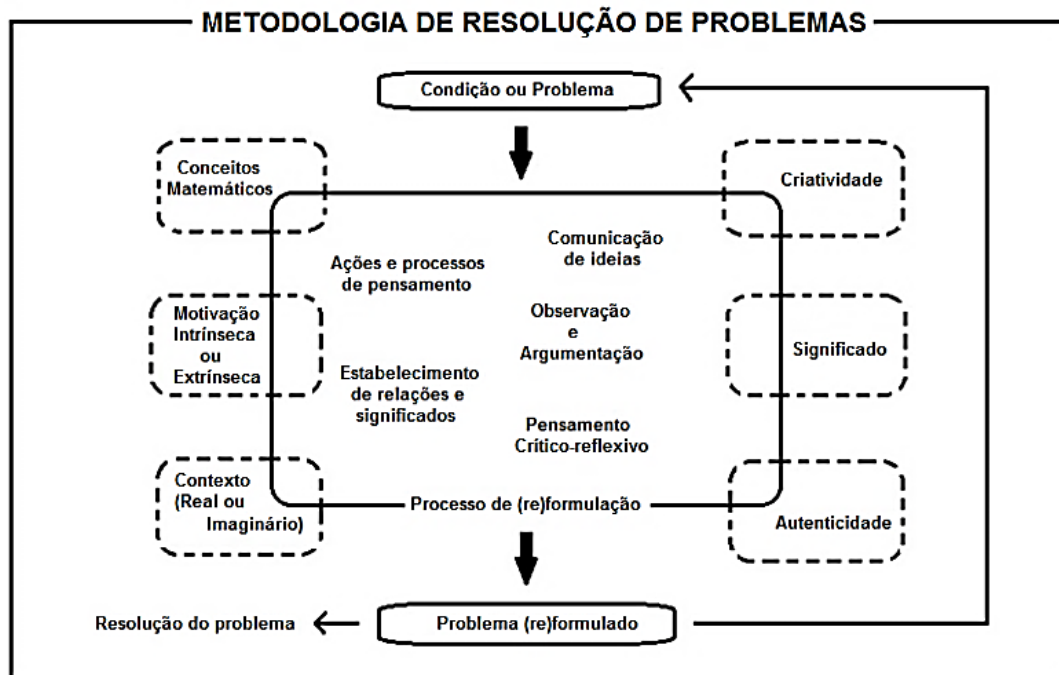
⁴ Assumimos “[...] o termo *problema* pra designar uma situação, proposta com finalidade educativa, que propõe uma questão matemática cujo método de solução não é imediatamente acessível ao aluno/resolvedor ou ao grupo de alunos que tenta resolvê-la, porque não dispõe de um algoritmo que relaciona os dados e a incógnita ou de um processo que identifique automaticamente os dados com a conclusão e, portanto, deverá buscar, investigar, estabelecer relações e envolver suas emoções para enfrentar uma situação nova” (VILA; CALLEJO, 2006, p. 29, grifo nosso).

Para Silver (1994, p. 19, tradução nossa), formular problemas “[...] refere-se tanto à produção de novos problemas e à reformulação de determinados problemas”. Além disso, Boavida *et al.* (2008) reiteram que é uma atividade de importância inquestionável, uma vez que contribui para o aprofundamento de conceitos matemáticos. Portanto, “[...] as crianças podem inventar os próprios problemas. Isso as motivará a ler, compreender e resolver os problemas, porque são seus” (DANTE, 2009, p. 65). Dessa forma, formular problemas requer, inicialmente, conhecer conceitos e entender o porquê do que estou pretendendo formular. Logo, é uma prática que pode oportunizar aos discentes espaços para produção de problemas que abarquem contextos de seus interesses, evidenciando momentos de inventividade e descoberta.

Na vertente desses posicionamentos, e buscando compreender a importância de se resolver os próprios problemas formulados, Altoé (2017) identificou que os estudantes acharam interessante resolver o problema formulado pelo outro colega e declararam, inclusive, ser mais interessante resolver aqueles formulados em sala de aula do que aqueles propostos pelo professor, justificando serem diferentes e divertidos. Boavida *et al.* (2008) orientam o encorajamento dos estudantes a escreverem, partilharem e resolverem os próprios problemas, considerando ações importantes para o desenvolvimento da capacidade de resolver problemas em matemática.

A partir dos estudos teóricos, Altoé (2017) tem compreendido que a Formulação de Problemas é uma prática inserida na metodologia de Resolução de Problemas que oportuniza aos estudantes (re)formularem problemas a partir de determinadas condições ou problemas dados. Tal prática envolve *autenticidade, criatividade, motivação intrínseca ou extrínseca, significado, contextos (reais ou imaginários) e conceitos matemáticos*. Nesse processo, espera-se que os estudantes desenvolvam o pensamento crítico-reflexivo, o raciocínio, a capacidade de comunicar ideias, de estabelecer relações e significados, de observação e argumentação e de reflexão sobre suas ações e seus processos de pensamento. Assim, formular e resolver estão estreitamente interligados, uma vez que um dos sentidos de se formular um problema é buscar a sua resolução. A Figura 1 representa o referido posicionamento.

Figura 1 - Esquema processual sobre Formulação de Problemas



Fonte: Altoé (2017, p. 58).

Altoé (2017) apresenta alguns conceitos inerentes à Figura 1, visto que poderiam acarretar diferentes interpretações por diferentes leitores. Assim, entende: i) *Criatividade*: É a capacidade e atitude de gerar novas ideias e comunicá-las (GONTIJO, 2007). Pode ser compreendida como a capacidade de produzir problemas entre a relação condição-contexto ou na reformulação de um problema dado, cujo produto final seja incomum; ii) *Significado*: É considerado a estabilização de ideias, as quais buscam construir o sentido de determinado objeto. Formular um problema que envolva a operação matemática 3×2 e, ao apresentá-lo, retratar “possuir 3 camisas e 2 calças, de quantas maneiras poderia uma pessoa se vestir”, mostra um conceito de multiplicação como ação de combinar; iii) *Autenticidade*: É considerada como os interesses pessoais que o estudante coloca na formulação do seu problema; iv) *Motivação Intrínseca ou Extrínseca*: É um elemento que se refere ao universo pessoal (SOLÉ, 2009). Assim, a motivação intrínseca trata-se de sentimentos e emoções de cada indivíduo, enquanto que a motivação extrínseca diz respeito a uma ação externa que contribui para que o aluno se motive intrinsecamente no processo de formulação; e v) *Contextos (reais ou imaginários)*: Referem-se às situações cotidianas vividas (contexto real) ou não (contexto imaginário) pelos educandos.

