ISSN 2177-9309
emteia Revista de Educação Matemática e Tecnológica Iberoamericana
Universidade Federal de Pernambuco
Pós-Graduação em Educação Matemática e Tecnológica EDUMATEC

NOVAS TECNOLOGIAS, NOVAS DEMONSTRAÇÕES, NOVOS CAMINHOS PARA A MATEMÁTICA E EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

Duelci Aparecido de Freitas Vaz[1]
duelci.vaz@gmail.com

Julio César Saavedra Vásquez[2]
jcsv29@hotmail.com

Joelmir Divino Carlos Feliciano Vilela[3]
jfbarcellos@gmail.com

Resumo

Investigamos três eventos importantes da história da matemática com a finalidade de estabelecer uma relação entre produção tecnológica e produção de conhecimento matemático. A última conjectura de Kepler, o teorema das quatro cores e o problema *booleano* dos trios pitagóricos são problemas cujas soluções apontam uma mudança da metodologia da matemática utilizada para demonstrar teoremas, que exigem um número muito grande de cálculos, em alguns casos, tarefa impossível de ser realizada por humanos em tempo hábil, sem o auxílio de um *software* potente. A partir da análise dos fatos relacionados à resolução desses problemas, identificamos a existência de um processo dialético no sentido de que a tecnologia, neste caso os *softwares*, é uma ferramenta que auxilia a transformação do pensamento matemático, como uma remodelagem recíproca, desenvolvida historicamente. Por fim, sugerimos que em problemas elementares também é possível, a partir da utilização de *softwares*, a descoberta de caminhos alternativos para demonstrar teoremas matemáticos, apresentando, para este fim, uma Investigação Matemática com o GeoGebra como uma possibilidade metodológica de ensino-aprendizagem de Matemática.

Palavras-Chave: Tecnologias. Matemática. Educação Matemática.

Abstract

We investigate three important events in the history of mathematics in order to establish a relation between technological production and the production of mathematical knowledge. Kepler's last conjecture, the four-color theorem, and the Boolean problem of the Pythagorean trios are problems whose solutions point to a change in the mathematical methodology used to demonstrate theorems, which require a very large number of calculations, in some cases an impossible task be performed by humans in a timely manner without the aid of powerful software. We identify from the analysis of the facts related to the resolution of these problems the existence of a dialectical process in the sense that technology, in this case softwares, is a tool that helps the transformation of mathematical thinking, as a reciprocal remodeling, developed historically. Finally, we suggest that in elementary problems it is

[1] Doutor em Educação Matemática pela Unesp de Rio Claro-SP. Professor do Programa de Pós-Graduação da PUC Goiás e do programa de Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática do Instituto Federal de Goiás.

[2] Doutor em Matemática Aplicada pela Universidade Estadual de Campinas (2005). Professor do Instituto Federal de Goiás.

[3] Mestre em Estatística pela Universidade de São Paulo (2006). Professor da Universidade Federal de Goiás.

also possible, from the use of softwares, the discovery of alternative ways to demonstrate mathematical theorems, presenting, for this purpose, a Mathematical Investigation with GeoGebra as a methodological possibility of teaching-learning of Mathematics.

Keywords: technologies, mathematics, mathematics education.

Introdução

Embora não seja o objetivo deste artigo, devemos ao menos alertar o leitor que em várias pesquisas desenvolvidas sobre o tema educação, como é também possível em nossa prática diária, notamos uma longa crise educacional, resultante das políticas perversas dos organismos internacionais, abraçadas pelas políticas públicas brasileiras e estimuladas pelo Ministério de Educação (SILVA, 2014). Neste contexto, as investigações apontam que os programas governamentais voltados para a inserção das tecnologias informatizadas na educação não foram implantados a contento, ao contrário, revelaram-se grandes fracassos (ECHALAR; PEIXOTO, 2016; BUENO, 2017; MARCON, 2015; SANCHO; HERNÁNDEZ, 2006).

Sancho e Hernández (2006) nos informam que para articular educação com tecnologias é necessário um envolvimento de toda comunidade escolar, além de condições de ofertas e professores bem preparados para tal, fato incomum ainda em nossa educação. Isso mostra que ainda temos que debater muito a questão, pois nos parece inevitável a inserção desses aparatos tecnológicos na educação em geral, uma vez que há estudos mostrando sua potencialidade, principalmente na Educação Matemática (BORBA; PENTEADO, 2001; VAZ, 2012).

Nas duas últimas décadas, os avanços tecnológicos transformaram as atividades de diversos setores, entre eles, a agricultura, a pecuária, a construção civil, a medicina, a cultura e o lazer. No mundo do trabalho e econômico, “praticamente todas as ocupações se transformaram, algumas desapareceram, enquanto outras tantas surgiram que, até então, eram completamente desconhecidas” (SANCHO; HERNÁNDEZ, 2006, p. 17). Mas na educação brasileira, ainda temos um estado desolador com relação a essa questão.

Na educação, as tecnologias da informação e comunicação passaram a ser consideradas, por muitos, como a solução para resolver os problemas de ensino e aprendizagem. Contudo, Cysneiros (1998) mostra em um estudo histórico que avanços tecnológicos nem sempre têm o impacto que esperamos na sala de aula e consequentemente na melhoria da educação. Para que as TICs se tornem recursos que possam contribuir com a melhoria da educação, é fundamental que a administração, os gestores, os coordenadores e os professores, antes de planejar, revisem suas próprias concepções de ensino, de aprendizagem, de currículo, de avaliação, e de espaços educacionais. Somente a partir dessas revisões será possível colocar em prática "projetos educativos que atualmente respondam às necessidades formativas dos alunos" (SANCHO; HERNÁNDEZ, 2006, p. 16).

