

MATERIAL DOURADO E EQUAÇÃO POLINOMIAL DO SEGUNDO GRAU: DO ALGÉBRICO AO GEOMÉTRICO, DO MECÂNICO AO SIGNIFICATIVO

Gabriela Francisco

Centro de Ciências Tecnológicas
Universidade do Estado de Santa Catarina – UDESC
gabrielafrancisco0@gmail.com.

Adriano Luiz dos Santos Né

Centro de Ciências Tecnológicas
Universidade do Estado de Santa Catarina – UDESC
adriano.ne@udesc.br.

Tatiana Comiotto

Centro de Ciências Tecnológicas
Universidade do Estado de Santa Catarina – UDESC
comiotto.tatiana@gmail.com.

Resumo

Este artigo é parte de um trabalho de conclusão do curso de licenciatura em matemática e tem por objetivo analisar o aprendizado dos estudantes referente ao conteúdo de equação polinomial do segundo grau com o intuito de encontrar suas raízes, por meio de dois métodos de ensino, um utilizando a fórmula de Bhaskara (comumente utilizada pelos professores do ensino fundamental para ensinar estudantes do nono ano) e outro por meio do uso do Material Dourado (idealizado por Maria Montessori), este último servindo como uma metodologia alternativa para os professores. Estes métodos foram aplicados em uma escola pública localizada no bairro Floresta na cidade de Joinville, no primeiro semestre de 2018, com duas turmas do nono ano do ensino fundamental. Em uma turma as aulas foram ministradas através do método “tradicional” utilizando a fórmula de Bhaskara e na outra as aulas foram diferenciadas com a utilização de Material Dourado. Como resultados obtidos apresentaram-se pontos positivos e negativos na utilização destes dois métodos para resolver equações do segundo grau, e apontaram-se algumas potencialidades que a utilização do Material Dourado traz para o processo de aprendizagem deste assunto quando comparado ao uso da fórmula de Bhaskara.

Palavras-chave: Ensino de Matemática. Equação polinomial do segundo grau. Bhaskara, Material Dourado.

Abstract

This article is part of a paper that concludes the undergraduate degree course in mathematics and aims to analyze students' learning regarding the content of the high school equation in order to find its roots through two teaching methods, one using Bhaskara's formula (commonly used by elementary school teachers to teach ninth graders) and another through the use of the Golden Material (designed by Maria Montessori), the latter serving as an alternative methodology for teachers. These methods were

applied in a public school located in the Floresta neighborhood of Joinville, in the first semester of 2018, with two ninth grade classes. In one class the classes were taught using the “traditional” method using the Bhaskara formula and in the other the classes were differentiated using Golden Material. The obtained results presented positive and negative points in the use of these two methods to solve equations of the second degree and pointed out some potentialities that the use of the Golden Material brings to the learning process of this subject when compared to the use of the Bhaskara formula.

Keywords: Mathematics Teaching. Second degree equation. Bhaskara. Golden material.

Introdução

Nas discussões que permeiam o campo educacional é muito comum encontrar professores, estudantes e pesquisadores mencionando a existência de uma forma de ensino “tradicional”. Entretanto, não é uma tarefa fácil definir o que é esta prática de ensino.

Não se tem a intenção de realizar esta tarefa neste artigo, mas para as argumentações que se apresentarão mais adiante, levantaram-se algumas considerações de características que parecem estar atreladas aos discursos que se referem – seja na escola ou na universidade – a um ensino dito como “tradicional”. Por exemplo, ao se realizar uma classificação deste tipo entende-se que o professor e o estudante têm um papel bem definido, o professor é o sujeito ativo no processo tendo o domínio do conteúdo e das informações necessárias para a aula e o estudante é o sujeito passivo que acompanha as aulas através do raciocínio do professor. Mesmo que o estudante não entenda o conteúdo, o professor tem que explicar de outra maneira para que haja o entendimento, mas mesmo assim o professor é o centro em todo este processo.