Diante do exposto, percebemos que a prática de formulação de problemas pode contribuir, conseqüentemente, em melhorias na capacidade de resolver problemas, uma vez que a criação de problemas leva à reflexão sobre a sua estrutura (contexto, pergunta, dados etc.),

importantes para dar sentido ao que se deseja comunicar. Quando um aluno formula um problema, ele “[...] percebe o que é importante na elaboração e na resolução de uma situação dada; que relação há entre os dados apresentados, a pergunta a ser respondida e a resposta” (CHICA, 2001, p. 152). Defendemos, portanto, que a Formulação de Problemas pode contribuir para o ensino de matemática, ser um potencializador na construção de conceitos e relações, e se caracterizar como prática investigativa, engenhosa e curiosa.

Campo Conceitual Multiplicativo: O Eixo de Produto de Medidas

Nesta seção discutiremos aspectos conceituais da multiplicação e divisão no Campo Conceitual Multiplicativo, baseando-nos nos estudos de Vergnaud (2014). Daremos ênfase no eixo do Produto de Medidas, onde se localiza a classe de problemas combinatórios. Esse eixo se enquadra na categoria de relações ternárias, que são estabelecidas entre três quantidades, das quais uma delas é o produto das duas outras, ao mesmo tempo no plano numérico e dimensional (VERGNAUD, 2014).

Nos problemas combinatórios, a multiplicação se constitui de uma operação em busca de encontrar a medida-produto, conhecendo-se as medidas elementares, cujas relações se estabelecem somente entre quantidades discretas-discretas (VERGNAUD, 2014). Segundo Vergnaud (2014, p. 254), “[...] é a noção de produto cartesiano de conjuntos que explica a estrutura do produto de medidas”. Vejamos um exemplo apresentado por Vergnaud (2014): “3 rapazes e 4 moças querem dançar. Cada rapaz quer dançar com cada moça e cada moça, com cada rapaz. Quantos seriam os casais possíveis?” Considerando dois conjuntos $R = \{a, b, c\}$, dos rapazes, e $M = \{f, g, h, i\}$, das moças, temos:

Tabela 1 – Produto cartesiano $R \times M$

| | f | g | h | i |
|----------|----------|----------|----------|----------|
| a | (a, f) | (a, g) | (a, h) | (a, i) |
| b | (b, f) | (b, g) | (b, h) | (b, i) |
| c | (c, f) | (c, g) | (c, h) | (c, i) |

Fonte: Os autores

A partir do produto cartesiano ($R \times M$) da Tabela 1, os pares ordenados correspondem à associação de um elemento do conjunto R com um elemento do conjunto M . Logo, o número

de casais é determinado por uma multiplicação entre a quantidade de elementos dos dois conjuntos: y casais = 3 rapazes x 4 moças, onde a representação numérica se faz “ $y = 3 \times 4$ ”, enquanto que a representação dimensional se traduz por “casais = rapazes x moças”.

A divisão, por sua vez, em problemas combinatórios, busca encontrar medidas elementares, conhecendo-se uma delas e a medida-produto, cujas relações são estabelecidas, também, entre quantidades discretas-discretas (VERGNAUD, 2014). Analisemos um exemplo dado por Vergnaud (2014): “Um comerciante quer colocar à disposição dos clientes 15 variedades de sorvetes cobertos de chocolate. Ele dispõe de três variedades de chocolates. Quantas variedades de sorvetes ele deve ter?”.

Considerando y a quantidade de variedades de sorvetes cobertos de chocolate, z a quantidade de variedades de chocolates e w a variedade de sorvetes, o processo resolutivo deve levar em consideração que a quantidade de sorvetes com cobertura de chocolates depende, diretamente, da quantidade de cobertura de chocolate e a quantidade de sorvetes variados.

15 sorvetes com cobertura de chocolate = 3 chocolates x z variedades de sorvetes,

15 sorvetes com cobertura de chocolate \div 3 chocolates = z variedades de sorvetes.

Para os números temos “ $15 \div 3 = z$ ” e, para as dimensões, registram-se “sorvetes com cobertura de chocolate \div chocolates = variedades de sorvetes”.

Assim, concluímos que a multiplicação é a busca pela medida-produto, enquanto a divisão é a busca pela medida elementar. São olhares distintos que ampliam a visão conceitual dessas operações.

Engenharia Didática: Aporte Teórico-Metodológico do Estudo

Considerando pertinente uma abordagem metodológica que vinculasse a dimensão teórica e campo experimental da prática educativa, encontramos em Pais (2011) o desenho metodológico da Engenharia Didática. Segundo Pais (2011), a partir dos estudos de Artigue (1996), essa metodologia apresenta característica de esquema experimental baseado em realizações didáticas em classe. Segundo Almouloud e Coutinho (2008), existe a comparação entre análise *a priori* e análise *a posteriori*, realizadas na etapa de validação. Entendemos, assim, que nossa pesquisa é de natureza qualitativa, do tipo experimental.

De acordo com Pais (2011), a Engenharia Didática segue quatro fases: 1) análises preliminares; 2) concepção e análise *a priori*; 3) aplicação de uma sequência didática, e 4) análise *a posteriori* e a avaliação. Em nossa pesquisa, a terceira fase foi renomeada de

“aplicação de uma sequência de atividades”, visto que não propusemos uma sequência didática, rigorosamente dita, mas um grupo de propostas, em formato de história, de formulação de problemas.

Na primeira fase, intitulada de “análises preliminares”, buscamos a “[...] elaboração de um quadro teórico sobre o qual o pesquisador fundamenta suas principais categorias” (PAIS, 2011, p. 101). Neste manuscrito, está representada, brevemente, pelas seções “Formulação de Problemas: breves apontamentos” e “Campo Conceitual Multiplicativo: o eixo de produto de medidas”.

Na segunda fase, nomeada de “concepção e análise *a priori*”, definimos, a partir das análises preliminares, as variáveis que foram consideradas na construção das propostas didáticas. Para Pais (2011), são as variáveis *macrodidáticas* ou globais, relativas à organização da engenharia como um todo, e as variáveis *microdidáticas* ou locais, relacionadas ao planejamento específico de cada seção. Esta fase encontra-se caracterizada na subseção “Variáveis macrodidáticas e microdidáticas”.

Na terceira fase, designada de “aplicação de uma sequência de atividades”, realizamos a aplicação das propostas elaboradas na fase precedente, e registramos as observações por meio de diário de bordo do pesquisador e gravações de áudio e vídeo. Neste manuscrito, esta fase está descrita na subseção “Breves relatos da aplicação”.