Acreditar que o acesso às TICs poderá melhorar o ensino e motivar os alunos, sem repensar concepções educacionais e currículos, é um erro. Assim como acreditar que o acesso a inúmeras informações, proporcionado pelas tecnologias da informação e comunicação, é garantia de habilidades e saberes para converter essas informações em conhecimentos. Para que as tecnologias da informação e comunicação se tornem meios eficazes de ensino é preciso também rever as concepções de ensino-aprendizagem (PEIXOTO, 2012).

Para Sancho e Hernández (2006, p. 22), "um dos principais obstáculos para desenvolver o potencial educativo das TICs é a organização e a cultura tradicionais da escola", já que a maioria dos programas institucionais destinados à inserção de TICs na educação centra-se em equipar as escolas com computadores, que muitas vezes são insuficientes para a quantidade de alunos, além de oferecer cursos de formação, com a finalidade de capacitar os professores para manusear equipamentos e utilizar *softwares* educacionais, sem se preocupar com as limitações da escola e dos currículos. "Isto significa que a introdução das TIC na escola não promove formas alternativas de ensinar e aprender, pelo contrário, costuma reforçar as estruturas preexistentes do conteúdo do currículo e as relações de poder" (SANCHO; HERNÁNDEZ, 2006, p. 23).

> Diferentes organismos internacionais (UNESCO, OCDE, Comissão Europeia, etc.) advertem sobre a importância de educar os alunos para a *Sociedade do Conhecimento*, para que possam pensar de forma crítica e autônoma, saibam resolver problemas, comunicar-se com facilidade, reconhecer e respeitar os demais, trabalhar em colaboração e utilizar, intensiva e extensivamente, as TIC. Uma educação orientada a formar este tipo de indivíduos requereria professores convenientemente formados, com grande autonomia e critério profissional. Mas também escolas com bons equipamentos, currículos atualizados, flexíveis e capazes de se ligar às necessidades dos alunos. Além de sistemas de avaliação autênticos que possam mostrar o que os alunos tenham realmente aprendido (SANCHO; HERNÁNDEZ, 2006, p. 20).

Concordamos com esses pesquisadores e temos consciência dos problemas políticos, econômicos e sociais envolvendo a questão do ensino em geral e, em particular, os relacionados à utilização das tecnologias na educação.

Temos debatido, no contexto acadêmico de ensino e de pesquisa, questões envolvendo as tecnologias na educação, particularmente na Educação Matemática. Nosso propósito não é adotar visões determinísticas ou instrumentalistas com relação à tecnologia e educação, mas sempre, em uma forma crítica, no sentido de que o melhor a fazer é investigar a relação entre Educação Matemática, Matemática e Tecnologia. A utilização das TICs como meio de educar os alunos para a sociedade do conhecimento requer uma série de mudanças na educação: escolas com laboratórios de informática equipados com computadores suficientes para todos os alunos, capacitação de professores, novas metodologias de ensino e métodos de avaliação. A respeito das contribuições do emprego tecnologias como recurso didático, Vaz (2012, p. 43) afirma que o uso da informática

> [...] representa para o professor possibilidades importante de ensino, além do mais, amplia a noção de metodologias e estratégias de ensino colocando o professor numa situação que exige um movimento na direção de novos saberes exigindo que ele saia da situação de acomodação, fazendo com que amplie e renove seu conhecimento matemático, provocando um avanço no seu estilo de ensinar e na sua cognição. Para o aluno representa possibilidade de aprendizagem, se adaptando a nova realidade que se estabelece nas sociedades modernas.

Embora devamos ser realista com relação ao uso de tecnologias na educação, existem na literatura diversos relatos de experiências exitosas com relação ao uso de tecnologias na Educação Matemática. Devemos investigar suas potencialidades no contexto escolar, da pesquisa e da formação do professor.

Defendemos neste artigo que a relação entre Tecnologia e Matemática pode ser fonte de geração de conhecimentos, para tanto, apresentamos a resolução de três problemas matemáticos e um resultado no campo da Educação Matemática mostrando caminhos alternativos para investigar objetos matemáticos e como fonte enriquecedora dos processos de ensino-aprendizagem da Matemática.

Com relação à questão de ensino-aprendizagem de Matemática, este artigo tem como referencial teórico-metodológico a Investigação Matemática com o GeoGebra, proposta por Vaz (2012), que pode ser aplicada aos diversos níveis de ensino, entretanto, neste caso específico, está relacionado ao tema dos números complexos, geralmente abordado no final do ensino médio. Mostramos que essa metodologia pode ser geradora de conhecimento novo, mesmo em nível elementar; neste caso, apresentamos uma nova demonstração para o teorema que diz que a soma de todas as raízes de um número complexo é zero.

No entanto, acreditamos que o mais importante está relacionado à metodologia, uma vez que propõe a integração entre conhecimento matemático, tecnologias e mediação pedagógica, em uma didática para o desenvolvimento matemático de forma investigativa que deve contar com a participação efetiva do escolar no processo. Vaz (2012) relata experiências exitosas ocorridas em sala de aula, incluindo a descoberta de relações matemáticas interessantes, como propriedades poligonais, de matrizes e funções inversas, entre outras, além do mais, muitas monografias de final de curso e dissertações de mestrado.

Para atingirmos nossos objetivos neste texto, de mostrar ao leitor essas experiências exitosas, iniciamos mostrando que a integração das tecnologias tem se tornado importante, inclusive, proporcionando mudanças metodológicas na determinação dos objetos matemáticos, ilustrados aqui com três exemplos históricos. Posteriormente, apresentamos resultados associados à metodologia de Investigação Matemática com o Geogebra.

Problemas Históricos da Matemática, Demonstrações e Tecnologias

Assumimos, como ponto de partida em nossas investigações que há uma remodelagem recíproca entre objetos tecnológicos e o homem, no sentido de que, na interação com a tecnologia, o homem pode desenvolvê-la ao perceber suas potencialidades e suas limitações. O *feedback* obtido na atividade desenvolvida com a máquina dá ao homem o *insight* que lhe permite se desenvolver intelectualmente, numa relação histórica e dialética, continuamente, produtora de conhecimento.

