ISSN 2177-9309

emteia Revista de Educação Matemática e Tecnológica Iberoamericana

Universidade Federal de Pernambuco

Pós-Graduação em Educação Matemática e Tecnológica EDUMATEC

SITUAÇÕES DIDÁTICAS COM O GEOGEBRA: CONSTRUINDO O ARCO CAPAZ E QUADRILÁTEROS INSCRITÍVEIS

Didactic situations with the geogebra: building the capable arch and inscribed quadrilaterals

Luana Cerqueira de Almeida
luanacqra@gmail.com

Wesley Ferreira Nery
wesleyferreiranery5@gmail.com

Vívian Caroline da Silva de Sá
viviancsa@gmail.com

Eurivalda Ribeiro dos Santos Santana
eurivalda@uesc.br

Resumo

O presente trabalho tem o objetivo de analisar possíveis influências do ambiente computacional GeoGebra no processo de construção de conhecimentos relativos a quadriláteros inscritíveis em uma circunferência e arco capaz. Para tanto, elaboramos uma sequência didática (SD) tendo como pressuposto a Teoria das Situações Didáticas de Guy Brousseau. Metodologicamente nos baseamos em alguns pressupostos da Engenharia Didática. A SD foi trabalhada com estudantes de Licenciatura em Matemática de uma Universidade Pública na Bahia. A partir da análise, identificamos que o GeoGebra influenciou positivamente no desenvolvimento da SD; por ser um software dinâmico ele possibilitou novas descobertas não previstas na elaboração da SD e no momento da análise a priori. Por fim, os aspectos teóricos e metodológicos adotados foram importantes para a construção da SD, bem como a análise dos dados, visto que esses fatores nos deram condições de inferir que os estudantes aprenderam os conceitos propostos a partir das respostas apresentadas, sobretudo no momento da socialização.
Palavras-Chave: GeoGebra. Arco Capaz. Quadriláteros Inscritíveis. Teoria das Situações Didáticas. Engenharia Didática.

Abstract

The present work has the objective to analyze possible influences of the computational environment GeoGebra in the process of construction of knowledge related to inscribed quadrilaterals in a circumference and able arc. To do so, we elaborated a didactic sequence (SD) with the assumption of Guy Brousseau's Theory of Educational Situations. Methodologically we base ourselves on some assumptions of Didactic Engineering. SD was worked with undergraduate students in Mathematics from a Public University in Bahia. From the analysis we identified that GeoGebra positively influenced the development of the SD, being a dynamic software, it made possible new discoveries not foreseen in the elaboration of SD and at the moment of a priori analysis. Finally, the theoretical and methodological aspects adopted were important for the construction of SD, as well as the data analysis, since, these factors allowed us to infer that students learned the concepts proposed from the answers presented, especially in the moment of socialization.
Keywords: GeoGebra, Able Arc, Inscribed Quadrilaterals, Theory of Educational Situations, Didactic Engineering.

Introdução

O National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) apresenta princípios e normas que devem pautar o ensino de matemática. Ensino este que, segundo o NCTM (2000), necessita ser organizado de forma a possibilitar aos alunos a formulação de conjecturas, procurando argumentações lógicas que as ratifiquem ou que forneçam contraexemplos que as refutem. Particularmente, no ensino de geometria, o aluno também precisa ser instigado nessa perspectiva, o que pode ser facilitado pelo uso de tecnologias como *softwares* de geometria dinâmica, uma vez que "a tecnologia é essencial no ensino e na aprendizagem da matemática; influencia a matemática que é ensinada e melhora a aprendizagem dos alunos" (NCTM, 2000, p. 26).

Estes *softwares* de geometria dinâmica possibilitam aos alunos exploração de uma grande variedade de exemplos que podem corroborar o processo de construção de conjecturas e sua devida justificativa ou refutação. A respeito da justificativa, o NCTM aponta que

> A avaliação, a construção e a comunicação de argumentos matemáticos apropriados permanecem, no entanto, centrais ao estudo da geometria. Os alunos deverão compreender o poder da demonstração dedutiva, ao estabelecerem a validade de resultados gerais a partir de determinadas condições. A ênfase deverá ser colocada na produção de argumentos lógicos e na sua apresentação eficaz, por meio de uma explicação cuidadosa do raciocínio [...] (NCTM, 2000, p. 366).

Não obstante, os professores precisam estar atentos ao uso destes *softwares* de maneira que eles contribuam na percepção por parte dos alunos sobre a necessidade de demonstrar ou refutar conjecturas e, não simplesmente, comprovar essas afirmações para alguns exemplos particulares. É possível que os professores

> [...] deparam-se com um desafio particular, o de integrar tecnologias no seu ensino como forma de encorajar os alunos a explorar ideias e a desenvolver conjecturas, enquanto os ajudam a compreender a necessidade de as verificar ou procurar contraexemplos. (NCTM, 2000, p. 366).

É essencial que se busque trabalhar com as tecnologias nas aulas de matemática, em especial, os *softwares* de geometria dinâmica. Uma possibilidade para a efetivação do trabalho com esses *softwares* é o uso de Sequências Didáticas (SD) que podem possibilitar que os alunos adquiram novos saberes. Neste sentido, uma SD pode ser um instrumento de articulação entre o uso de *softwares* de geometria dinâmica e o desenvolvimento do hábito, nos alunos, de construção de argumentos lógicos para comprovarem suas conjecturas ou refutá-las.

Uma sugestão para a elaboração de uma SD é o uso da Teoria das Situações Didáticas (TSD) que tem por objeto central de estudo “a situação didática na qual são identificadas as interações estabelecidas entre professor, aluno e saber” (ALMOULOUD, 2014, p. 32).

Na implementação de uma SD, no contexto da TSD, os alunos passam pelos processos de ação, formulação, validação e institucionalização, os quais possibilitam, com o auxílio do *software*, a exploração de uma grande variedade de exemplos; possibilitam a identificação das características e propriedades geométricas, auxiliando nos processos de validação da situação didática e, posteriormente, na demonstração. Nesse sentido, Brunheira e Ponte (2016) afirmam que os alunos devem familiarizar-se, gradualmente, com as definições, o que deve resultar de sua experiência matemática em vez de precedê-la.

Neste trabalho, focamos o olhar para o processo de formulação e validação no desenvolvimento de uma SD sobre figuras planas, mais especificamente quadriláteros inscritíveis em uma circunferência e arco capaz, por serem conceitos recomendados para serem trabalhados no Ensino Fundamental - anos finais. Essa recomendação se ratifica em documentos atuais como a Base Nacional Comum Curricular que sugere o trabalho com esses conceitos no 9º ano do Ensino Fundamental (BRASIL, 2018). O uso do *software* de geometria dinâmica GeoGebra foi escolhido por ser livre e de fácil instalação em computadores e celulares. Temos o objetivo de analisar possíveis influências do ambiente computacional GeoGebra no processo de construção de conhecimentos relativos a quadriláteros inscritíveis em uma circunferência e arco capaz.