Na quarta fase, chamada de “análise *a posteriori* e a avaliação”, realizamos o tratamento das informações obtidas na aplicação da atividade. Almouloud e Coutinho (2008) afirmam que a análise *a posteriori* é o conjunto de resultados extraídos da exploração dos dados recolhidos, enquanto a avaliação é, para Pais (2011, p. 103, grifos do autor), “[...] obtida pela confrontação entre os dados obtidos na análise *a priori* e *a posteriori* [...]”. Neste escrito, corresponde à seção “Análise *a posteriori* da proposta”.

Variáveis macrodidáticas e microdidáticas

Originadas das análises da primeira fase e aderidas na segunda fase, temos as seguintes variáveis *macrodidáticas* e *microdidáticas* na construção da atividade⁵: *Macrodidáticas*: i) (re) construção da metodologia de ensino; ii) valorização à descoberta; iii) incentivo à criatividade, e iv) valorização da percepção de conexões entre as operações de multiplicação e divisão e

⁵ Foram desenvolvidas cinco propostas de formulação de problemas, a saber: i) a compra misteriosa; ii) a receita de sorvete; iii) um passeio à lanchonete; iv) ...vezes mais... vezes menos... e v) um dever de casa desafiador.

problemas que envolvem o cotidiano. *Microdidáticas*: i) multiplicação: busca de medida-produto e ii) divisão: busca de medida elementar.

As variáveis *macrodidáticas* foram consideradas na construção da história como um todo, ao levarmos em consideração que fosse possível que: (i) a professora regente e o pesquisador pudessem refletir sobre seus conhecimentos a respeito da Formulação de Problemas; (ii) na elaboração da proposta, fosse valorizada a descoberta pelos estudantes ao refletirem sobre suas formulações; (iii) ao propormos a formulação de problemas, por meio de uma história, fosse incentivada a criatividade, por meio da oportunidade de escolherem diferentes contextos, desejos e interesses pessoais, e (iv) ao formularem o problema, considerando a situação envolvida na história, pudessem refletir a respeito de possíveis conexões entre a matemática (multiplicação e divisão) e problemas do cotidiano. As variáveis *microdidáticas* foram consideradas no decorrer da leitura e discussão da proposta em sala de aula, bem como no desenvolvimento da história, servindo de plano de fundo para que os estudantes as vivenciassem e formulassem problemas que as envolvessem.


A Proposta “Um Passeio à Lanchonete”: Apresentação e Análise *A Priori*

A história “Um passeio à lanchonete” foi pensada para os estudos de multiplicação e divisão no campo de situações de combinatória. Narra o passeio de dois amigos de escola que decidiram, durante a caminhada de retorno para casa, parar em uma lanchonete no centro da cidade. Chegando lá, foram prontamente atendidos pelo garçom que lhes entregou o *menu* do estabelecimento. A partir desse momento, surgiram alguns questionamentos que foram feitos aos estudantes participantes: i) *o que vocês acham que tinha naquele menu?* e ii) *vocês saberiam dizer de quantas maneiras diferentes é possível escolher uma bebida e uma comida do menu?* Quando as discussões relativas a essas questões foram finalizadas, os discentes foram convidados a formularem seus problemas envolvendo o pensamento combinatório. Na Figura 2, apresentamos a proposta.

Figura 2 - A proposta “um passeio à lanchonete”

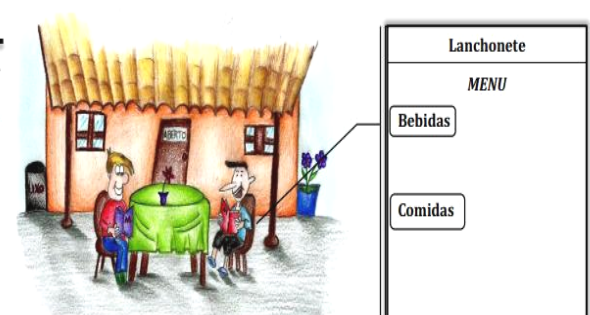
UM PASSEIO À LANCHONETE

Em um dia ensolarado, dois amigos, ao saírem da escola, decidiram dar uma volta na praça que fica no centro da cidade onde moram. Durante a caminhada, foram conversando...



Amigo, vamos beber e comer alguma coisa?

Oba, vamos sim!



Lanchonete

MENU

Bebidas

Comidas

Os dois amigos ficaram muito contentes com a diversidade de bebidas e comidas, mas restaram muitas dúvidas na hora de escolher o que beber e comer. Você sabe dizer de quantas maneiras é possível escolher uma bebida e uma comida do *menu*?

Agora, formule um problema no qual é possível também fazer diferentes escolhas. Vamos lá?

Continuaram a caminhada e avistaram uma lanchonete muito famosa da cidade. É um local muito agradável e possui um ótimo atendimento. Ao chegarem lá, sentaram-se na mesa, pediram o *menu* e escolheram alguma coisa para beber e comer. O que você acha que tinha naquele *menu*? Vamos completá-lo?

Fonte: Altoé e Freitas (2017, p. 13-14)

No Quadro 1, encontra-se a análise *a priori* relativa ao campo da Formulação de Problemas.

Quadro 1 – Análise *a priori* da proposta

| | |
|--------------------------------|--|
| Dimensão Didática | Que a proposta, a partir da resolução de um problema inicial, contribua na formulação de problemas. |
| Dimensão Epistemológica | Que os problemas formulados sejam de raciocínio combinatório, cuja resolução envolva a multiplicação ou a divisão. |
| | Que alguns ou todos os problemas desta Dimensão possibilitem discussões acerca do enunciado, da resolução ou da solução. |
| Outras Especificações | Que seja atribuído nome aos personagens e outras possibilidades de contextos para o raciocínio combinatório. |
| | Que os alunos expressem, nos problemas formulados, seus interesses pessoais. |

Fonte: Altoé (2017, p. 109-110)

Para essa proposta, elaboramos⁶ as seguintes “Orientações ao Professor (a)”: i) sugerimos que inicie esta proposta convidando os estudantes a lerem a história “Um passeio à lanchonete” e ressaltando que a participação dos mesmos é muito importante; ii) caso os discentes apresentem dificuldades na resolução, levante questionamentos e possibilite-os refletir sobre possíveis caminhos para se resolver, seja ele numericamente ou por meio de desenho; iii) após a formulação dos problemas pelos estudantes, e sua respectiva resolução, convide-os a apresentarem os seus problemas formulados e digam como procederam a resolução, e iv) não deixe de ajudar os educandos que apresentarem dificuldades. Todos devem, apesar delas, construir o seu problema!