A utilização das tecnologias (especificamente abordaremos a utilização de *softwares*) tem possibilitado avanços significativos na Matemática, pelo alto grau de interatividade que ela nos permite com os objetos dessa ciência, por ter a capacidade de testar hipóteses e a grande velocidade de efetuar cálculos (fato importante hoje, pois muitos problemas matemáticos exigem isso). Podemos ilustrar esse fato apresentando casos ocorridos quando matemáticos resolveram três problemas, aparentemente elementares, a saber: o teorema das quatro cores, a última conjectura de Kepler (o problema 18, proposto por Hilbert, em 1900, como um dos grandes problemas a serem resolvidos pelos matemáticos no século seguinte) e o problema *booleano* dos trios pitagóricos.

O problema das quatro cores é sobre a quantidade mínima de cores que poderemos utilizar para pintar um mapa plano, sem que países vizinhos tenham a mesma cor. Ele apareceu, pela primeira vez, em 1852, quando o matemático Francis Guthrie pintava os mapas dos condados da Inglaterra e notou que apenas quatro cores seriam necessárias para pintar aquele mapa e diversos outros que experimentou. A história segue e tem uma divulgação melhor realizada por Cayley, um matemático influente na época, e continuou se desdobrando:

> Em 1879, um ano depois da divulgação do problema por Arthur Cayley, Alfred Bray Kempe publicou um artigo onde supostamente dava uma demonstração de que quatro cores são suficientes para colorir qualquer mapa. Porém, em 1890, onze anos após a publicação de Kempe, Percy John Heawood, através de um contraexemplo, apontou um erro sútil e irreparável na demonstração de Kempe (SOUZA, 2001, p. 133).

Heawood contribuiu aproveitando parte da demonstração de Kempe para provar que cinco cores são suficientes. O que a comunidade dos matemáticos tentou, a partir disso, foi melhorar esse resultado, investigando se quatro cores apenas eram suficientes. O problema se torna amplo a partir de sua solução como é comum no contexto da matemática. Um problema pode gerar muitos outros. A questão foi investigada posteriormente em superfícies topológicas diversas e os resultados não foram os mesmos.

Um longo período de tempo foi necessário para que se chegasse a resultados satisfatórios; na verdade, foi necessário esperar o advento dos computadores para que se evoluísse na questão:

> [...] em 1976, com a ajuda de um IBM 360, em Urbana (Illinois), Kenneth Appel e Wolfgang Haken apresentaram uma demonstração do Teorema das Quatro Cores. Quando a notícia do feito se espalhou pelos vários departamentos de matemática, houve um enorme entusiasmo, muitos professores interromperam as aulas para comemorar. Mas a euforia esfriou em muitos deles quando souberam que essa demonstração incluía mais de mil horas do uso de computadores de alta velocidade. A prova era demasiado longa para ser verificada à mão e havia sempre a possibilidade de os computadores terem cometido algum erro de difícil detecção [...] (SOUZA, 2001, p. 133-4).

Com a evolução tecnológica, houve avanços significativos até que uma demonstração simplificada do teorema fosse apresentada:

> Em Agosto de 1994, no Congresso Internacional de Matemática, em Zurique, Paul D. Seymour apresentou uma prova simplificada do Teorema das Quatro Cores, cuja formulação foi o resultado de trabalho conjunto com Neil Robertson, Daniel P. Sanders e Robin Thomas. Eles também não

> conseguiram dispensar o uso do computador. Contudo foram capazes de reduzir a quantidade de cálculos para um nível bastante mais tolerável. Aqueles que possuem os programas ao seu dispor e que tenham compreendido os fundamentos teóricos, poderão, em menos de um dia, reproduzir a demonstração (SOUZA, 2001, p. 134-5).

Até a presente data, ainda não foi apresentada nenhuma demonstração do fato, totalmente livre da ajuda dos computadores.

Johannes Kepler nos apresentou também um problema fascinante, em 1611, sobre o armazenamento de objetos esféricos e sugeriu que a forma mais eficiente seria em uma formação piramidal. No entanto, o próprio Kepler não o demonstrou, e o referido problema passou a ser chamado de Última Conjectura de Kepler.

Foi Thomas Hales, da Universidade de Pittsburgh, Estados Unidos, quem desenvolveu uma prova para o problema, em 1998. Na verdade, existem infinitas maneiras de empilhar esferas, mas a maioria são variações de algumas milhares de possibilidades. Hales, ao perceber isso, quebrou o problema em milhares de arranjos possíveis que matematicamente representam infinitas possibilidades, e utilizou *software*s para resolver todos. O trabalho final ficou com 300 páginas e 12 revisores se debruçaram sobre elas durante quatro anos para verificarem se havia algum erro em todo o documento, mas não concluíram nada.

Quando o estudo foi publicado na revista *Annals of Mathematics* em 2005, os cientistas não estavam seguros de que o resultado estava correto. Hales criou o projeto "*Flyspeck*", desenvolvendo programas computacionais capazes de verificar sua prova. Recentemente, Hales anunciou que as 300 páginas de seu trabalho foram analisadas computacionalmente e que está tudo correto.

O problema booleano dos trios pitagóricos foi proposto na década de 1980 pelo matemático Ronald Graham, a saber: é possível dividir o conjunto de todos os números naturais em duas partes, de tal forma que nenhuma das duas partes contenha um trio pitagórico? Outra forma de enunciá-lo seria: é possível dividir a sequência dos números naturais $\{1, 2, 3, 4 \ldots\}$ em duas "cores", de modo que, para todos os trios pitagóricos, isto é, $a^2 = b^2 + c^2$, seja possível garantir que um deles pertencerá a uma "cor" diferente? A resposta encontrada pelos pesquisadores, citados abaixo, que investigaram este problema, foi negativa.