Tudo isso parece dar espaço para que se pense em novas formas de agir em sala de aula, de maneira a superar estas práticas de “seguir o professor”, com forte caráter de memorização, tentando fazer com que os estudantes possam ser agentes ativos no seu processo de aprendizagem, atribuindo novos significados matemáticos em sua vida escolar e cotidiana.

Diante deste panorama, organizou-se uma investigação em sala de aula em que se propôs realizar duas formas de abordagem distintas, uma tradicional com uso de um material concreto para ensinar a resolução de equações do segundo grau. Desta forma, foi possível analisar o processo de ensino e aprendizagem das duas turmas, observando habilidades adquiridas e dificuldades que os estudantes apresentaram em seu processo de aprendizagem. Portanto, esta investigação se articula com outras que visam analisar formas alternativas –

tomando como base comparativa aquilo que se entende como “tradicional” – para o ensino de matemática.

O objetivo geral deste artigo é apresentar uma análise do aprendizado de dois grupos de estudantes quanto à resolução de equações do segundo grau por meio de dois métodos de ensino diferentes, um deles tradicional, utilizando a fórmula de Bhaskara e o outro por um método diferenciado que utiliza o Material Dourado para encontrar as raízes deste tipo de equação.

Para alcançar este objetivo identificaram-se as dificuldades dos estudantes no desenvolvimento das atividades propostas em sala de aula, apontaram-se alguns pontos positivos e negativos dos dois métodos e isso permitiu obter alguns conhecimentos neste método de ensino alternativo para o ensino de equações do segundo grau, que se divulgam na intenção de contribuir com aqueles que se interessam por esta mesma temática.

Equação polinomial do segundo grau

A equação polinomial do segundo grau é um conteúdo ensinado, geralmente, aos estudantes do nono ano do ensino fundamental. Algumas escolas ensinam este conteúdo pelo que se pode chamar de método de ensino tradicional, em que o professor apresenta a definição, faz alguns exemplos e depois os estudantes fazem listas de exercícios para fixar o conteúdo. Desta forma, um dos efeitos desta maneira de proceder é que os estudantes memorizam o processo e depois só repetem quando necessário. Segundo Silva, Oliveira e Camargo (2016, p. 2), “a matemática da escola geralmente preocupa-se em formalizar conteúdos, quase sempre sem levar em consideração os conhecimentos que os estudantes já possuem. Tornando-se, assim, uma disciplina desvinculada da realidade onde os estudantes vivem”.

Para descrever as relações didático-pedagógicas numa abordagem tradicional, utilizou-se a conceituação de Carvalho (2012, p. 12), quando afirma que

No ensino tradicional, o papel do professor é bem definido. Ele está ali para transmitir um conhecimento que, por hipótese, somente ele domina. Ele é o detentor das informações, e aos estudantes cabe acompanhar seu raciocínio. Se o estudante não entende, compete ao professor repetir com outras palavras, utilizar outros exemplos, buscar novas analogias, mas ele ainda é, durante a aula, a pessoa ativa, a que pensa, a que busca novos raciocínios. O estudante continua passivo, procurando sempre compreender o que o professor está falando, suas explicações.

O desenvolvimento dos conceitos necessários para a resolução de equações quadráticas tiveram uma base geométrica muito relevante, entretanto, há algum tempo em sala de aula, ou nos livros que servem de base para as aulas de matemática, estes elementos são deixados de lado para dar espaço para uma aprendizagem mais mecanizada voltada ao entendimento do uso de uma fórmula, ou outras técnicas algébricas predefinidas (como é o caso das resoluções de equações quadráticas incompletas), capazes de dar conta de resolver este tipo de equação diretamente.