Breves Relatos da Aplicação

Na aplicação desta atividade, estiveram presentes 23 estudantes, do total de 28 participantes, os quais demonstraram interesse pela leitura e pelos debates. Iniciamos a leitura e, a partir dos questionamentos elencados no decorrer da história, os estudantes apresentaram dificuldades relativas à compreensão sobre a expressão “contagem de possibilidades”, as quais foram discutidas e entendidas juntamente ao pesquisador e professora regente.

A história tem início com dois amigos que decidiram ir a uma lanchonete no centro da cidade onde moravam. Ao analisarem o *menu*, perceberam que tinham várias opções de comidas e bebidas para serem escolhidas. Com base nisso, o primeiro questionamento “O que você acha que tinha naquele *menu*? Vamos completá-lo?”, levou os estudantes à construção de um possível *menu* para a história. Não identificamos dificuldades na sua concretização, contudo, alguns discentes questionaram se havia uma quantidade máxima de produtos que poderiam supor. Foi especificado que poderiam fazer o *menu* da maneira que gostassem, com pouco ou muitos produtos, dentre os produtos que achassem que deveriam levar em consideração. Alguns participantes, além de apontarem as bebidas e comidas, também se preocuparam com os valores dos respectivos produtos.

Já o segundo questionamento “Você sabe dizer de quantas maneiras é possível escolher uma bebida e uma comida do *menu*?”, buscou oportunizar momentos para reflexões a respeito de quantas maneiras distintas os amigos poderiam escolher uma bebida e uma comida naquela

⁶ Essas orientações foram elaboradas em conjunto com a professora regente da turma. O objetivo é nortear a aplicação da proposta em sala de aula, quando da sua utilização por outro (a) docente.

lanchonete, tendo por base os produtos do próprio *menu* que construíram no questionamento anterior.

No momento da realização dos cálculos, alguns estudantes optaram por iniciar uma representação pictórica, associando cada bebida a cada comida, até completarem todas as possibilidades. Alguns, por terem suposto um *menu* muito extenso, perceberam que esse tipo de caminho era inviável e, após perceberem a lógica das associações combinatórias, optaram pelos cálculos numéricos. Concluídas as atividades no decorrer da história, foram convidados a formularem um problema no qual fosse possível, também, fazer diferentes escolhas. Assim, começaram a produzir os seus problemas, individualmente, não apresentando dificuldades na escolha dos contextos e na escrita.

Durante a elaboração dessa proposta, a professora regente ressaltou que os participantes já tinham vivenciado problemas combinatórios. Contudo, foi possível perceber que alguns estudantes ainda encontravam dificuldades nessa classe, o que incluiu, necessariamente, novos diálogos e reflexões no decorrer da aplicação. Vale ressaltar que a pesquisa buscou, dentre seus objetivos específicos, validar a proposta, evidenciando se a mesma possibilitava a formulação de problemas combinatórios, se os problemas formulados poderiam ser utilizados pelo professor em suas aulas (análise dos registros escritos) e a justificativa dos estudantes frente ao problema que formularam. Entendemos que não era necessário, exclusivamente, que os participantes não tivessem vivenciado problemas dessa classe, pois a análise *a priori* encontrava-se no escopo da prática de Formulação de Problemas, foco do estudo.

As propostas que emergiram foram relativas a contextos que envolviam sorveterias, roupas, pastelarias e lanchonetes. Muitos desses problemas formulados retrataram, como veremos mais adiante, nas justificativas dos estudantes, situações de interesse e de convívio social.

Análise *a posteriori* da Proposta

Tomando por base o Quadro 1, relativo à análise *a priori*, iniciaremos as discussões a partir da Dimensão Didática.

| | |
|--------------------------|---|
| Dimensão Didática | Que a proposta, a partir da resolução de um problema inicial, contribua na formulação de problemas. |
|--------------------------|---|

O objetivo desta Dimensão foi verificar se a história “Um passeio à lanchonete” contribuiu para a formulação de problemas. Essa análise se deu por meio do registro escrito dos

participantes, tomando por base um único critério: existência de um problema de matemática elaborado. Em busca de contribuir para esse processo de formulação, fomos levados a desenvolver uma história na qual fosse possível vivenciar questionamentos que envolvessem o pensamento combinatório, como vimos na seção anterior.

O primeiro deles, “O que você acha que tinha naquele *menu*? Vamos completá-lo?”, levou os estudantes à construção de um possível *menu* para a lanchonete. Abaixo, nas formulações de A25-10⁷ (Figura 3) e A27-11 (Figura 4), evidenciamos a atividade realizada.

Figura 3 – Menu do aluno A25-10



Fonte: Altoé (2017, p. 148)

Figura 4 – Menu do aluno A27-11

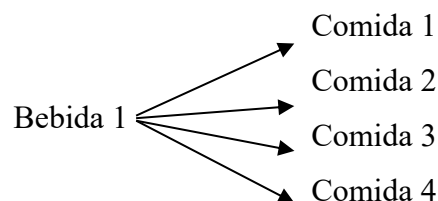


Fonte: Altoé (2017, p. 148)

⁷ Atendendo ao processo ético (aprovada pelo Comitê de Ética e Pesquisa do IFES sob o nº CAAE 56129916.6.0000.5072 e tendo por base a análise feita no Parecer de nº 1.577.247), os alunos foram identificados pela vogal “A” (de Aluno), acrescida de numeração indo-arábico (indica o número do participante), seguida da sua respectiva idade. Assim, por exemplo, o aluno A03-10 é o terceiro do total de 28 participantes, cuja idade é 10 anos.

O próximo questionamento, “Você sabe dizer de quantas maneiras é possível escolher uma bebida e uma comida do *menu*?”, buscou levá-los a refletir a respeito de quantas maneiras distintas os amigos poderiam escolher uma bebida e uma comida naquela lanchonete, tomando por base os produtos do próprio *menu* que elaboraram. Alguns estudantes relataram que, com base no seu *menu*, os amigos teriam várias possibilidades, mas não sabiam dizer quantas, numericamente.

Diante dessas evidências, sugerimos (pesquisador e professora regente) que os participantes relacionassem cada um dos produtos, dois a dois, em espécies diferentes. Utilizamos o esquema representativo (Diagrama da Árvore), abaixo, para indicar que uma bebida poderia ser consumida com quatro comidas distintas.



Com base nesse esquema, mostramos aos estudantes que a Bebida 1 poderia se relacionar com 4 comidas diferentes (1, 2, 3 e 4), totalizando 4 formas distintas. Traduzindo essa representação para a dimensão numérica, teríamos uma multiplicação entre a quantidade de bebidas e a quantidade de comidas, logo $1 \times 4 = 4$ possibilidades. A partir dessas discussões, identificamos que 6 discentes realizaram todos os esquemas que representavam as escolhas para o seu *menu*, 8 discentes relacionaram somente alguns casos, 8 discentes procederem diretamente à operação de multiplicação entre as quantidades de bebidas e comidas, e 1 discente não fez esta parte da atividade. Abaixo, apresentaremos um exemplo para cada uma dessas análises.