Teoria das Situações Didáticas

A Teoria das Situações Didáticas foi desenvolvida pelo pesquisador francês Guy Brousseau em 1986, tendo como objetivo

> [...] caracterizar um processo de aprendizagem por uma série de situações reprodutíveis, conduzindo frequentemente à modificação de um conjunto de comportamentos dos alunos. Essa modificação é característica da aquisição de um determinado conjunto de conhecimentos, da ocorrência de uma aprendizagem significativa (ALMOULOUD, 2014, p. 31-32).

Nessa teoria, o conceito de Situação Didática é objeto central, o qual, de acordo com Brousseau (1996), é todo o contexto que cerca o aluno, nele incluídos o professor e o sistema educacional. Em outras palavras, para além do foco no sujeito cognitivo em uma situação didática, o importante são as interações que ocorrem entre o professor, os alunos e o saber (ALMOULOUD, 2014).

De acordo com a TSD, em uma situação didática, existem momentos em que o professor tem o controle e outras que ele não tem condições de controlar, nestes últimos sendo o aluno o protagonista. Dessa forma, ela é dividida em duas partes: as situações adidáticas e as didáticas.

As situações adidáticas dizem respeito aos momentos em que o aluno tem autonomia total no processo de resolução, momento em que ele se questiona, reflete, busca encontrar a solução e tirar suas conclusões. Nesse momento, o professor acompanha o processo buscando identificar as possíveis conclusões as quais os alunos estão chegando, assim ele assume o papel de mediador.

Ainda podemos caracterizar as situações adidáticas como o momento em que o professor propõe um problema ao aluno, sem revelar suas intenções didáticas, e este aceita o desafio de assumir a responsabilidade de desenvolver tal atividade por si próprio, e não por uma determinação do professor ou da escola. Mais detalhadamente temos que

> A *situação adidática*, como parte essencial da *situação didática*, é uma situação na qual a intenção de ensinar não é revelada ao aprendiz, mas foi imaginada, planejada e construída pelo professor para proporcionar a estas condições favoráveis para apropriação do novo saber que deseja ensinar. (ALMOULOUD, 2014, p. 33).

Assim, tendo em vista os conceitos supracitados, Brousseau (1996) classifica a TSD em quatro situações: ação, formulação, validação e institucionalização. Sendo as três primeiras situações adidáticas, as quais o aluno é convidado a evoluir de forma autônoma e a última etapa uma situação didática.

Na situação de ação, em um momento de tomada de decisão, o sujeito age conforme as regras buscando solucionar a situação de forma experimental, não se preocupando em verificar o que fundamenta a sua resolução. Porém, é ainda nesse momento que o aluno precisa julgar os resultados encontrados sem a interferência do professor. Na situação de formulação, o sujeito constrói uma estratégia e deve ser capaz de comunicá-la por meio de uma linguagem compreensível a todos, seja tal estratégia válida ou não. Na validação, o aluno é capaz de mostrar a validade da sua solução, buscando justificar o porquê da sua resolução está correta, isto é, o aluno é capaz de compreender os argumentos que lhe são apresentados sem deixar-se levar por falas vazias e redundantes, nessa fase o aluno tem a habilidade de contestar afirmações e realizar demonstrações, contudo demonstrar não é obrigatório e sim o uso de uma explicação com uma fundamentação que convença os seus pares, a ferramenta mover do GeoGebra é um fator que contribui nesse processo de validação, pois ao movimentar o estudante pode observar a regularidade existente, ou seja, o que se mantem invariante.

E por fim, a fase da institucionalização, sendo esta etapa uma situação didática, o professor assume o protagonismo tornando o conhecimento que foi construído nas fases anteriores, pelos alunos, um saber social, é o momento em que o professor age diretamente com a turma. É quando ele busca desconstruir conhecimentos equivocados e firmar aqueles que foram construídos tendo em vista o saber em jogo. Os conhecimentos obtidos pelos educandos na fase adidática têm suas particularidades devido ao contexto e à situação proposta, surgindo, assim, a necessidade de uma formalização matemática, para que este conhecimento tenha validade científica, o que consiste na relação entre o saber teórico e o conhecimento adquirido nas fases de ação, formulação e validação.

Aspectos Metodológicos

Nesta pesquisa, desenvolvemos e aplicamos uma sequência didática; para tanto, nos apoiamos metodologicamente em alguns aspectos da Engenharia Didática que, segundo Artigue (1996, p. 196, grifo do autor) “caracteriza-se por um esquema experimental baseado em ‘realizações didáticas’ na sala de aula, isto é, na concepção, na realização, na observação e na análise de sequências de ensino”.

Essa metodologia busca extrair dados da realidade e comparar com as hipóteses que foram construídas antes da intervenção. Segundo Artigue (1996), essa metodologia é constituída de quatro fases, a saber: análises prévias; concepção e análise *a priori* das situações didáticas; experimentação; análise *a posteriori* e validação.

Na primeira fase, análises prévias, é o momento em que o pesquisador busca conhecer o que já existe sobre o seu objeto de estudo, bem como o marco teórico que fundamenta o seu estudo. Em nosso caso, ângulos inscritos na circunferência e suas consequências e a Teoria das Situações Didáticas, além do que dizem os documentos oficiais, a exemplo do NCTM (2000) a respeito do ensino e aprendizagem de geometria, nesse caso. É necessário que o pesquisador se aproprie desses conceitos, pois são de fundamental importância na elaboração da sequência didática e no momento da análise *a priori*, momento que consiste em conceber, elencar o objetivo de cada atividade e as possíveis resoluções matemáticas que se espera encontrar no momento da experimentação, bem como as previsões didáticas. Para Artigue (1996, p. 205), "o objetivo da análise *a priori* é, pois, determinar de que forma permitem as escolhas efetuadas controlar os comportamentos dos alunos e o sentido desses comportamentos".

A experimentação, segundo Machado (2010), é o momento em que se põe em prática o que foi planejado, em que se apresenta o objetivo do estudo, se aplica a sequência didática e é feito o registro das observações. Por fim, a análise *a posteriori* e validação que representa o momento de confronto entre os resultados obtidos na experimentação com as previsões da análise *a priori*, para possíveis validações.

Para a experimentação, tivemos como sujeitos quatro estudantes do 5º semestre de Licenciatura em Matemática de uma Universidade Federal. Os critérios de escolha dos sujeitos foram: estar cursando Licenciatura em Matemática; se dispor a ser voluntário; ter cursado previamente um componente curricular na graduação sobre geometria, no qual não foram abordados os conceitos principais da sequência, porém houvessem estudado os conceitos necessários para o desenvolvimento das atividades.

Não era critério de escolha dos sujeitos ter vivenciado experiências com sequências didáticas que fazem uso do GeoGebra. Contudo, os quatro estudantes tinham experiência com o uso do *software* e isso não causou estranheza em relação ao tipo de trabalho que realizamos.

A sequência didática, composta de oito atividades, foi trabalhada em um encontro de três horas com os participantes organizados em duplas. As atividades foram entregues aos estudantes, uma de cada vez, de maneira impressa e, em duplas, eles tinham um *notebook* para resolver as atividades. Após a resolução de cada atividade pelas duplas, realizávamos a institucionalização e entregávamos a próxima atividade.