Para resolver esse problema, um arquivo de computador de 200 *terabytes* (volume de dados equivalente ao de 4.000 discos *bluray*) foi usado e é a maior prova matemática já produzida. Curiosamente, embora a demonstração possa ser checada por computadores, jamais será lida por um humano. Até o número 7.824 ainda dá para garantir que um dos três termos da equação de Pitágoras tenha uma cor diferente da dos outros; mas, a partir de 7.825 não é mais possível colorir todos os trios pitagóricos, de modo consistente, sem usar a mesma cor três vezes.

Coube a Marijn Heule (Universidade do Texas), Oliver Kullmann (Universidade de Swansea) e Victor Marek (Universidade de Kentucky) criarem os programas para tal façanha. O cálculo levou 35.000 horas de processamento e 16.000 horas de novas rodadas para verificação. Os resultados estão em formato *Deletion Resolution Asymmetric Tautology* (DRAT). Tal investigação traz contribuições para teoria dos números e para teorias que estudam as propriedades e estruturas que surgem em conjuntos em que a quantidade de cálculo se torna impossível de se realizar pelas tecnologias usuais.

Nesses exemplos históricos, fica evidente a importância da tecnologia na construção de novos conhecimentos, tanto da área de Matemática, quanto da área de tecnologias. É importante ressaltarmos também que a questão metodológica das demonstrações matemáticas obteve, a partir desses exemplos, uma nova possibilidade; são fatos notáveis para a comunidade científica: demonstrações que exigem cálculos muitos longos, que não podem ser realizados por seres humanos em tempo hábil, têm agora um novo caminho. De certo modo, notamos um movimento na forma de obter o conhecimento matemático, diferente do modo usual.

No âmbito educacional, defendemos que a mediação pedagógica com *softwares* pode ser significativa para o desenvolvimento cognitivo, justamente porque ela amplia a capacidade de interação, de testar hipóteses, de efetuar cálculos, de realizar demonstrações visuais, pelo dinamismo que essas ferramentas proporcionam, possibilitando a animação dos objetos matemáticos, o que permite observá-los em diferentes posições, de modo a captar suas propriedades e compreendê-los profundamente, mas, sobretudo, devido à possibilidade de o estudante ter contato direto com o objeto de conhecimento, este é um fato relevante para o ensino do conhecimento científico porque permite amadurecer a cognição do escolar.

Dessa forma, para debatermos essa questão com mais profundidade, apresentamos a Investigação Matemática com o Geogebra[4] (VAZ, 2012) como possibilidade de ensino. Na sequência, expomos a essência dessa metodologia e um resultado, obtido a partir dela, para evidenciar sua potencialidade ao se trabalhar alguns conteúdos da matemática.

[4] GeoGebra é um software livre de matemática para todo nível educativo. Reúne dinamicamente geometria, álgebra, estatística e cálculo. Disponível em https://www.geogebra.org/

A Investigação Matemática com o Geogebra

A ideia da Investigação Matemática com o GeoGebra é introduzir o aluno no contexto científico da matemática, gradativamente, amadurecendo seu nível cognitivo e seu desenvolvimento intelectual. O que pretendemos, na investigação, é reproduzir o núcleo do pensamento matemático em objetos particulares. Destacamos que essa metodologia pode ser aplicada para ensinar conteúdos diversos da matemática e leva em consideração a participação efetiva do aluno no processo, valorizando a interação entre os próprios alunos pela mediação pedagógica desenvolvida intencionalmente pelo professor.

VAZ (2012) estabelece as bases da Investigação Matemática com o GeoGebra em quatro etapas: experimentar, conjecturar, formalizar e generalizar o pensamento. Em se tratando de uma atividade de ensino, avaliações devem ser realizadas pelo professor, no sentido de diagnosticar se os alunos estão se apropriando do conhecimento, de modo que se possa redefinir suas estratégias, se necessário.

Na primeira etapa, exploramos a capacidade de experimentar ou interagir que o Geogebra permite ao movimentarmos os entes matemáticos, compararmos suas representações algébricas e geométricas articuladas na mesma tela, percebermos propriedades, compreendermos definições, de modo a assimilar teoremas pelas demonstrações visuais possíveis de se realizar e se construir conceitos por meio das percepções obtidas.

A segunda etapa do processo seria levantarmos conjecturas relacionadas à primeira etapa. Conjecturar significa percebermos relações oriundas da experimentação, vislumbrarmos propriedades, relações, resultados gerais importantes para o bom desenvolvimento matemático. Uma vez percebida a conjectura, podemos enunciá-la como um resultado a ser investigado, em forma de problema.

A terceira etapa é a formalização, isto é, a demonstração matemática da conjectura propriamente dita ou a apresentação de uma contra proposição da conjectura levantada, com um argumento pedagógico compatível à dimensão cognitiva do aluno. Tal atitude é importante, pois não podemos, somente pela experimentação, aceitar o resultado sob o risco de não estarmos praticando os ideais da matemática.

A quarta etapa é a generalização. Depois de experimentarmos, conjecturarmos e formalizarmos o saber matemático, o próximo passo importante é fazermos a generalização do resultado, quando possível, isto é, investigarmos outras situações pertinentes, situações particulares, enfim, explorarmos o alcance do resultado obtido. Para ilustrar, se uma propriedade é válida para um triângulo, por exemplo, devemos investigar se é válida para um polígono de quatro, cinco, ..., n lados.

Convém acrescentarmos uma quinta etapa, em se tratando de ensino-aprendizagem da matemática, a avaliação do trabalho realizado, no sentido de diagnosticarmos a evolução cognitiva dos alunos e sua aprendizagem efetiva. Assim, se necessário, procederemos ao replanejamento do trabalho pedagógico adotado, reestruturando as atividades.