Quando concluíram as questões decorrentes da história, iniciaram a formulação dos seus problemas. Apesar das dificuldades relacionadas a essa classe de problemas, não demorou muito para que as primeiras construções eclodissem e apresentassem características de situações envolvendo combinatória. Uma parte da turma necessitou de ajuda na formulação, principalmente com respeito à escolha do contexto, pois não tinham certeza de que ele serviria para elaborar um problema de combinatória.

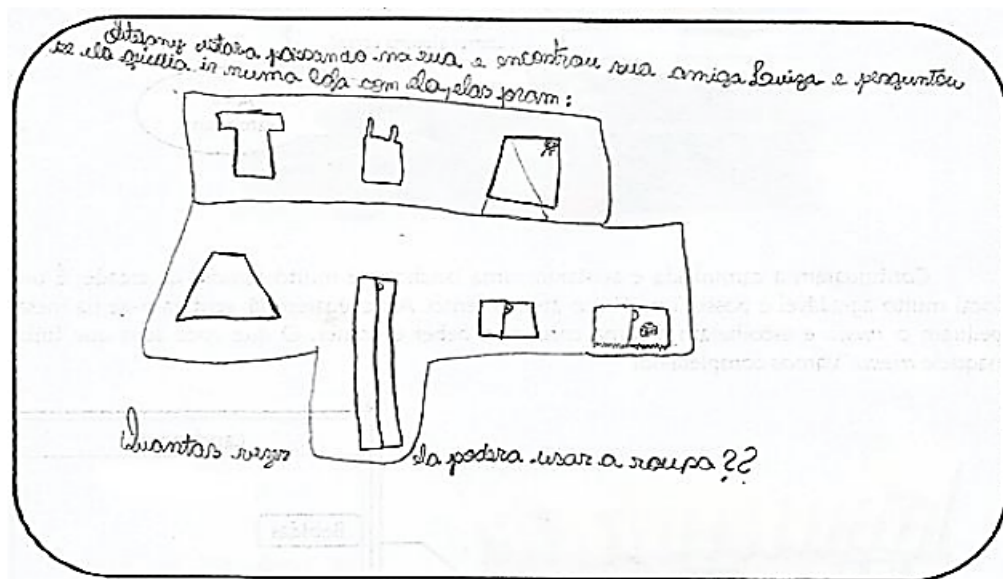
Com base na análise dos dados, para esta Dimensão, identificamos 23 problemas formulados. Essas produções passaram para análise na Dimensão Epistemológica, onde buscamos identificar quais deles abarcavam o pensamento combinatório. Dessas primeiras

análises, podemos afirmar que a atividade “Um passeio à lanchonete” contribuiu na formulação de problemas, pois a proposta, para além de abordar o raciocínio combinatório, propiciou momentos de discussões a respeito desse tipo de situação, levando o estudante a se envolver em reflexões, ações essas que o oportunizaram a formular o seu problema.

| | |
|--------------------------------|--|
| Dimensão Epistemológica | Que os problemas formulados sejam de raciocínio combinatório, cuja resolução envolva a multiplicação ou a divisão. |
| | Que alguns ou todos os problemas desta Dimensão possibilitem discussões acerca do enunciado, da resolução ou da solução. |

Esta Dimensão tem início na análise dos 23 problemas formulados na etapa anterior, buscando identificar quantos deles apresentaram, em sua estrutura, o pensamento combinatório. Além disso, nos preocupamos também em analisar se todos ou alguns dos problemas formulados, no tocante a esta Dimensão, possibilitariam discussões acerca da sua estrutura. Sendo assim, partindo da análise dos registros escritos (problemas) dos estudantes, analisando sua estrutura, pergunta e relação dados-pergunta, identificamos, do total de 23 formulações, 19 problemas que apresentaram o raciocínio combinatório no campo da multiplicação. Não tivemos nenhum problema que pudesse ser solucionado por meio da divisão. Em busca de uma exemplificação, tomemos, como exemplo, o problema formulado por A02-11, na Figura 5.

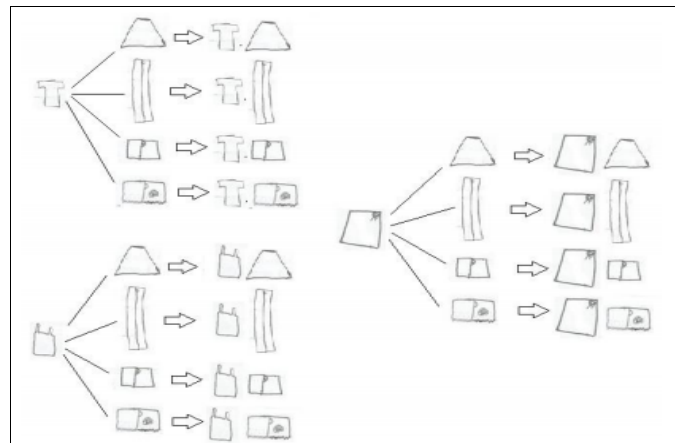
Figura 5 – Problema do aluno A02-11



Fonte: Altoé (2017, p. 152).

Segundo Vergnaud (2014), o pensamento combinatório carrega o raciocínio de um exemplo de produto cartesiano, que, nesse caso, se traduz pelo conjunto de peças superiores e inferiores. No entanto, com relação à escrita do problema, a pergunta precisaria sofrer alguns ajustes, pois “quantas vezes ela poderá usar a roupa” não é a mesma coisa de “quantas maneiras diferentes ela poderá se vestir”. Chica (2001) sugere que sejam feitas intervenções para que os estudantes consigam melhorar a escrita dos seus problemas, e comunicar com clareza o que pretendem. Mantida a pergunta original do problema, poderíamos ter como resposta, por exemplo, “poderia usar 80 vezes a calça”, que é diferente de “poderia se vestir de y maneiras diferentes”. Para esse problema, poderíamos ter dois diferentes caminhos de resolução. O primeiro, considerando uma esquematização e realizando a soma das combinações, ou, o segundo, utilizando apenas uma multiplicação. Para melhor compreensão, vejamos, na Figura 6, como se estruturaria o primeiro caminho.

Figura 6 – Esquematização da combinação das peças



Fonte: Altoé (2017, p. 153)

Dessa esquematização, podemos visualizar as diferentes formas com que a personagem do problema poderia se vestir, ou seja, de 12 possibilidades. Se pensarmos na segunda resolução, poderíamos associar esse diagrama a uma multiplicação da quantidade de “peças superiores” (3 peças) pelas “peças inferiores” (4 peças), resultando em $3 \times 4 = 12$ possibilidades.