Para a coleta de dados, fizemos uso dos registros dos estudantes nas atividades impressas, assim como também pedimos para salvarem cada atividade desenvolvida no GeoGebra e fizemos gravação de áudio durante o desenvolvimento da sequência didática.

A SD continha oito atividades, sobre ângulo inscrito e ângulos excêntricos interno e externo, quadrilátero inscritível, ângulo de segmento e arco capaz, mas para efeito desse estudo discutiremos detalhadamente as quatro atividades sobre quadrilátero inscritível, ângulo de segmento e arco capaz. Desse modo, os conhecimentos construídos sobre ângulos inscritos na circunferência estavam disponíveis para serem utilizados.

A sequência e suas análises *a priori* e *a posteriori*

Apresentaremos, a seguir, as atividades da sequência didática acompanhadas de suas análises *a priori* e *a posteriori*. Na análise *a priori*, destacamos os objetivos, as possibilidades de resoluções e as discussões didáticas. Na análise *a posteriori* e na validação usaremos nomes fictícios para os sujeitos da pesquisa, a saber, Lucas e Liz que compuseram a dupla 1 e Fábio e Gustavo que compuseram a dupla 2. Ainda, usaremos a terminologia Pesquisador 1, Pesquisador 2 e Pesquisador 3 para indicar as pessoas que conduziram a aplicação da sequência didática e foram responsáveis pelas institucionalizações.

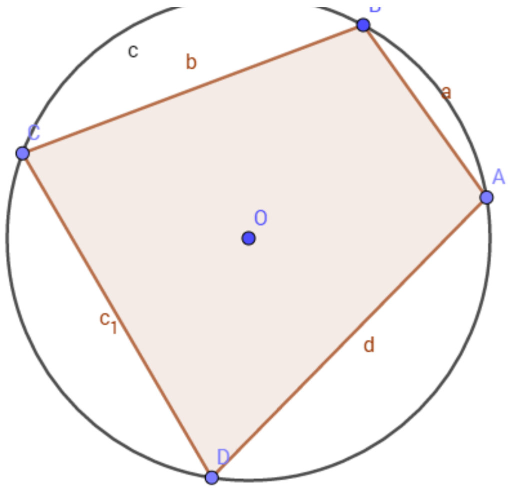
ATIVIDADE 1 – Quadriláteros Inscritíveis

(a) Crie uma circunferência de centro O e um de seus pontos A;
(b) Construa um quadrilátero ABCD com os vértices pertencentes à circunferência;
(c) Qual o valor da soma das medidas dos ângulos não adjacentes desse quadrilátero?
(d) Movimente os vértices do quadrilátero e verifique o que ocorre com o valor das somas determinadas anteriormente.
(e) O que você pode conjecturar? Justifique matematicamente essa conjectura.

Análise *a priori*

Essa atividade tem por objetivo que os estudantes conjecturem que os ângulos não adjacentes de um quadrilátero inscrito em uma circunferência são suplementares. Após as construções solicitadas nos itens (a) e (b), esperávamos que os estudantes apresentassem como solução ao item (c) algo próximo de "a soma das medidas dos ângulos não adjacentes é 180º". E, após a realização do que foi solicitado no item (d), apresentem como solução ao item (e) "os ângulos internos não adjacentes de um quadrilátero inscritível em uma circunferência são suplementares", com a seguinte justificativa matemática. A partir da Figura 1 temos:

Figura 1 – Quadrilátero Inscritível



$\hat{A}$ é inscrito $\rightarrow \hat{A} = \frac{\widehat{DCB}}{2}$

$\hat{C}$ é inscrito $\rightarrow \hat{C} = \frac{\widehat{DAB}}{2}$

Isso implica em, $\hat{A} + \hat{C} = \frac{\widehat{DCB} + \widehat{DAB}}{2} = \frac{360°}{2} = 180°$

Analogamente, $\hat{B} + \hat{D} = 180°$.

Nos itens (a), (b) e (c), acreditamos que os alunos estariam vivenciando a fase adidática de ação, pois realizariam as atividades mais de maneira operacional, sem se preocupar com argumentos que validem as ações realizadas. No item (d) entendemos que os alunos vivenciariam a fase adidática de formulação, pois observariam que mesmo mudando a representação o resultado seria o mesmo; nesse momento esperávamos que eles começassem a fazer algumas conjecturas. No item (e), eles estariam buscando elementos que justificassem as conjecturas observadas nos itens (a), (b), (c) e (d), realizando uma prova matemática, vivenciando, assim, a fase adidática de validação.

Análise *a posteriori* e validação

As duas duplas conseguiram desenvolver os momentos adidáticos de ação, formulação e validação, conseguindo concluir a conjectura esperada, o que pode ter sido favorecido, em determinada medida, pelo uso do GeoGebra, uma vez que este *software* permitiu a investigação de diversos exemplos e a movimentação dos objetos construídos corroborando a construção da conjectura esperada. Contudo, a dupla 1 apresentou dificuldades no momento de expressar a sua conclusão como podemos ver nas falas a seguir.

> Lucas: Então, se eu pego dois pedaços quaisquer e eu somo vai dar 360º. Então, isso quer dizer o que? Se está enxergando aqui, então a soma desses dois vai dar 180º. Agora, como escrever isso?

Assim, mesmo com a utilização do GeoGebra a dupla 1 não conseguiu expressar de imediato a conclusão esperada no item (e), o que foi alcançado mediante as devoluções:

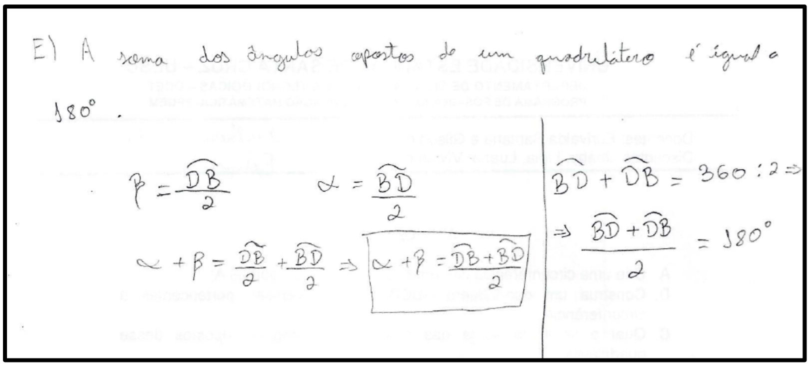
> Pesquisador 1: Esses dois ângulos são o quê, um em relação ao outro? [...] E quando estamos falando de polígonos, esses lados são o quê? Pensem um pouco.

A dupla 2 compreendeu a importância de fazer uso de um quadrilátero qualquer e não um particular como é possível observar no diálogo.

> Fábio: Construa um quadrilátero ABCD.
>
> Gustavo: Com os vértices pertencentes a circunferência.
>
> Fábio: Então pode ser qualquer quadrilátero.
>
> Gustavo: É, mas tem que...
>
> Fábio: Só os pontos que têm que estar na circunferência.
>
> Gustavo: É um quadrilátero qualquer.
>
> Fábio: Ah sim, é!

Esse fato foi importante, pois eles observaram que a conjectura realizada é válida para um quadrilátero qualquer e não um caso particular. A Figura 02 apresenta a resolução dada pela dupla 2 ao item (e), o que evidencia a fase de validação.