O formato da equação polinomial do segundo grau é dado conforme a equação (1), com $a, b, c \in \mathbb{R}$:

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad (1)$$

Resolver a equação (1) equivale a achar suas raízes, e os valores das raízes formam o que se denomina de conjunto solução da equação, assim quando substituídos na mesma a igualdade gera uma sentença verdadeira. A resolução da equação (1) comumente é feita pela fórmula de Bhaskara, equações (2) e (3), pelo fato de permitir encontrar as raízes da equação diretamente. Bhaskara Akaria, um dos pesquisadores da resolução da equação polinomial do segundo grau, nasceu em 1114 e morreu em 1185 na Índia. O nome dado à fórmula é atribuída a Bhaskara, mas Pressi, Barbosa e Smaniotto (s.d., p. 6) sugerem que “a expressão matemática utilizada atualmente para a resolução de uma equação do 2º grau deve ser atribuída a vários pesquisadores.

$$\Delta = b^2 - 4ac \quad (2)$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \quad (3)$$

Neste método de ensino, a fórmula é genérica para a resolução de qualquer tipo da equação (1); fazendo uso deste método o professor leciona de forma mais rápida e cômoda. Em relação à aprendizagem, os estudantes acabam reconhecendo a fórmula, mas não compreendem o que a define e o seu significado geométrico.

Maria Montessori e o material dourado

A intenção deste artigo, como mencionado anteriormente, é trazer algumas reflexões a respeito de duas práticas distintas para a resolução de equações quadráticas, sendo uma delas utilizando o Material Dourado. Para tanto, irá se falar um pouco sobre este artefato e a educadora que lhe deu origem.

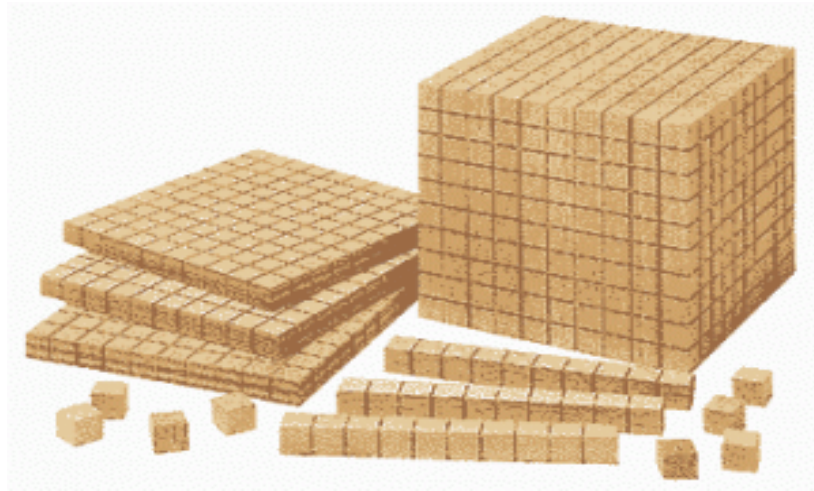
Maria Montessori nasceu em 1870 na cidade Chiaravalle na Itália e morreu no ano de 1952, formada em diversas faculdades tanto na área de exatas quanto de humanas. Segundo Duarte (2014), Montessori utilizava uma metodologia de ensino baseada em materiais concretos para que os estudantes fossem capazes de fazer suas próprias abstrações. Montessori foi a idealizadora do Material Dourado com o objetivo de ajudar os professores no ensino da matemática.

O material dourado Montessori destina-se a atividades práticas que auxiliem no ensino e aprendizagem do sistema de numeração decimal-posicional, bem como o desvendamento dos métodos usados nas operações matemáticas fundamentais, o que normalmente costuma ser apenas “decorado” por nossos estudantes, através de insistentes e exaustivos “treinos” (SÁ, s.d., p. 2).

O Material Dourado é composto por um cubo maior, placas, barras e cubos menores conforme a Figura 1. Mesmo sendo um material criado para o aprendizado do sistema de numeração decimal e suas operações, pode ser utilizado para o ensino de diferentes conteúdos matemáticos, mas para isso o professor necessita conhecer o material, refletir um pouco sobre ele e saber como aplicar em sala.