Outro problema que analisamos foi relativo a uma pastelaria, que carregou o nome de uma das colegas de classe do formulador. Assim, tivemos que cobrir [...] o nome da pastelaria para manter o sigilo das informações pessoais dos participantes. Vejamos esse problema na Figura 7.

Figura 7 – Problema do aluno A12-10

Leilissa estava junto com Gabriela e elas foram para a pastelaria e tinha 5 tipos de pastéis e 5 tipos de refrigerante, teve um problema o pastel de palmito não podia fazer.

| | |
|-------------------|--------------|
| PASTÉIS | refrigerante |
| queijo | molotoca |
| carne | laranja |
| queijo e carne | uva |
| palmito | guaraná |
| frango | caca-cola |
| queijo e catupiry | |

PASTELARIA DA (...)

quantas vezes elas poderiam comer?
R = elas poderiam comer 20 vezes.

Fonte: Altoé (2017, p. 154)

Não diferente do problema anterior, esta proposta também poderia ser resolvida seguindo os mesmos caminhos: diagrama da árvore ou multiplicação. No entanto, quando a quantidade de itens é extensa demais, torna-se inviável representar sua resolução por meio do diagrama. Para esse problema, temos 5 tipos de pastéis e 5 tipos de bebidas. Contudo, é descrito no enunciado que o pastel de palmito não poderia ser feito, então, devemos considerar somente 4 tipos de pastéis. Com essas informações, a resposta para o problema seria determinada pela multiplicação $4 \times 5 = 20$ possibilidades. Vale ressaltar que a pergunta “quantas vezes elas poderiam comer” é um tanto quanto ampla demais, visto que qualquer pessoa poderia comer quantas vezes quisesse em um estabelecimento, só dependendo de alguns fatores que a permitissem. Sendo assim, julgamos ser necessária uma pequena modificação na escrita da pergunta para reduzir a amplitude de análise e manter o direcionamento para o raciocínio combinatório, mesmo que este, aparentemente, já estivesse subentendido.

Relativa à segunda parte desta Dimensão Epistemológica, analisamos quantos dos 19 problemas formulados, que já foram considerados de raciocínio combinatório, possibilitariam discussões acerca dos seus enunciados, das suas resoluções ou das suas respostas. Após análises, detectamos 12 formulações que atenderam a esse quesito e são potencialmente geradoras de debates em sala de aula. Como as propostas de A12-10 e A02-11 já foram discutidas nesta Dimensão apresentaremos, apenas, as demais produções.

O problema de A22-11, ao tratar de um contexto que envolveu comidas, teve boas

intenções ao perguntar “fale um jeito de comer isto”, mas poderia ser mais bem aproveitado se sofresse a seguinte mudança: “fale de quantas maneiras Pedro e Juca poderiam escolher um *chips* de batata, um *Milk Shake* e um sorvete?”.

Já o problema elaborado por A24-10, que retratou uma festa de aniversário, na qual a pessoa foi presenteada com 4 peças de roupas, e quis se vestir de duas formas diferentes, teve como pergunta: “Como poderá fazer essa conta?”. Esse problema abarcou o pensamento combinatório, porém não especifica quais são as peças de roupas (camisa, calças, bermudas etc.) e se a pessoa é do sexo feminino ou masculino. É um potencial, inclusive, de discussão sobre a real necessidade de se realizarem todos os cálculos, visto que o desejo era vestir-se somente de duas formas diferentes.

Referente ao problema de A11-10, temos uma história em que uma menina sairia com suas colegas para uma festa. O problema tratou da escolha da roupa, mas não apresentou uma pergunta a ser respondida, apenas uma afirmação: “Ajude-a!” Assim, esse problema necessitaria passar por reformulações relativas à sua estrutura, no tocando da pergunta, o que deveria ser feito, também, nas propostas de A04-10 e A17-15.

No problema de A21-11, foi apresentada uma história de duas amigas que foram à sorveteria e estavam com dificuldades em escolher a calda para o sorvete. A pergunta do problema era: “Vamos ajudar ela a escolher a calda”? Nesse exemplo poderia ser discutido que a resposta já estaria visivelmente clara, uma vez bastasse escolher uma das três caldas disponíveis. Assim, reformular a pergunta do problema e especificar os sabores dos sorvetes e das caldas, no enunciado, poderia ser ações que o tornaria ainda mais interessante e claro.

Com relação à formulação de A27-11, o autor relatou a história de dois amigos que saíram da academia e foram a uma pastelaria. Lá “pediram” duas pizzas e uma Coca-Cola e dois pastéis e um guaraná. Teve como pergunta: “Quantos jeitos diferentes eles podem fazer?” Nesse problema, a palavra “pediram” já inviabilizaria a possibilidade de diferentes escolhas, visto que esse ato já teria sido feito e, para torná-lo ainda “mais combinatório”, seria necessário trocar a palavra “pediram” por “o cardápio tem...”. Assim, uma possível escrita seria: “o cardápio tem 2 tipos de pizza, 2 tipos de pastéis e 2 tipos de refrigerantes”. Entendemos, portanto, que é mais um problema que geraria boas discussões em sala de aula.

O problema de A13-10 trata de uma viagem a ser feita à Aparecida do Norte, cuja mala de roupas deveria ser preparada. Para a viagem, seriam levadas saias, blusas, *shorts*, vestidos, macaquinhos, calças, sutiãs, calcinhas, pijama, toalha e blusas de frio. A pergunta do problema foi o seguinte: “Quantos *looks* vou poder usar”? Esse problema é essencialmente combinatório,

porém existem roupas que não têm como ser utilizadas em combinação com outras como, por exemplo, vestidos e calças. Nesse sentido, seria necessário definir grupos de peças que poderiam ser combinadas entre si e que resultariam nos *looks*.

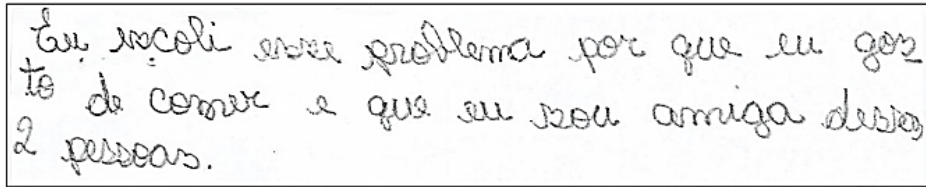
Por fim, os problemas de A23-10 e A19-11 foram elaborados pensando na compra de sorvetes. No primeiro, foram dados 5 sabores de sorvetes, 4 recheios e 4 cores de pazinhas. No segundo, o autor especificou 10 tipos de sabor de sorvete e 5 caldas. Em ambas as propostas, o interesse era determinar de quantas maneiras diferentes uma pessoa poderia tomar um sorvete (levando em consideração as especificações de cada problema). Entretanto, em nenhum deles foi especificado se seria adquirida somente uma bola de sorvete ou mais. Isso poderia interferir na resolução e, conseqüentemente, na resposta do problema.