Figura 02: Resolução da dupla 2 ao item (e)


E) A soma dos ângulos opostos de um quadrilátero é igual a 180°.

$\beta = \frac{\widehat{DB}}{2}$ $\alpha = \frac{\widehat{BD}}{2}$

$\alpha + \beta = \frac{\widehat{DB}}{2} + \frac{\widehat{BD}}{2} \Rightarrow \boxed{\alpha + \beta = \frac{\widehat{DB} + \widehat{BD}}{2}}$

$\widehat{BD} + \widehat{DB} = 360 : 2 \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{\widehat{BD} + \widehat{DB}}{2} = 180°$

Fonte: Dados da pesquisa (2017).

A dupla 2, após vivenciar as fases adidáticas de ação e formulação, apresentou a validação expressa na Figura 02, por meio da escrita em linguagem materna e ao apresentar uma demonstração para a conjectura observada. Entretanto, mesmo aparecendo em sua fala, como expresso no diálogo anterior, a dupla não se atentou em sua escrita para o fato de que a conjectura realizada ser válida para quadriláteros inscritíveis a uma circunferência o que demonstra a importância do momento de institucionalização em que os pesquisadores chamaram atenção para esse fator.

Além disso, ao movimentar a construção, os estudantes observaram que nem sempre a soma era 180º. Tal fato foi constatado pelo uso do GeoGebra, que possibilitou aos estudantes observarem que a propriedade observada é válida para os quadriláteros convexos, mas não para os não convexos. Esse fator não foi previsto na análise *a priori.* Assim, o uso desse *software* contribuiu para além do esperado na atividade proposta, permitindo novas investigações e descobertas como podemos perceber no diálogo.

> Gustavo: Movimente. Vamos movimentar para ver o que acontece.
> Fábio: Continua.
> Gustavo: Agora deu 360º. Porque mudou?
> Fábio: Porque não é mais convexo.

Outros fatores foram observados pela dupla 2, como a necessidade de ser inscritível em uma circunferência ou não, como pode-se observar no diálogo a seguir.

> Gustavo: Eu acho que não precisa ser inscrito na circunferência, acho que é qualquer.
> Fábio: Aí eu não sei… A gente está testando no inscrito, então bota aí.
> Gustavo: Eu acho que é qualquer quadrilátero… convexo.
> Fábio: Anote na circunferência.
> Fábio: É isso, mas a gente está testando na circunferência.
> Gustavo: Justifique matematicamente. A gente fez essa justificativa, eu fiz, se eu não me engano [...].
> Fábio: Eu sei porquê! Basta traçar um segmento aí. Vai ter dois triângulos, a soma dos ângulos internos [...].
> Gustavo: Não.
> Gustavo: É por isso aí mesmo, só que tem que lembrar como é.
> Gustavo: Como é aquela propriedade dos ângulos internos? A soma dos ângulos [...].
> Fábio: [...] internos de um triângulo é sempre 180°.
> Gustavo: Não adjacente a ele.
> Gustavo: Como é aquele negócio?
> Fábio: Os ângulos opostos são [...].
> Fábio: Ah, já sei Gustavo! Tem que ter circunferência, não tem jeito.

Assim, mesmo com alguns entraves, as duas duplas conseguiram justificar matematicamente a conjectura a que chegaram seguindo o raciocínio que foi previsto na análise *a priori*, o que possibilitou a institucionalização da propriedade pretendida.

ATIVIDADE 2 – Quadriláteros Inscritíveis

a) Construa um quadrilátero ABCD, tal que a soma de seus ângulos opostos tenha valor 180º.
b) Crie uma circunferência a partir de três vértices do quadrilátero. O que você observou?
c) Movimente qualquer um dos vértices do quadrilátero e observe o que ocorre. O que você pode concluir?

Análise *a priori*

Objetivamos com essa atividade que os estudantes observassem que se os ângulos opostos de um quadrilátero são suplementares então o quadrilátero é inscritível em uma circunferência.

Após as construções solicitadas nos itens (a) e (b), esperamos que os estudantes identifiquem que o quadrilátero construído é inscritível em uma circunferência. No item (c), espera-se que o estudante apresente como resposta que todo quadrilátero cujos ângulos opostos são suplementares é inscritível em uma circunferência.

O retângulo é um quadrilátero que atende às exigências da atividade, assim, os estudantes podem fazer essa construção. Caso isso aconteça, após a investigação do item (c), uma possível devolução, por meio de questionamentos feitos pelo mediador de modo que possibilite ao estudante o retorno ao problema a partir de reflexões sobre a devolução, seria perguntar se esse é o único quadrilátero cujos ângulos opostos são suplementares. Caso os estudantes tenham dificuldade em construir um quadrilátero qualquer que atenda a essas características, sugeriríamos o uso da ferramenta ângulo com amplitude fixa.

Nos itens (a) e parte do (b), os estudantes possivelmente estariam vivenciando a fase de *ação,* pois operacionalizariam e observariam o que acontece sem buscar verificar a sua justificativa. No item (b), começa a formulação, momento em que se buscam elementos que possibilitem justificar o que foi observado e a validação se dá em (c), se o quadrilátero for qualquer, por meio da ferramenta arrastar do GeoGebra, que permite criar uma quantidade muito grande de exemplos em um tempo curto.

Análise *a posteriori* e validação

Os itens (a) e (b) foram desenvolvidos pelas duas duplas chegando a observações equivalentes, uma que o quadrilátero está inscrito na circunferência e a outra que a circunferência circunscreve o quadrilátero. Nesse momento, as duplas vivenciaram as fases adidáticas de ação e formulação.

No item (c) a dupla 2 conseguiu chegar à conclusão prevista na análise *a priori*, formulando que "Todo quadrilátero cuja soma dos ângulos opostos vale 180º é inscritível em uma circunferência". A dupla 1 chegou ao recíproco da conclusão esperada, o que não condiz com a construção proposta, tendo em vista que foi solicitada a construção de um quadrilátero com ângulos opostos suplementares e a posterior criação de uma circunferência a partir de três vértices deste quadrilátero para concluir que essa circunferência está circunscrita ao quadrilátero. Assim, a dupla 1 inferiu que "Todo quadrilátero inscrito em uma circunferência tem a soma de seus ângulos opostos igual a 180º", o que colocou a soma dos ângulos opostos como uma consequência da inscrição do quadrilátero na circunferência, sendo que essa era a hipótese. Dessa forma, mesmo vivenciando a fase adidática de ação, a dupla 1 apresentou dificuldade em formular sua resposta a partir da construção feita.

Quando a dupla 1 leu os itens (a) e (b), buscou estratégias para desenvolvê-los e, mesmo sendo a primeira instrução construir um quadrilátero com ângulos opostos suplementares e só no item (b) construir uma circunferência a partir de três vértices desse quadrilátero, a dupla pensou em construir primeiro a circunferência, o que pode ser ratificado com o seguinte diálogo.