Apresentamos, então, o resultado obtido a partir dessa ideia para mostrar que é possível gerar argumentos alternativos para provarmos teoremas matemáticos. Isso, em nível elementar, é de suma importância, pois implica possibilidades para que o aluno compreenda o resultado.

Não é objetivo, aqui, aplicar a metodologia no problema apresentado. O que se deseja é ressaltar que foi a partir do estudo realizado em Vaz et al. (2016) utilizando essa fundamentação que conseguimos estabelecer uma demonstração alternativa para o problema.

Uma nova demonstração para o teorema da soma das raízes de um número complexo

Apresentamos demonstrações do teorema da soma das raízes de um número complexo para situar o leitor. As duas primeiras já foram consolidadas e a terceira é inédita e tem forte vínculo com a metodologia que fundamenta esse artigo. Começamos enunciando o teorema. Não o problematizaremos por fugir de nossos objetivos, neste artigo.

Teorema: A soma das n raízes da equação: $Z^n - A = 0$, onde $A \in C$ (C conjunto dos complexos) é igual zero.

Demonstração I. Nesta demonstração, utilizamos a fórmula de Euler, a saber: $e^{i\theta} = cos\theta + isen\theta$. Como $Z_k = \sqrt[n]{|A|}\ \left(\cos\left(\frac{\theta+2k\pi}{n}\right) + \ \text{isen}\left(\frac{\theta+2k\pi}{n}\right)\right)$, $(0 \leq k \leq n-1)$, são as n raízes da equação, então a soma de todas elas é: S=$\sqrt[n]{|A|}\ \left(\cos\left(\frac{\theta}{n}\right) + \ \text{isen}\left(\frac{\theta}{n}\right) + \cos\left(\frac{\theta+2\pi}{n}\right) + \ \text{isen}\left(\frac{\theta+2\pi}{n}\right) + \cdots + \cos\left(\frac{\theta+2(n-1)\pi}{n}\right) + \ \text{isen}\left(\frac{\theta+2(n-1)\pi}{n}\right)\right)$ $=$ $\sqrt[n]{|A|}(e^{i\theta/n} + e^{i\frac{\theta+2\pi}{n}} + \cdots + e^{\frac{\theta+2(n-1)\pi}{n}})$ $=$ $\sqrt[n]{|A|}(e^{\frac{i\theta}{n}}\left(\left(e^{\frac{2\pi}{n}}\right)^n - 1\right)/(e^{\frac{2\pi}{n}} - 1)$ $=$ $\sqrt[n]{|A|}(e^{\frac{i\theta}{n}}(e^{2\pi} - 1)/(e^{\frac{2\pi}{n}} - 1)$= $\sqrt[n]{|A|}(e^{\frac{i\theta}{n}}(cos\pi + isen\pi - 1)/\left(e^{\frac{2\pi}{n}} - 1\right) = 0.$

Essa demonstração, embora curta, utiliza a fórmula de Euler que pode ser um obstáculo para que o aluno compreenda seu desenvolvimento. Compreender a fórmula de

Euler demanda uma argumentação que carece de muitas articulações e, geralmente, ela é dada em cursos avançados de cálculo. Acreditamos que ela seja inadequada para o ensino médio.

Demonstração II. Esta demonstração utiliza uma propriedade que é obtida quando dividimos os elementos consecutivos da soma das raízes:

S=$\sqrt[n]{|A|}\ \left(\cos\left(\frac{\theta}{n}\right)+\ \text{isen}\left(\frac{\theta}{n}\right)+\cos\left(\frac{\theta+2\pi}{n}\right)+\ \text{isen}\left(\frac{\theta+2\pi}{n}\right)+\cdots+\cos\left(\frac{\theta+2(n-1)\pi}{n}\right)+\right.$ $\left.\text{isen}\left(\frac{\theta+2(n-1)\pi}{n}\right)\right)$. Isto é, se denotamos as raízes por $Z_1, Z_2, \ldots, Z_{n-1}$, então: $Z_2/\,Z_1$= $Z_3/Z_2=\cdots=\ Z_{n-1}/\,Z_{n-2}$= k = $\cos\left(\frac{2\pi}{n}\right)+\ \text{isen}\left(\frac{2\pi}{n}\right)$. Assim, S = $\sqrt[n]{|A|}\,(Z_1+k\,Z_1+k^2Z_1+\cdots+k^{n-1}Z_1)=\sqrt[n]{|A|}\,Z_1(1+k\ +\ k^2+\cdots+k^{n-1})\ =\ \sqrt[n]{|A|}\,Z_1(\,k^n-1)/\,(\,k-1)=\ \sqrt[n]{|A|}\,Z_1(\left(\,\cos\left(\frac{2\pi}{n}\right)+\ \text{isen}\left(\frac{2\pi}{n}\right)\right)^n-1)/(\,k-1)\ =\ \sqrt[n]{|A|}\,Z_1(\cos(2\pi)+\ \text{isen}(2\pi)-1)/(\,k-1)$=0.

Esta demonstração já utiliza fatos elementares, uma vez que a propriedade é obtida pelo uso de operações básicas com números complexos. Assim, acaba sendo uma maneira mais adequada para o aluno do ensino médio.

A terceira demonstração, fruto da Investigação Matemática com o Geogebra, foi obtida a partir da investigação de uma propriedade dos polígonos e publicada na Revista do Professor de Matemática Online, uma revista científica da Sociedade Brasileira de Matemática, a saber: “Dado um polígono qualquer, traçando todos os vetores dos vértices até os pontos médios dos lados não adjacentes e calculando a soma de todos eles, obtemos resultante nula” (VAZ; VASCONCELOS, FILHO, 2016). Nessa demonstração, mostramos a validade da propriedade para todos os polígonos utilizando a Investigação Matemática com o Geogebra. Depois de demonstrada, percebemos que poderia ser utilizada para provar esse teorema da soma das raízes dos números complexos.