Julgamos que esses problemas carregam potencial educativo, seja no que diz respeito ao pensamento combinatório ou à possibilidade de desenvolver o pensamento crítico-reflexivo sobre as próprias produções. Entendemos que são propostas interessantes e criativas, frutos de uma prática, que, segundo Silver (1994), pode despertar a criatividade nas aulas de matemática.

| | |
|----------------------------------|--|
| Outras Especificações | Que seja atribuído nome aos personagens e outras possibilidades de contextos para o raciocínio combinatório. |
| | Que os alunos expressem, nos problemas formulados, seus interesses pessoais. |

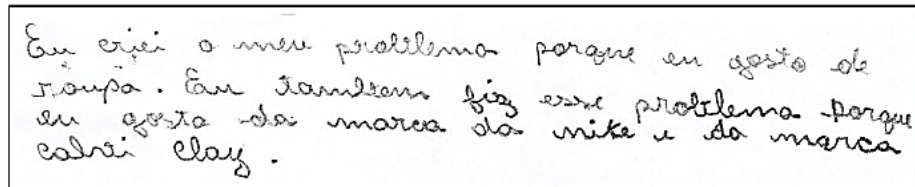
É comum, no processo de formulação do problema, iniciar a proposta escolhendo um contexto e um personagem que comporão o enredo. Em alguns casos, o próprio autor se colocava como personagem, apresentando um contexto no qual, supostamente, vivenciou ou poderia vivenciar. A formulação é uma prática que considera vivências, conforme vimos e veremos nas justificativas dos estudantes e, segundo Chica (2001), pode ser um caminho para se desenvolver o espírito crítico, a argumentação e a observação. No enunciado dos problemas, os contextos foram os mais diversos como, por exemplo, sorveterias, lojas de roupas, pastelarias, aniversários, viagens e, até mesmo, almoço beneficente. Evidentemente, essas escolhas tiveram como pontos de partida interesses pessoais dos próprios formuladores, os quais buscamos identificar por meio de justificativas que apresentaremos nesta seção.

Nas Figuras 8 e 9, podemos ver a justificativa dos estudantes no que diz respeito à escolha dos personagens e dos produtos para o problema.

Figura 8 – Justificativa do aluno A18-11


Eu escolhi esse problema por que eu gosto de comer e que eu sou amiga de 2 pessoas.

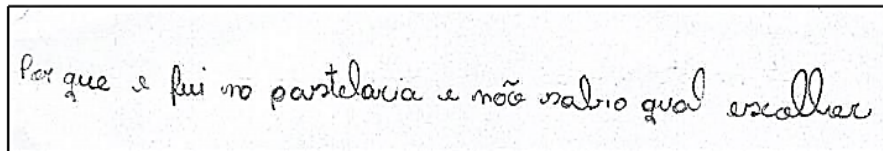
Fonte: Altoé (2017, p. 157)

Figura 9 – Justificativa do aluno A28-11


Eu escolhi o meu problema porque eu gosto de roupa. Eu também fiz esse problema porque eu gosto da marca da Nike e da marca Colcci Clay.

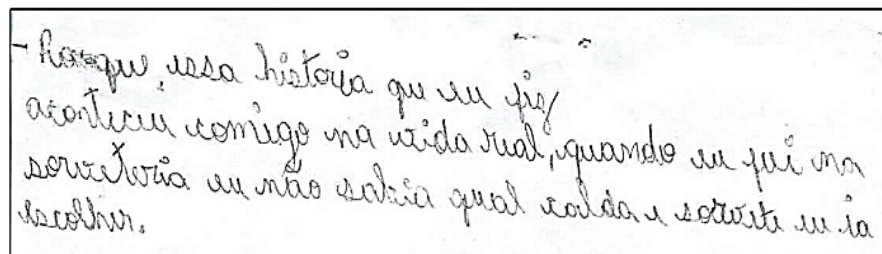
Fonte: Altoé (2017, p. 157)

No tocante dos contextos escolhidos para os problemas, podemos dizer que muitos deles retrataram um caso vivido ou que seria vivenciado pelos estudantes. As Figuras 10, 11 e 12 trazem três justificativas nesse sentido.

Figura 10 – Justificativa do aluno A27-11


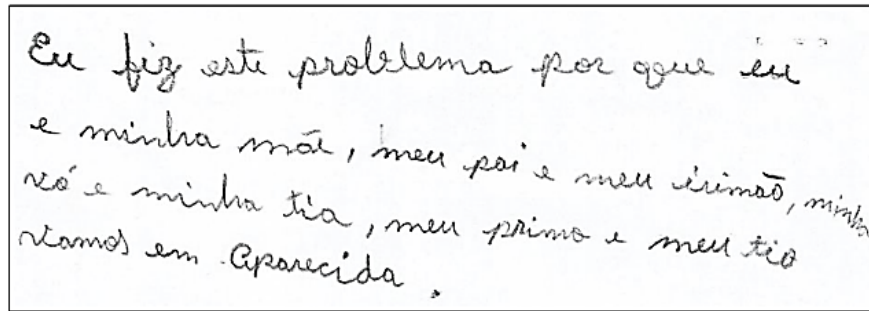
Por que eu fui no pastelaria e não sabia qual escolher.

Fonte: Altoé (2017, p. 158)

Figura 2 – Justificativa do aluno A21-11


Porque essa história que eu fiz aconteceu comigo na vida real, quando eu fui no sorveteria eu não sabia qual calda e sorvete eu ia escolher.

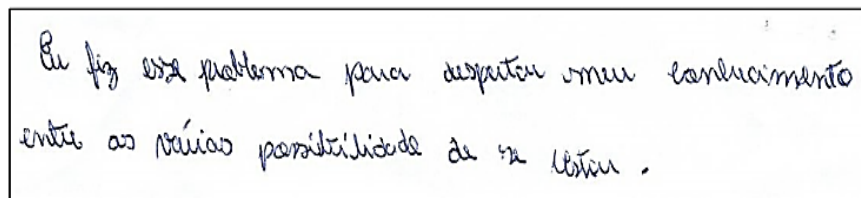
Fonte: Altoé (2017, p. 158)

Figura 123 – Justificativa do aluno A13-10


Eu fiz este problema por que eu e minha mãe, meu pai e meu irmão, minha avó e minha tia, meu primo e meu tio vamos em Aparecida.