Um ponto a considerar é que “o uso do Material Dourado é importante porque as relações numéricas abstratas passam a ter uma imagem concreta, facilitando a compreensão, o desenvolvimento do raciocínio lógico e assim um aprendizado bem mais agradável” (PRESSI; BARBOSA; SMANIOTTO, s.d., p. 5), com isso, ao se utilizar este material em outros conteúdos matemáticos algumas destas características podem ser aproveitadas, inclusive, gerando novas habilidades ao processo de aprendizagem.

Figura 1 - Composição do Material Dourado



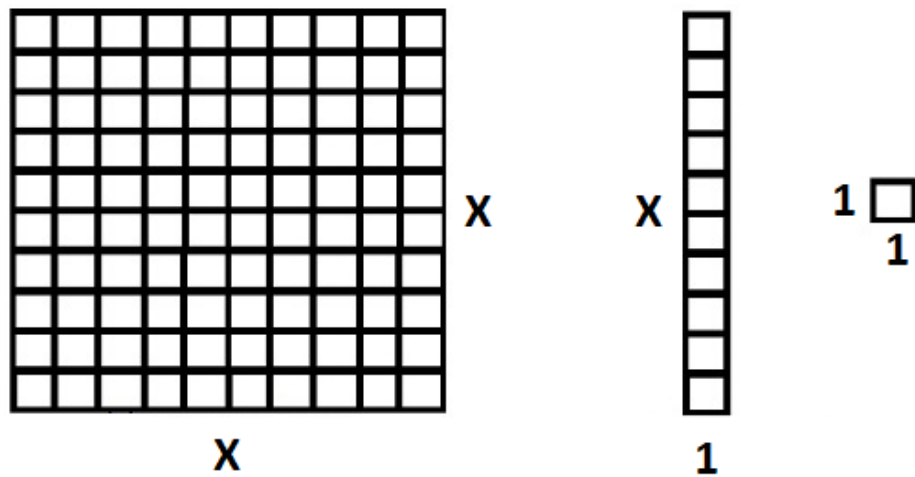
Fonte: Gonçalves (2015).

Diante da investigação que foi realizada pôde-se perceber que o Material Dourado pode ser utilizado no ensino do conteúdo de equação polinomial do segundo grau, como uma alternativa além da fórmula de Bhaskara. A potencialidade que se vê no uso deste material está nos estudantes serem colocados numa situação em que precisam demandar conceitos geométricos para a resolução da equação, o que traz características visuais para aquilo que antes era feito unicamente por ações algébricas “mecanizadas”. Ao mesmo tempo vale ressaltar que não se trata de deixar de lado a resolução algébrica para valorizar a geométrica, pelo contrário, a resolução algébrica encontra apoio na resolução geométrica, proporcionando maior significado à primeira e agilizando o processo de resolução da equação. Corroborando esta ideia, Silva, Oliveira e Camargo (2016, p. 6) perceberam que “[...] quando a matemática é trabalhada com o uso de um material de apoio, o discente visualiza alguns conceitos matemáticos o que torna o estudo mais significativo”. Para o professor lecionar utilizando esse material precisará de mais tempo que o normal, pois desenvolver esta relação entre a equação algébrica e suas representações geométricas ainda não é algo comum no processo de aprendizagem de matemática, assim é preciso adequar essas aulas ao tempo necessário para cumprir o currículo (CEOLIM, 2015).

No caso das equações do segundo grau, os conceitos geométricos estão relacionados às figuras planas, particularmente a dimensões e áreas de quadrados e retângulos, que são utilizados ao se “completar quadrados” nas representações geométricas das equações criadas através das peças do material, adicionando e retirando peças iguais quando necessário.

Para desenvolver a resolução da equação (1) utilizam-se somente três tipos de peças do Material Dourado: a placa, a barra e o cubo (Figura 2). Cada lado da placa deve ser considerado com medida x , gerando como área x^2 , a barra considera-se com largura unitária e comprimento x , o que lhe atribui área x , e o cubo como possuindo largura e comprimento unitários. A quantidade de placas, barras e cubos se dá pelo valor dos coeficientes a , b , c da equação (1) respectivamente. Este material tem especificidades: comprimento, altura e largura das peças. Neste trabalho não será levada em consideração a altura das peças, somente largura e comprimento.