> Lucas: Então eu vou criar uma circunferência primeiro. Posso?
> [...].
> Pesquisador 2: Assim, tem que seguir os passos. O que é que está pedindo?
> [...].
> Lucas: Não posso criar uma circunferência [primeiro].
> Liz: Pode sim.
> Pesquisador 2: Não.
> Lucas: Tenho que construir um quadrilátero [...].

O pensamento supracitado, explicitado pela dupla 1, pode ter sido a causa desta dupla chegar ao recíproco da conclusão esperada no item (c); nota-se que mesmo o Pesquisador 2 fazendo uma devolução, a estudante Liz manteve a ideia de construir primeiro a circunferência para em seguida construir o quadrilátero. E, mesmo Lucas tendo expressado que tinha que construir o quadrilátero, a dupla escreveu o recíproco que é a afirmativa concluída na atividade anterior. Inclusive, no momento da institucionalização, Lucas afirmou que a conjectura elaborada no item (c) estaria incorreta. Vejamos o trecho da institucionalização.

> Lucas: Eu acho que essa resposta aqui seria para a outra atividade, cinco, todo quadrilátero inscrito em uma circunferência tem a soma de seus ângulos opostos igual a 180º.
>
> [...]
>
> Fábio: Essa é a volta.
>
> Lucas: É.

Dessa forma, a dupla 1 não conseguiu formular e validar o que foi previsto na análise *a priori* e as devoluções realizadas não foram suficientes para que a validação acontecesse. Esse fato demonstra a importância do momento de institucionalização, pois, segundo Brousseau (1996), é neste momento que o professor apresenta o conceito de maneira formal, tirando possíveis dúvidas ou conclusões equivocadas que os estudantes podem ter identificado durante o desenvolvimento da atividade.

Para construir o quadrilátero solicitado no item (a), as duas duplas discutiram e fizeram diversas tentativas até efetivarem a construção. Neste processo, o GeoGebra foi importante uma vez que possibilitou a tentativa de construção por diversos caminhos diferentes.

Ainda em relação à construção do quadrilátero, como havíamos previsto na análise *a priori*, uma das ideias suscitadas foi a construção de um quadrilátero particular que atendesse à propriedade solicitada dos ângulos opostos serem suplementares, como podemos ver a seguir.

> Lucas: Tenho que construir um quadrilátero [...].
>
> Fábio (dupla 2): Constrói um quadrado.
>
> Lucas: Mas o quadrado é caso particular.
>
> Fábio: Ah! Não pode ser caso particular.
>
> Pesquisador 2: O quadrado é um [quadrilátero cuja soma dos ângulos opostos é 180º], mas é um caso particular.

Mesmo, inicialmente, querendo fazer a construção a partir de um caso particular, percebe-se que os estudantes identificaram que para desenvolver a investigação e formular uma solução era necessária uma construção que atendesse ao que estava sendo solicitado, mas sem ser particular.

ATIVIDADE 3 – Ângulo de Segmento

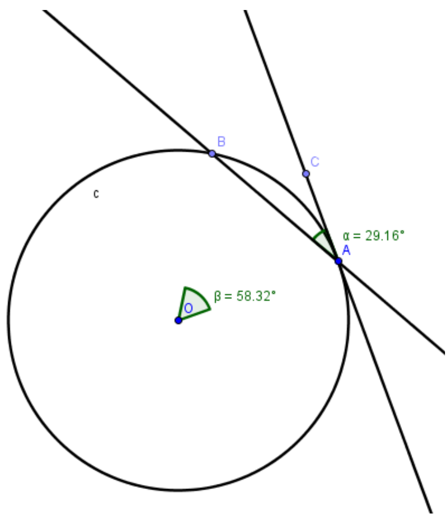
Ângulo de segmento relativo a uma circunferência é o ângulo que tem o vértice num ponto da circunferência, um dos lados é uma secante e o outro lado é tangente à circunferência.

a) Crie uma circunferência de centro O passando pelo ponto A;
b) Marque um ponto B, distinto de A, sobre essa circunferência;
c) Trace uma reta tangente à circunferência passando pelo ponto A;
d) Trace uma reta secante à circunferência passando pelos pontos A e B;
e) Marque um ponto C sobre a reta tangente à circunferência, de tal modo que o ponto C fique do lado do arco menor formado pelos pontos A e B;
f) Determine as medidas do arco AB e do ângulo BÂC.
g) Existe alguma relação entre as medidas do arco AB e a medida do ângulo de segmento BÂC? Investigue!
h) O que você pode observar?

Análise *a priori*

Com essa atividade esperávamos que os alunos conjecturassem que a medida do ângulo de segmento representa a metade da medida do ângulo central correspondente. Após a realização do que é proposto nos itens de (a) a (f), esperávamos que os estudantes apresentassem uma construção próxima da Figura 3.

Figura 3 – Ângulo de segmento



Fonte: Elaborado pelos autores.

Dos itens (a) ao (f) acreditamos que os estudantes estariam vivenciando as fases adidáticas de ação, pois estariam apenas operacionalizando o que era solicitado sem necessariamente observar comportamentos, fazer conjecturas. No item (e) era esperado que os estudantes marcassem o ponto C sobre a reta tangente à circunferência, mas sem observar a necessidade de estar do lado do arco menor.

No item (g) almejávamos que os estudantes investigassem a construção e relacionassem a medida do arco AB com a medida do ângulo BÂC e apresentassem como possível resposta "a medida do arco AB é o dobro do ângulo BÂC". Neste momento, o estudante estaria vivenciando a fase adidática de formulação ao apresentar a conjectura observada. No item (e), esperávamos que os alunos realizem a validação e conjecturassem, a partir de suas construções, a propriedade relativa ao ângulo de segmento. Como possível resposta, esperávamos que eles concluíssem que "a medida do ângulo de segmento é metade do ângulo central a ele associado", vivenciando assim a fase de validação.

Análise *a posteriori* e validação

Os estudantes participaram ativamente do processo de resolução dessa atividade, não apresentando dificuldade na construção solicitada dos itens (a) ao (e); era previsto na análise *a priori* que os estudantes poderiam marcar o ponto C em qualquer lugar sobre a reta tangente e não necessariamente em local correspondente ao menor arco compreendido sobre os pontos A e B, mas isso não aconteceu. Eles dialogavam em suas duplas e realizavam as conjecturas. Ambas as duplas durante o processo de resolução, momento em que estavam vivenciando as fases adidáticas, apresentaram como solução para o item G "metade" como resposta. Observe.

> Lucas: Metade.
> Gustavo: O ângulo BÂC mede a metade do arco.
> Fábio: Metade.

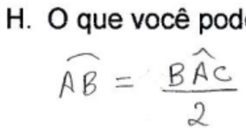
Essas respostas foram dadas imediatamente pelos estudantes ao lerem o que se pedia no item (g), era o momento em que eles possivelmente vivenciavam a fase de formulação. Na análise *a priori* havíamos previsto como resposta que "a medida do arco AB é o dobro do ângulo BÂC", a relação observada pelos estudantes foi a mesma, porém expressa colocando a medida do ângulo em função da medida do arco e não o contrário, como previsto.