O que devemos ressaltar aqui é que a demonstração do resultado acima mencionado foi obtida graças à interatividade que o *software* permite ao usuário, pois ela possibilita a percepção de particularidades imprescindíveis para elaboração de caminhos a serem percorridos no sentido de obter a generalização da propriedade.

Demonstração III. As n raízes do complexo A podem ser representadas como**:** $Z_k=\sqrt[n]{|A|}\ \left(\cos\left(\frac{\theta+2k\pi}{n}\right)+\ \text{isen}\left(\frac{\theta+2k\pi}{n}\right)\right),(0\leq k\leq n-1)$. Geometricamente estas constituem os vértices de um polígono regular, de n lados, inscrito na circunferência de raio $\sqrt[n]{|A|}$, sendo $\left(\frac{2\pi}{n}\right)$ a medida dos seus ângulos centrais. Dividiremos a demonstração em dois casos.

Quando n é par. Para cada raiz $Z_k = \sqrt[n]{|A|}\left(\cos\left(\frac{\theta+2k\pi}{n}\right) + \text{ isen}\left(\frac{\theta+2k\pi}{n}\right)\right), \left(1 \leq k \leq \frac{n}{2}\right)$, existe outra $Z_{k+\frac{n}{2}}$, diametralmente oposta, de tal forma que:

$$Z_{k+\frac{n}{2}} = \sqrt[n]{|A|}\left(\cos\left(\frac{\theta + 2(k+\frac{n}{2})\pi}{n}\right) + \text{isen}\left(\frac{\theta + 2(k+\frac{n}{2})\pi}{n}\right)\right)$$

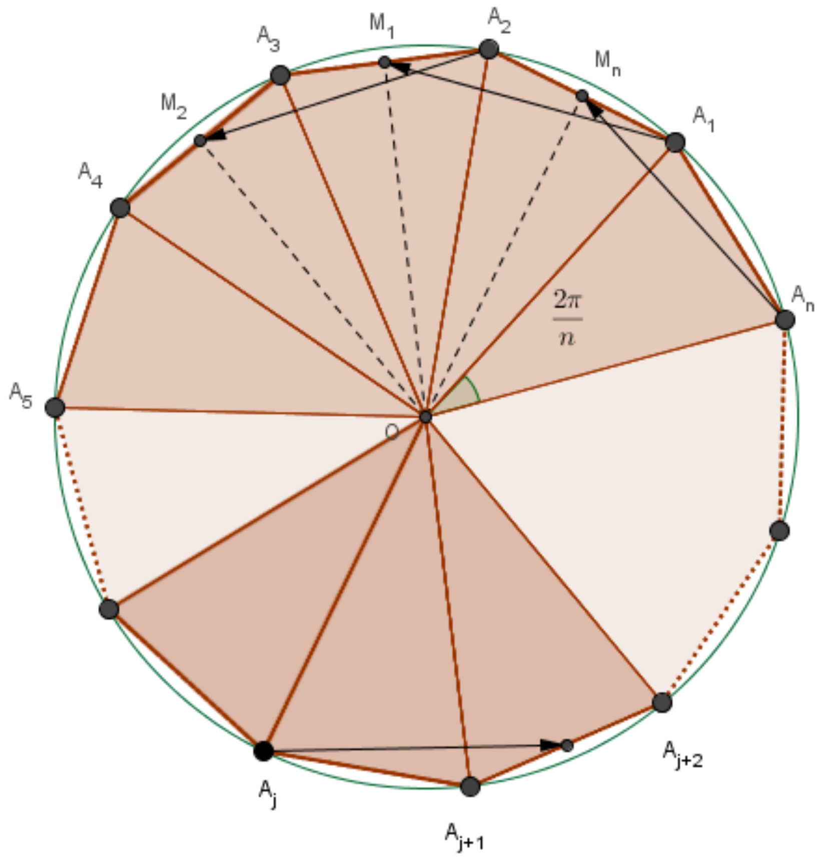
$$= \sqrt[n]{|A|}\left(\cos\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n} + \pi\right) + i \text{ sen}\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n} + \pi\right)\right)$$

$$= \sqrt[n]{|A|}\left(-\cos\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right) - \text{i sen}\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right)\right)$$

Portanto, $\sum_{k=1}^{n} Z_k = 0$.

Quando n é ímpar. Denotemos por M_k o ponto médio do segmento $\overline{A_k A_{K+1}}, k = 1, 2, \ldots, n-1$, de tal forma que M_n é ponto médio de $\overline{A_2 A_1}$, tal como o ilustra a Figura 1, a seguir:

Figura 1 – Ilustração M_n é ponto médio de $\overline{A_2 A_1}$



Fonte: Elaborado pelos autores.

Em relação a M_n o ponto meio de $\overline{A_1A_2}$, observamos que as medidas dos ângulos $M_n 0 A_2$ é $\frac{\pi}{n}$. Por outro lado, se A_j é o vértice que se obtém percorrendo $\frac{n-1}{2}$ vértices no sentido anti-horário a partir do vértice A_2, tem-se que a medida do ângulo $A_2\, 0 A_j$ é $\left(\frac{n-1}{2}\right)\left(\frac{2\pi}{n}\right)$ e, portanto, temos que:

$$\left(\frac{n-1}{2}\right)\left(\frac{2\pi}{n}\right) + \frac{\pi}{n} = \pi$$

Assim, o vértice A_j é diametralmente oposto a M_n, Logo $\overrightarrow{M_nA_j}$ é paralelo a $\overrightarrow{0A_j}$, consequentemente, existe uma constante $0 < \alpha < 1$ tal que $\overrightarrow{M_n0} = \alpha\, \overrightarrow{0A_j}$. Observe-se que $j = 2 + \left(\frac{n-1}{2}\right) = \frac{n+3}{2}$. Para o ponto médio M_1, uma vez que a medida do ângulo $M_1\, 0 M_n$ é $\frac{2\pi}{n}$ temos que o vértice A_{j+1} é diametralmente oposto a M_1, logo $\overrightarrow{M_1A_{j+1}}$ é paralelo a $\overrightarrow{0A_{j+1}}$, devido à simetria do problema, tem-se que $\left|\overrightarrow{M_1A_{j+1}}\right| = \left|\overrightarrow{M_nA_j}\right|$ e assim $\overrightarrow{M_10} = \alpha\, \overrightarrow{0A_{j+1}}$.