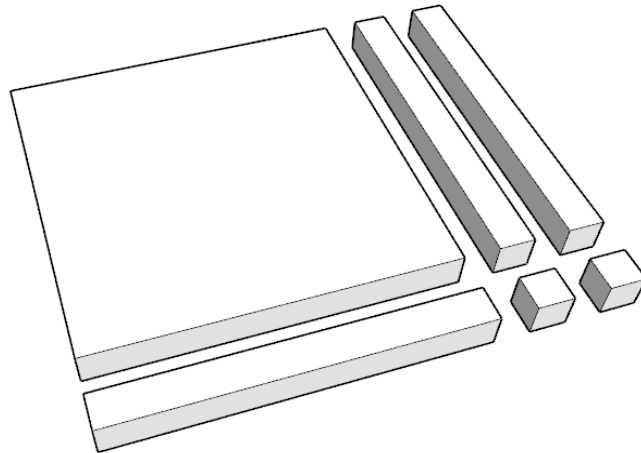
Figura 2 - Representação das dimensões das peças do Material Dourado que serão utilizadas



Fonte: Autora da pesquisa

Para entender melhor o método de resolução por meio do Material Dourado, irá se apresentar um exemplo em particular. Considere-se a equação $x^2 + 3x + 2 = 0$. Conforme mencionou-se, os coeficientes da equação são $a = 1$, $b = 3$ e $c = 2$, desta forma, tem-se uma placa representando a parcela envolvendo x^2 , três barras representando a parcela de x , e dois cubos referentes ao termo independente da equação. Com estas peças precisa-se construir um quadrado ou retângulo qualquer, conforme a Figura 3.

Figura 3 - Representação geométrica da equação com o Material Dourado



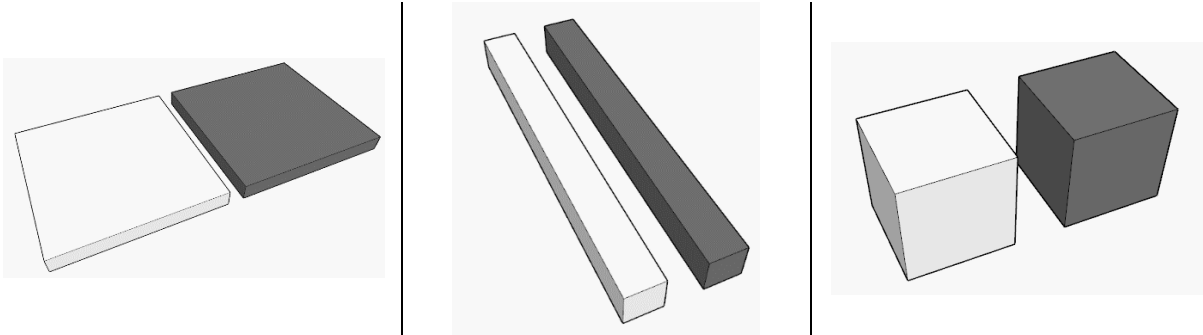
Fonte: Autora da pesquisa

Ao procurar pela área da figura, obtém-se um produto envolvendo as expressões algébricas de cada lado do retângulo (ou quadrado) formado. Neste exemplo, o produto é $(x + 2) \cdot (x + 1)$, e por ser uma expressão obtida a partir de uma equação quadrática em sua forma normal, trata-se do produto de fatores que se anulam, ou seja, $m \cdot n = 0 \Leftrightarrow (x + 2) \cdot (x + 1) = 0$, o que permite a determinação das raízes igualando cada fator a zero. Portanto, observa-se que a resolução da equação recai em um caso algébrico muito simples de ser resolvido; o estudante pode obter o conjunto solução $\{-2, -1\}$ de uma maneira bem direta.