No momento da socialização das respostas do item (h) os estudantes falaram:

> Lucas: Que β que é o ângulo de "cá" [se referindo ao de segmento] é metade do de "cá" [se referindo ao ângulo central correspondente].
>
> Gustavo: Do central é o modo de falar.
>
> Fábio: O ângulo de segmento mede a metade do ângulo central correspondente ao mesmo arco.

Nota-se que mesmo fazendo uso de diferentes linguagens os estudantes compreenderam a relação existente entre os dois ângulos. A dupla Lucas e Liz fez uso da linguagem matemática ao escrever acerca da relação encontrada, conforme Figura 4, o que pode ter dificultado no momento da socialização, pois precisavam associar a representação escrita à representação figural.

Figura 4 – Resolução da dupla Lucas e Liz

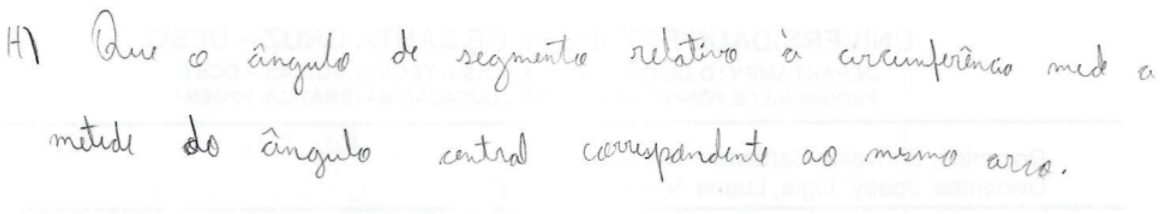

H. O que você pode observar?

$\widehat{AB} = \dfrac{B\hat{A}C}{2}$

Fonte: Dados da pesquisa (2017).

A dupla Gustavo e Fábio havia realizado algo escrito como pode-se observar na Figura 5.

Figura 5 – Resolução da dupla Gustavo e Fábio


H) Que o ângulo de segmento relativo à circunferência mede a metade do ângulo central correspondente ao mesmo arco.

Fonte: Dados da pesquisa (2017).

Na análise *a priori* esperava-se que os estudantes apresentassem como resposta a esse item que "a medida do ângulo de segmento é metade do ângulo central a ele associado"; observa-se que os estudantes conjecturaram a relação existente entre os dois ângulos, vivenciando assim a fase de formulação.

ATIVIDADE 4 - Arco capaz

a) Construa uma circunferência, marque dois pontos A e B na circunferência e determine o segmento de extremidades nesses pontos.
b) Em um dos arcos determinados por esses pontos marque um ponto C e determine a medida do ângulo $A\hat{C}B$. Movimente o ponto C no arco AB, o que você observou?
c) Considerando os pontos A e B, e a infinidade de pontos que C pode assumir, teremos um arco. Como você definiria esse arco?
d) O que garante essa regularidade?
e) Dado um segmento AB e um ângulo de medida α, construir o arco capaz, ou seja, pontos que enxergam o segmento AB, sob um ângulo α.

Análise *a priori*

Objetivamos com essa atividade que os estudantes observassem que dado um arco definido a partir de um segmento, todos os pontos do arco "enxergam" este segmento sob um mesmo ângulo.

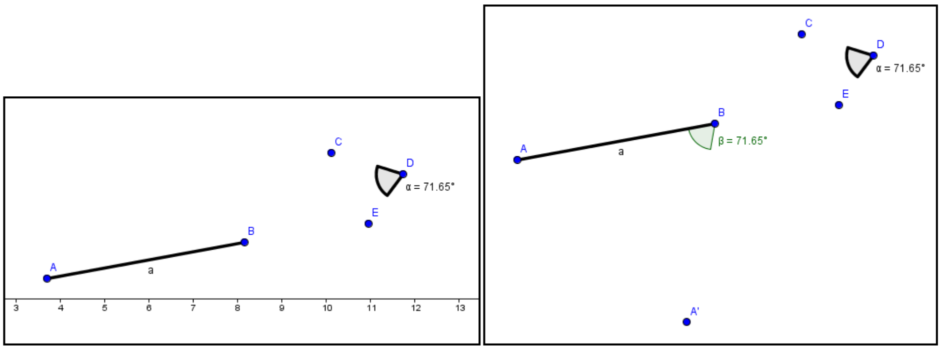
Após as construções dos itens (a) e (b), esperávamos que os estudantes apresentassem como resposta, por exemplo, "a medida do ângulo permanece a mesma". Neste momento estariam vivenciando a fase adidática de ação. No item (c), tínhamos como hipótese que o estudante conclua que esta regularidade está associada ao fato de todos os ângulos com as mesmas características do ângulo $A\hat{C}B$ serem ângulos inscritos associados a um mesmo ângulo central; estariam então iniciando o momento de formulação ao apresentarem uma definição para o que foi observado.

No item (d), esperávamos que os estudantes apresentassem uma propriedade a partir das características de todos os possíveis pontos que C pode assumir, como o arco em que todos os ângulos que têm vértices nesse arco e lados passando pelas extremidades do segmento AB e por vértice o ponto C têm a mesma medida. Estando vivenciando o momento de validação ao buscarem apresentar uma prova ao que foi observado nos itens anteriores.

No item (e), esperávamos que o estudante apresentasse a construção do arco capaz dado um segmento e um ângulo, a partir dos passos a seguir.

Dado o segmento AB e o ângulo α, transportar o ângulo α para uma das extremidades do segmento AB, como mostra a Figura 6.

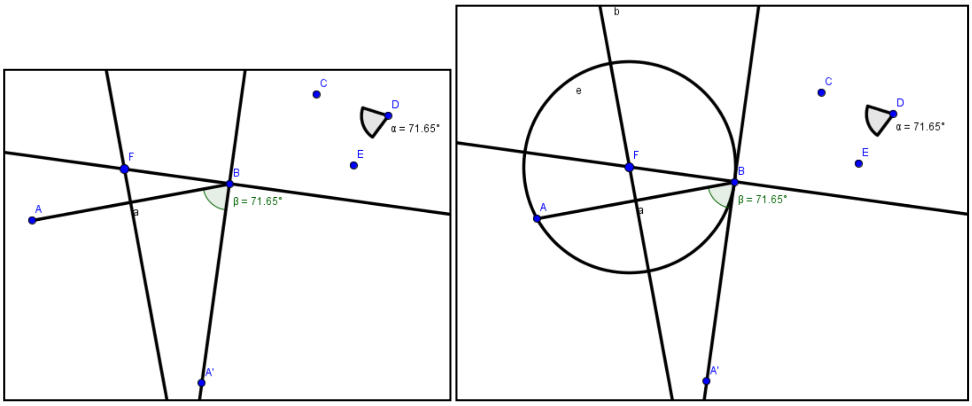
Figura 6 - Segmento AB e ângulo α



Fonte: Elaborado pelos autores.

Note que β tem a mesma medida do ângulo α. Em seguida, construir a mediatriz do segmento AB e uma reta perpendicular à reta suporte do lado BA’ do ângulo β e marcar o ponto F, de encontro dessas duas retas. O ponto F é o centro da circunferência. Note, na Figura 7, que o raio e a reta tangente no ponto B, formam um ângulo reto, dessa forma, o centro deve estar sobre a reta que passa por BF, o centro equidista dos pontos A e B, logo pertence à mediatriz. O centro é o ponto de intersecção da mediatriz e da reta que passa por B e F. Dessa forma, com três pontos é possível construí-la, como mostra a Figura 7.