Em geral, para cada ponto médio M_k $(k = 1, 2, \dots, n)$ existe um único vértice A_j $(1 \le j \le n)$, diametralmente oposto a este e vice-versa, de sorte que $\forall\, j, k = 1,2, \dots \dots . n$, tem-se:

I. $j = k + 1 + \left(\frac{n-1}{2}\right)$, de tal forma que para os índices $j = n + 1, n + 2, n + 3, \dots$, os vértices correspondentes são A_1, A_2, A_3 ... respectivamente.

II. Para os índices j dados em I temos que $\overrightarrow{M_kA_j}$ é paralelo a $\overrightarrow{0A_j}$, consequentemente, existe uma constante positiva $\alpha < 1$ tal que $\overrightarrow{M_k0} = \alpha\, \overrightarrow{0A_j}$.

Por outro lado, no triângulo de vértices A_n, M_n e 0 tem-se: $\overrightarrow{A_nM_n} + \overrightarrow{M_n0} + \overrightarrow{0A_n} = 0$, uma vez que $\overrightarrow{M_n0} = \alpha\, \overrightarrow{0A_j}$, $j = \frac{n+3}{2}$. $\overrightarrow{A_nM_n} + \alpha\, \overrightarrow{0A_j} + \overrightarrow{0A_n} = \vec{0}$.

Analogamente para A_1, M_1 e 0: $\overrightarrow{A_1M_1} + \alpha\, \overrightarrow{0A_{j+1}} + \overrightarrow{0A_1} = \vec{0}$. Procedendo dessa forma para n pontos médios M_k $(k = 1, 2, \dots, n)$, obtemos as n equações vetoriais:

$$\overrightarrow{A_nM_n} + \alpha\, \overrightarrow{0A_j} + \overrightarrow{0A_n} = \vec{0}$$

$$\overrightarrow{A_1M_1} + \alpha\, \overrightarrow{0A_{j+1}} + \overrightarrow{0A_1} = \vec{0}$$

....

....

....

$$\overrightarrow{A_{n-2}M_{n-2}} + \alpha\, \overrightarrow{0A_{j-2}} + \overrightarrow{0A_{n-2}} = \vec{0}$$

$$\overrightarrow{A_{n-1}M_{n-1}} + \alpha\, \overrightarrow{0A_{j-1}} + \overrightarrow{0A_{n-1}} = \vec{0}$$

Equivalentemente: $\sum_{k=1}^{n} \overrightarrow{A_k M_k} + \alpha \sum_{k=1}^{n} \overrightarrow{0A_k} + \left(\overrightarrow{0A_1} + \overrightarrow{0A_2} + \cdots \overrightarrow{0A_{n-1}} + \overrightarrow{0A_n}\right) = \vec{0}$, ou seja: $\sum_{k=1}^{n} \overrightarrow{A_k M_k} + (\alpha + 1) \sum_{k=1}^{n} \overrightarrow{0A_k} = \vec{0}$.

De acordo com Vaz *et al* (2016): $\sum_{k=1}^{n} \overrightarrow{A_k M_k} = \vec{0}$, logo: $(\alpha + 1) \sum_{k=1}^{n} \overrightarrow{0A_k} = \vec{0}$, uma vez que $0 < \alpha < 1$, então: $\sum_{k=1}^{n} \overrightarrow{0A_k} = \vec{0}$.

Considerações Finais

Os problemas históricos apresentados evidenciam uma estratégia que passa a ser incorporada na metodologia da ciência Matemática pela articulação com as tecnologias. De fato, esses casos nos mostram uma mudança de paradigma na pesquisa em matemática, pois, a partir deles, a comunidade de matemáticos incorporou as demonstrações realizadas com o apoio do computador, devido à grande quantidade de cálculo envolvido. Deve ser ressaltado, nos casos apresentados, que um teorema pode ser aceito como verdadeiro sem a consciência dos cálculos ou os procedimentos.

Outro apontamento que podemos extrair dos episódios apresentados é sobre a remodelagem recíproca. É natural, no campo da matemática, que uma vez proposta uma conjectura, ela promova o interesse da comunidade científica. Há inúmeras conjecturas na história da matemática que perduraram por um longo período de tempo (os casos mostrados são exemplos), esperando a técnica avançar para seu esclarecimento vir à tona. Avançando a técnica que resolve os problemas, novas conjecturas são criadas, num processo contínuo.

Os problemas apresentados evidenciam isso no campo da matemática e da tecnologia. Uma vez que o problema exige uma quantidade de cálculo inimaginável para o humano, foi necessário esperar o desenvolvimento de *softwares,* muitas vezes criados para resolver um problema específico, que ajudaram na resolução do problema e que, certamente, provocam e provocarão a criação de novos problemas e outras tecnologias surgirão ou serão aprimoradas.

O fato que destacamos aqui se relaciona com os *softwares*, pois, no limiar deste novo século, essas questões vêm à tona justamente devido à possibilidade de resolvê-las pelas vias apresentadas. Se pesquisadores não tivessem desenvolvido a tecnologia, jamais teriam a possibilidade de resolver esses problemas e se esses problemas não existissem, também não seria necessário o desenvolvimento dessas tecnologias.