Os resultados que se obtém com o uso do material dourado para desenvolver a Equação do 2º Grau é positivo, visto que a manipulação e a visualização do mesmo, fazem com que os estudantes demonstrem mais interesse em resolver as equações propostas, uma vez que conseguem entender o raciocínio do cálculo das equações, sendo assim as aulas de matemática que muitas vezes é somente exercícios repetitivos passa a ser vista pelo estudante mais atrativa, onde os mesmos aprendem a resolução da equação brincando (SILVA; OLIVEIRA; CAMARGO, 2016, p. 6).

Vale considerar que o Material Dourado possui algumas limitações, e para isso é importante analisar o seguinte exemplo: como proceder quando algum coeficiente da equação for negativo? (VICENTE, 2010). Para superar esta limitação e possibilitar a aplicabilidade deste material em qualquer equação quadrática de coeficientes inteiros, faz-se necessário distinguir as peças com duas cores diferentes, uma cor representando os números positivos e outra representando os números negativos. Na Figura 4 considera-se a cor branca para os coeficientes positivos e a preta para os negativos.

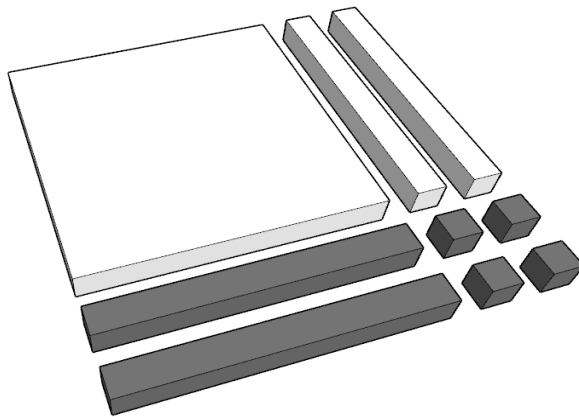
Figura 4 – As peças brancas representam os coeficientes positivos e as pretas os negativos



Fonte: Autora da pesquisa

Mais um exemplo para se entender melhor a utilização destas peças. Considera-se a equação incompleta $x^2 - 4 = 0$. Mesmo sendo uma equação de resolução algébrica muito simples, com o Material Dourado utilizar-se-á uma placa e quatro cubos, o primeiro da cor branca e os últimos pretos, pois $a = 1$ (positivo) e $c = -4$ (negativo). Entretanto, estas peças não formam um quadrado, ou algum retângulo, o que demandará a inserção de outras peças para formar uma desta figuras. Observe a resolução na Figura 5.

Figura 5 - Representação geométrica da expressão $x^2 - 4$ com o Material Dourado



Fonte: Autora da pesquisa

Com a inserção de duas barras positivas e outras duas negativas foi possível completar a figura de forma a construir um quadrado, assim gerando a representação algébrica $(-x - 2) \cdot (x - 2) = 0$, o que dá como conjunto solução $\{-2, 2\}$.

Pode-se identificar duas particularidades ao se utilizar o Material Dourado:

- 1- A representação algébrica *necessariamente* deve considerar a representação de duas dimensões da figura construída, ou seja, geometricamente, para se calcular a área do

quadrado basta tomar um de seus lados ao quadrado, que neste caso dariam representações do tipo $(-x - 2)^2 = 0$, ou $(x + 2)^2 = 0$, ou ainda $(x - 2)^2 = 0$. Cada uma delas daria uma duplicidade de raízes, o que faria perder uma das soluções.

2- Considerando duas dimensões da figura, se poderia obter uma outra representação algébrica, por exemplo, $(x + 2) \cdot (x - 2) = 0$, mas que daria o mesmo conjunto de solução, portanto a representação algébrica em casos como este não é única.

Uma vez apresentada a forma de se resolver as equações do segundo grau empregando o Material Dourado irá se passar para a organização metodológica da pesquisa que se realizou utilizando esta prática.