Figura 7 – Construção do arco capaz



Fonte: Elaborado pelos autores.

Caso eles apresentassem dificuldade em realizar essa construção faríamos as seguintes devoluções: Quantos pontos determinam um arco? Os pontos A e B pertencem ao arco, de que forma podemos determinar o terceiro ponto pertencente a esse arco?

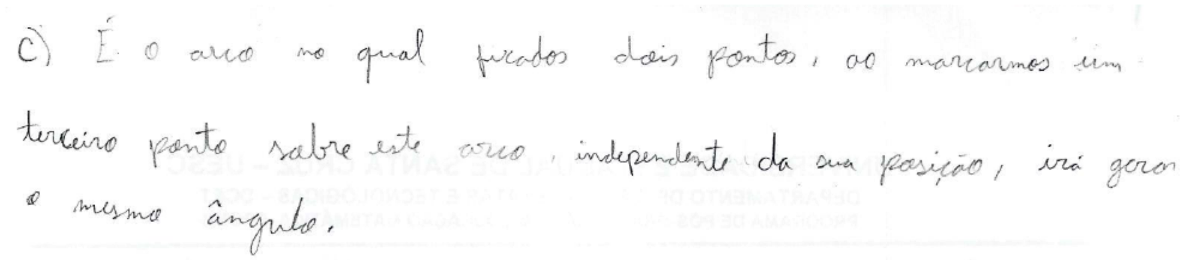
Análise *a posteriori* e validação

Os estudantes conseguiram vivenciar as fases adidáticas de ação e formulação, pois identificaram após a construção dos itens (a) e (b) que mesmo movimentando o ponto C o valor do ângulo permanecia o mesmo. Todavia, tiveram dificuldade em responder ao item (c), pois, sabiam que era o arco capaz, mas não conseguiam expressar verbalmente ou por meio da escrita as suas características. Observe o diálogo a seguir.

> Gustavo: É o arco capaz. Como definiria o arco?
> Pesquisador 2: Qual a característica desse arco?
> Fábio: Não sei não.
> Pesquisador 2: Olhando para esse segmento (AB) e para esse ângulo (AÔB), vocês observaram que esse arco tem uma característica em relação a esse ângulo. Qual é?
> Gustavo: Ainda não sei.
> Pesquisador 2: Quando vocês movimentam o que é que acontece?
> Fábio e Gustavo: O ângulo permanece o mesmo.
> Gustavo: Qualquer lugar que esteja o ponto ele vai ter o mesmo ângulo.
> Gustavo: Isso é o arco capaz. Eu sei, mas eu estou assumindo que eu não sei o que é o arco capaz.
> Pesquisador 2: E o que é o arco capaz? Como é que você explica o arco capaz?
> Gustavo: É um arco que quando você marca qualquer ponto nele e liga as outras extremidades você vai ter o mesmo ângulo.

O fato desses estudantes, em outros momentos, terem realizado atividades dessa natureza e com o uso do GeoGebra, pode ter influenciado para que, mesmo eles sabendo que era o arco capaz, buscassem elementos para defini-lo. Contudo, nota-se que eles compreendem o que é o arco capaz, sobretudo ao movimentar o ângulo e observar que permanece com medida fixa, mas têm dificuldade em descrever o que o caracteriza, sendo necessário que o pesquisador fizesse devoluções buscando retornar o problema para os estudantes sem dizer a resposta. A Figura 8 apresenta a solução escrita dessa dupla.

Figura 8 - Solução da dupla Gustavo e Fábio


c) É o arco no qual fixados dois pontos, ao marcarmos um terceiro ponto sobre este arco, independente da sua posição, irá gerar o mesmo ângulo.

Fonte: Dados da pesquisa (2017).

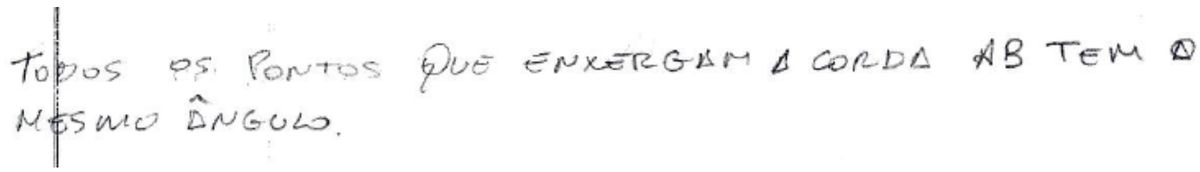
Nota-se que o uso do GeoGebra foi um fator importante, pois possibilitou que a dupla ao fazer uso da ferramenta mover, em pouco tempo, pudesse visualizar a regularidade desse ângulo; isso é observável ao expressarem "independente da sua posição". Dessa forma, os estudantes puderam vivenciar a fase adidática de validação diante dessa afirmativa, pois eles observaram que o ângulo permanece com mesma medida.

O estudante Lucas também apresentou dificuldade inicialmente em responder o item C. Vejamos o diálogo.

> Lucas: Não sei como descrever esse ponto.
>
> Pesquisador 2: O que é que acontece com o ângulo?
>
> Lucas: Quando eu movo não muda. Eu sei que é o arco capaz, porém[...].
>
> Pesquisador 2: E o que é o arco capaz?

Após um tempo o estudante apresentou a resposta da Figura 6 como solução.

Figura 9 - Solução da dupla Lucas e Liz


TODOS OS PONTOS QUE ENXERGAM A CORDA AB TEM O MESMO ÂNGULO.

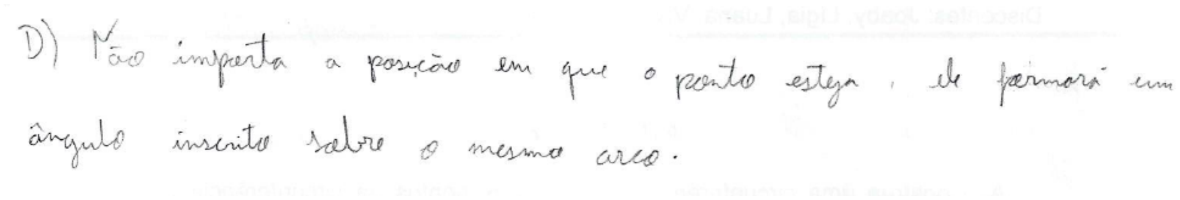
Fonte: Dados da pesquisa (2017).

No momento da socialização, ao lerem suas soluções para os demais, Gustavo pensou que a resposta da sua dupla estava confusa. Nesse momento, os pesquisadores discutiram a solução, principalmente o fato da dupla ter feito uso do termo arco para definir arco (Figura 8). Em seguida, os pesquisadores apresentaram uma solução que "seria um conjunto de pontos que enxergam um segmento sob um mesmo ângulo".

Nota-se a importância da institucionalização, pois algumas ideias relativas à propriedade do arco capaz ainda não estavam claras para os estudantes, sendo necessária a apresentação de uma definição pelos pesquisadores.