Fonte: Altoé (2017, p. 159)

Para além dessas justificativas, identificamos outra redigida pelo aluno A04-10, na qual deixa claro que a formulação daquele problema foi um caminho para “despertar” o seu conhecimento a respeito das várias possibilidades de se vestir. O desejo, segundo Chica (2001), é que nossos alunos, por meio da formulação, “[...] sejam agentes de suas aprendizagens, se tornem leitores e escritores em matemática, que produzam algo que tenha sentido e utilidade para eles”. A afirmativa do aluno A04-10 foi uma evidência importante no campo da aprendizagem matemática e de uma matemática utilitária, ou seja, algo que faça sentido para quem a estuda. Vejamos, portanto, sua justificativa na Figura 13.

Figura 43 – Justificativa do aluno A04-10


Eu fiz este problema para despertar meu conhecimento entre as várias possibilidades de se vestir.

Fonte: Altoé (2017, p. 159)

Assim, entendemos que os problemas formulados carregaram consigo uma relação contexto x autor, perpassando por motivações pessoais e interesses em descobrir respostas. É nesse sentido que indicamos o trabalho em sala de aula a partir desses problemas, pois suas estruturas e soluções podem ser importantes para quem o formulou.

Considerações Finais

A partir das análises, concluímos que a atividade “Um passeio à lanchonete”, no campo dos estudos de combinação, no eixo de Produtos de Medidas, tem potencial educativo à medida que contribuiu para a prática/processo de formulação de problemas nas aulas de matemática,

cujas produções, em sua maioria, abarcaram o raciocínio combinatório, possibilitando discussões relativas à multiplicação.

As propostas apresentadas pelos estudantes, a partir das suas justificativas, foram carregadas de motivações, interesses e contextos, tornando-as bons problemas de serem debatidos e solucionados em sala de aula. A partir disso, o trabalho com essas produções pode despertar o interesse dos discentes pela resolução de problemas e entusiasamá-los na investigação.

Além dessas evidências, reforçamos que os estudantes ainda encaram a formulação de problemas como algo novo e diferente nas aulas de matemática, apresentando, também, dificuldades no processo de elaboração. Muitos problemas carregaram lacunas que possibilitariam diferentes debates em sala de aula, levando a reestruturações para melhor serem caracterizados de pensamento combinatório.

Sendo assim, esperamos ter contribuído para pensarmos o ensino de matemática, discutindo, propondo e apresentando novas evidências do potencial educativo de se trabalhar com a Formulação de Problemas.

Referências

ALMOULOUD, S. A.; COUTINHO, C. D. Q. E. S. Engenharia Didática: características e seus usos em trabalhos apresentados no GT-19/ANPEd. **Revista Eletrônica de Educação Matemática**, Florianópolis, v. 3, n. 1, p. 62-77, 2008.

ALTOÉ, R. O. **Formulação de problemas do campo conceitual multiplicativo no ensino fundamental**: uma prática inserida na metodologia de resolução de problemas. 2017. Dissertação (Mestrado em Educação em Ciências e Matemática) - Instituto Federal do Espírito Santo, Vitória, 2017.

ALTOÉ, R. O.; FREITAS, R. C. O. **Formulação de Problemas**: multiplicação e divisão. Vitória: Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Espírito Santo, 23 p. 2017.

ARTIGUE, M. Engenharia Didática. In: _____. **Didática das Matemáticas**. Trad. Maria José Figueiredo. Lisboa: Instituto Piaget, 1996, p. 193-217.

BOAVIDA, A. M. R. *et al.* A Experiência Matemática no Ensino Básico. In: **Programa de Formação Contínua em Matemática para Professores dos 1.º e 2.º Ciclos do Ensino Básico**. Lisboa/PT, p. 27-30, 2008.

BRASIL. **Base Nacional Comum Curricular**: Educação Infantil e Ensino Fundamental. Brasília: MEC/Secretaria de Educação Básica, 2017.

CHICA, C. H. Por que formular problemas? In: _____ **Ler, escrever e resolver problemas: habilidades básicas para aprender matemática.** reimp. São Paulo: Artmed, p. 151-173, 2001.

D'AMORE, B. **Il problema di matematica nella pratica didattica.** Modena: Digital Docet, 2014.

DANTE, L. R. **Formulação e resolução de problemas de matemática: teoria e prática.** São Paulo: Ática, 2009.

GONTIJO, C. H. **Relações entre criatividade, criatividade em matemática e motivação em matemática de alunos do ensino médio.** 2007. Tese (Doutorado em Psicologia) – Universidade de Brasília, Brasília, 2007.

MEDEIROS, K. M.; SANTIAGO, M. S. Formulação e resolução de problemas matemáticos na sala de aula: explicitando o intertexto. In: **XXIV Seminário de Investigação em Educação Matemática.** Braga: APM & CIED da Universidade de Minho, p. 583-585, 2013.

MOREIRA, M. A. **Teorias de aprendizagem.** 2. ed. ampl. reimpr. São Paulo: E.P.U, 2015.

NCTM. **Professional Standards: for School Mathematics.** Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics, 1991.

PAIS, L. C. **Didática da matemática: uma análise da influência francesa.** Belo Horizonte: Autêntica, 2011.

PINHEIRO, S. **A criatividade na resolução e formulação de problemas: uma experiência didática numa turma do 5º ano de escolaridade.** 2013. 217f. Dissertação (Mestrado em Educação) – Programa de Especialidade em Didática da Matemática e das Ciências. Instituto Politécnico de Viana do Castelo, Viana de Castelo/PT, 2013.

SILVER, E. A. On mathematical problem posing. **For the Learning of Mathematical.** v. 14, n. 1, p. 19-28, 1994.

SOLÉ, I. Disponibilidade para a aprendizagem e sentido da aprendizagem. In: COLL, C. *et al.* **O construtivismo na sala de aula.** Tradução de Cláudia Schilling. 6. ed. São Paulo: Ática, p. 29-55, 2009.

VERGNAUD, G. **A criança, a matemática e a realidade: problemas do ensino de matemática na escola elementar.** Trad. Maria Lucia Faria Moro. 3. ed. rev. Curitiba: Ed. da UFPR, 2014.

VILA, A.; CALLEJO, M. L. **Matemática para aprender a pensar: o papel das crenças na resolução de problemas.** Porto Alegre: Artmed, 2006.

*Recebido em 22 de julho de 2019.
Aprovado em 30 de agosto de 2019.*