Com relação à metodologia do ensino da Matemática, em virtude dos fatos apresentados, é imprescindível utilizarmos tecnologias para obtermos alternativas metodológicas no ensino da Matemática. E isso não significa que estamos aqui fazendo apologia das tecnologias como redentoras da educação, mas ressaltamos que esse trabalho deve ser realizado de forma investigativa. Um objeto matemático (um teorema, por exemplo) representa uma situação geral que ocorre sob determinadas hipóteses. Se pudermos mostrar o núcleo do objeto de diversas maneiras, o aluno terá maior possibilidade de compreendê-lo e, consequentemente, de entender os elos conceituais com outros objetos, continuamente, formando uma rede conceitual, como no exemplo apresentado. A Investigação Matemática com o Geogebra é uma metodologia que vem se mostrando frutífera sob este aspecto, principalmente quando há condições de trabalho favoráveis, como mostram Vaz (2012); Vaz, Vasconcelos e Filho (2015); Vaz e Vásquez (2015). Muitas outras experiências exitosas foram desenvolvidas nesta linha em monografias de final de curso e também dissertações de mestrado. No exemplo apresentado, destacamos que foi o resultado de uma Investigação Matemática com o Geogebra que permitiu uma nova demonstração do teorema da soma das raízes de um número complexo.

A investigação permite um amadurecimento das funções mentais do aluno, uma vez que o estudante participa efetivamente do processo, permitindo-lhe fazer demonstrações visuais, dinâmicas, indicando conjecturas e possibilidades de validação ou demonstração do fato investigado. Em processos de ensino-aprendizagem, o contato direto do escolar com o objeto de conhecimento é muito importante, mas esse contato deve ser obtido de forma mediativa, com o auxílio de um professor capacitado. A proposta da Investigação leva em conta o planejamento de ensino com a finalidade de alcançar determinados resultados de forma intencional. Esse fato é marcante nas experiências desenvolvidas, uma vez que elas contam com a participação de estudantes em cursos de formação de professores, o que lhes permitiu vivenciar o processo de ensino-aprendizagem.

Ressaltamos, ainda, a importância de termos explicações diversas para fatos matemáticos, como os teoremas, pois permite que o escolar e o professor tenham escolhas diferentes e apropriadas para realizar diversas abordagens e, consequentemente, isso lhes fornece opções metodológicas para o ensino-aprendizagem. Contudo, afirmamos a necessidade de continuarmos a investigar formas de inserirmos tecnologias na Educação Matemática, principalmente, levando em consideração os diversos problemas inerentes à educação em nosso país.

Referências

BORBA, M. C.; PENTEADO, M. G. **Informática e Educação Matemática**. Belo Horizonte: Autêntica, 2001.

BUENO, D. C. **Educação e tecnologia no estado de Goiás**: o projeto formativo de professores multiplicadores do Programa Nacional de Informática na Educação na concepção dos formadores. 2017. 147 f. Dissertação (Mestrado em Educação) - Universidade Federal de Goiás, Goiânia, 2017.

CYSNEIROS, P. G. Novas Tecnologias na Sala de Aula: Melhoria do Ensino ou Inovação Conservadora? In: IX ENCONTRO NACIONAL DE DIDÁTICA E PRÁTICAS DE ENSINO - ENDIPE. Águas de Lindóia, São Paulo, maio de 1998. **Anais II**, vol. 1/1, p. 199-216. Republicado em: **Revista Informática Educativa**, Bogotá, Colômbia, Universidad de los Andres, v. 12, n. 1, p. 11-24, Mayo 1999.

ECHALAR, A. D. L. F.; PEIXOTO, J. Inclusão excludente e utopia digital: a formação docente no Programa Um Computador por Aluno. **Educar em Revista** (Impresso), Curitiba, v. 61, p. 205-222, 2016.

MARCON, M. A. da C. **The relations between technology and education in academics production and teachers training at Proinfo**. 2015. 96 f. Dissertação (Mestrado em Ciências Humanas) - Pontifícia Universidade Católica de Goiás, Goiânia, 2015.

PEIXOTO, J. Alguns mitos sobre a tecnologia e a inovação pedagógica. In: SILVA, F. de C. T.; KASSAR, M. de C. M. (Org.). **Escrita da pesquisa em educação no centro-oeste**. Campo Grande: Ed. Oeste, 2012. v. 1, p. 135-145.

SANCHO, J. M.; HERNÁNDEZ, F. **Tecnologias para transformar a educação**. Tradução de Valério Campos. Porto Alegre: Artmed, 2006. p. 15-41.

SILVA, S. P. da. **O processo de implementação das políticas educacionais e repercussões nas formas de gestão da escola e no processo de ensino-aprendizagem**: o Pacto pela Educação em Goiás. 2014. 249f. Tese (Doutorado em Educação)– Pontifícia Universidade Católica de Goiás, Goiânia, 2014.

SOUZA, L. O Teorema das Quatro Cores. **Millenium,** Viseu/Portugal, (Online), v. 24, n. 12. p. 125-151, 2001. Disponível em: http://www.ipv.pt/millenium/Millenium24/12.pdf. Acesso em: 15 out. 2019.

VAZ, D. A. F. Experimentando, Conjecturando, Formalizando e Generalizando: **a**rticulando investigação Matemática com o GeoGebra. **Educativa**. Goiânia. Editora da Pontifícia Universidade Católica de Goiás, v. 15. n. 1. p. 39-51, jan./jun., 2012.

VAZ, D. A. F., VASCONCELOS, J. E. S.; FILHO, O. O. F. Investigação Matemática com o GeoGebra em uma Propriedade dos Polígonos. **RPMO** (Online), Rio de Janeiro, v 3, n. 1. p. 1-18, 2016.

VAZ, D. A. F.; VASQUEZ, J. C. S. Utilizando a investigação matemática com o GeoGebra para caracterizar funções de uma variável real que são inversas de si mesmas. **Educativa**, Goiânia (Online), v. 18, p. 656-668, 2015.

Recebido em 02 de junho de 2019.

Aprovado em 19 de novembro de 2019.