No item (d), os estudantes não apresentaram dificuldade em solucioná-lo e apresentaram as seguintes soluções, apresentadas na Figura 8 e na Figura 9.

Figura 10 - Solução da dupla Gustavo e Fábio


D) Não importa a posição em que o ponto esteja, de formará um ângulo inscrito sobre o mesmo arco.

Fonte: Dados da pesquisa (2017).

Figura 11 - Solução da dupla Lucas e Liz


ELES ENXERGAREM O MESMO ARCO

Fonte: Dados da pesquisa (2017).

Nota-se que os estudantes têm formalizado que ângulos distintos que enxergam um mesmo arco têm a mesma medida, entendimento esperado a respeito do arco capaz o que demonstra a validação do conceito ali representado.

Com relação ao item (e), no qual foi solicitado aos participantes que construíssem o arco capaz referente a um ângulo qualquer α, as duplas apresentaram dificuldade em realizar a construção, pois não percebiam como encontrar um ponto do arco que enxergasse sob um ângulo α. Nesse momento, as devoluções foram fundamentais.

> Lucas: Me tire uma dúvida. Eu fiz um segmento e construí um ângulo na extremidade do segmento.
> Pesquisador 3: Seria bom você ter um segmento e um ângulo separado. Faz um arco.
> [...]
> Pesquisador 2: Você está querendo usar esse segmento e exatamente esse ângulo onde está aí, não é? Você precisa usar esse segmento e a medida desse ângulo.

[...]

Lucas: Não estou conseguindo não.

Pesquisador 3: Pensou em quê? O que você conhece do arco?

Lucas: Que o ângulo [...], foi dado esse ângulo, o arco que passa por esse ponto.

Pesquisador 3: Por qual ponto? O ponto pode estar em qualquer lugar. Você pode colocar esse ângulo no cantinho [se referindo a uma das extremidades do segmento]. Você precisa encontrar um arco que enxerga esse segmento com esse ângulo.

Nesse momento surgiu a necessidade do pesquisador fazer uma intervenção coletiva.

Pesquisador 3: Vocês têm um segmento e um ângulo. Vocês querem fazer o quê, construir um arco aqui. O que é que vocês já conhecem desse arco? Melhor, o que vocês já têm?

Lucas: Que o ângulo inscrito do arco enxergando, ele é metade desse segmento. No caso, da medida.

Pesquisador 3: Eu já tenho algum ponto do arco?

Estudantes: Tem, o A e o B.

Pesquisador 3: Ou seja, já temos dois pontos do arco. Se achar mais um ponto do arco resolve o problema?

Estudantes: Sim.

Pesquisador 3: Como?

Fábio: Pelo GeoGebra dá, se eu pegar a circunferência de três pontos.

Pesquisador 3: Também resolve sem o GeoGebra, o problema está em achar o centro, não é?! Se eu tenho três pontos dá para achar o centro?

Lucas: Dá, faz a mediatriz de cada um.

[...]

Pesquisador 3: O problema da gente está em que? Na verdade, em achar um ponto do arco. Com uma única exigência, achar um ponto que enxergue o segmento com o ângulo alfa. Será que a gente não consegue achar um ponto ao menos que enxergue com o ângulo alfa?

Nota-se que os estudantes apresentaram dificuldade em realizar a solução desse item. Após a discussão com os pesquisadores e com os componentes das duplas, a dupla 2 apresentou uma construção correta de arco capaz, após identificar o comportamento de alguns casos particulares. Para tanto, fez uso do conceito de triângulo isósceles.

As devoluções realizadas pelos pesquisadores foram de fundamental importância para o desenvolvimento do item (e).

Considerações

Nesse trabalho, analisamos possíveis influências do ambiente computacional GeoGebra no processo de construção de conhecimentos relativos a quadriláteros inscritíveis em uma circunferência e arco capaz, o que possibilitou identificar potencialidades e limitações desse *software* de geometria dinâmica. Assim, o GeoGebra influenciou positivamente no desenvolvimento da sequência didática e as limitações apresentadas foram contornadas com as várias devoluções que se apresentaram como um fator essencial por possibilitar ao estudante a retomada do problema ao qual ele estava com dificuldade de solucionar.

Neste contexto, o uso do GeoGebra favoreceu a exploração de diversos exemplos, o que foi essencial nos momentos adidáticos de ação, formulação e validação das situações propostas, potencializando a elaboração e comunicação de conjecturas pelos alunos. Além disso, o fato desse *software* ser dinâmico possibilitou novas descobertas não previstas na elaboração da SD e no momento da análise *a priori*, como o fato dos estudantes observarem que a relação existente na medida dos ângulos opostos do quadrilátero inscrito na circunferência é válida apenas para quadriláteros convexos.

Essa SD foi elaborada com o intuito dos estudantes serem os construtores de seu conhecimento fazendo, a partir das construções no GeoGebra, as conjecturas esperadas, e verificando para muitos casos por meio do mover, ferramenta que dá o dinamismo do GeoGebra, o que contribuiu para o processo de validação.

Ainda, salientamos que os aspectos teóricos metodológicos adotados foram importantes para a construção da sequência didática, bem como a análise dos dados, visto que esses fatores nos deram condições de inferir que os estudantes aprenderam os conceitos propostos a partir das respostas apresentadas, sobretudo no momento da socialização. Outro fator que precisa ser destacado é a importância do trabalho em dupla no momento das resoluções das atividades, por possibilitar aos estudantes a construção do conhecimento e a vivência das fases adidáticas propostas pela Teoria das Situações Didáticas. As devoluções foram fundamentais nesse processo, pois possibilitaram que os estudantes retomassem o problema proposto buscando resolvê-lo. Além disso, é observável a necessidade da institucionalização de forma que os pesquisadores sistematizaram as soluções encontradas pelos estudantes.

Referências

ALMOULOUD, S. A. **Fundamentos da didática da matemática**. Curitiba: Ed. UFPR, 2014.

ARTIGUE, M. Engenharia Didática. In: BRUN, J. (Org.). **Didáctica das Matemáticas.** Lisboa: Instituto Piaget, 1996.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria da Educação Básica, 2018. Disponível em:<http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf>. Acesso em: 29 maio 2019.

BROUSSEAU, G. Fundamentos e métodos da didáctica da Matemática. In: BRUN. J. (Org.) **Didácticas das Matemáticas**. Lisboa: Instituto Piaget, 1996.

BRUNHEIRA, L.; PONTE, J. P. Prospective teachers work on defining quadrilaterals through an exploratory approach. **Didactica Mathematicae**. v. 38, p. 33-56, 2016.

MACHADO, S. D. A. Engenharia Didática. In: MACHADO, S. D. A. (Org.). **Educação Matemática**: uma (nova) introdução. São Paulo: EDUC, 2010. p. 233 - 247.

NATIONAL COUNCIL OF TEACHER OF MATHEMAIS/ NCTM. **Princípios e Normas para a Matemática Escolar**. Trabalho original publicado em 2000. Tradução da Associação de Professores de Matemática (APM). Lisboa: Associação de Professores de Matemática e Instituto de Inovação Educacional, 2007.