Organização metodológica da pesquisa

Os dados coletados na pesquisa realizada foram obtidos através de aulas ministradas pela então acadêmica, autora do trabalho de conclusão de curso, atualmente formada em Licenciatura em Matemática, em duas turmas de nono ano do ensino fundamental. Essas turmas não tinham estudado o conteúdo de equação de segundo grau anteriormente. Isso ocorreu em uma escola pública localizada na zona sul da cidade de Joinville, Santa Catarina, no primeiro semestre de 2018. Com uma turma foram ensinadas equações do segundo grau utilizando-se da fórmula de Bhaskara e na outra com o Material Dourado. Na primeira aula foi aplicado um pré-teste aos estudantes de forma individual sobre o conteúdo de equação polinomial do segundo grau, para analisar o conhecimento que eles já possuíam sobre o conteúdo e na última das aulas ministradas foi realizado um pós-teste para avaliar o conhecimento adquirido em cada um dos métodos.

No total foram quatorze aulas sobre o conteúdo de equação do segundo grau até alcançar o cálculo de suas raízes através desses dois métodos, sendo seis aulas para o 9º ano C e oito aulas para o 9º ano B. As aulas diferenciadas ministradas com o 9º ano B seguiram a sequência: na primeira aula foi aplicado o pré-teste; na segunda foram exploradas algumas características como: o que caracteriza uma equação polinomial do segundo grau, os coeficientes de cada termo e as equações do segundo grau completas e incompletas; a terceira, quarta, quinta e sexta aula foram destinadas para resolução de equações utilizando o Material Dourado, por meio de exercícios selecionados pela acadêmica, sempre lembrando suas características; na sétima aula foram feitos exercícios de resolução de equações do segundo grau pelo método do Material Dourado, mas desta vez sem o uso do material, colocando os

estudantes numa posição de criarem em seus cadernos registros das representações e também se preparassem para fazer o pós-teste; por fim, na oitava aula foi aplicado o pós-teste aos estudantes.

Já as aulas tradicionais ministradas para o 9º ano C a seguinte sequência foi adotada: na primeira aula foi aplicado o pré-teste; na segunda foram exploradas algumas características da equação como: o que caracteriza uma equação polinomial do segundo grau, os coeficientes de cada termo e as equações do segundo grau completas e incompletas; a terceira, quarta e quinta aula foram destinadas para a resolução de equações através de exercícios selecionados do livro didático dos estudantes, utilizando a fórmula de Bhaskara e destacando suas características exploradas anteriormente; por fim, na sexta aula foi aplicado o pós-teste aos estudantes.

Análise e discussão das aulas ministradas

Pré-teste

O pré-teste foi aplicado de forma individual; o 9º ano B possuía 26 estudantes e o 9º ano C, 25 estudantes. Este teste teve como objetivo analisar o conhecimento que os estudantes possuíam sobre o conteúdo de equação polinomial do segundo grau. As perguntas foram mescladas entre discursivas e objetivas, a maioria dos estudantes responderam todas as perguntas e alguns deixaram em branco uma ou duas questões. Analisando o pré-teste, o 9º ano B obteve média de 3,02; enquanto o 9º ano C obteve a média de 2,10.

Quadro 1 – Pré-teste aplicado às duas turmas

Pré-Teste	
Qual equação abaixo caracteriza uma equação do 2º grau?	
a) $x^3 - x = 10$	c) $x^2 - 5x + 6 = 0$ e) $x = 9$
b) $3x + 4 = 20$	d) $9x + 6 = 7x + 4$
Cite um método de resolução para equação do 2º grau.	
O que são raízes da equação do 2º grau?	
Qual das alternativas abaixo são raízes da equação $x^2 - 4x + 3 = 0$:	
a) -1 e 3	b) 1 e 4 c) 2 e 3 d) -1 e -3 e) 1 e 3
Qual das alternativas abaixo são raízes da equação $x^2 - 8x = 0$:	
a) 0 e 2	b) 2 e 4 c) 0 e 8 d) 0 e -2 e) -2 e 4
Qual das alternativas abaixo são raízes da equação $x^2 - 25 = 0$:	
a) -5 e 5	b) 1 e 5 c) 0 e 5 d) 1 e 4 e) 2 e 3

Fonte: Autora da pesquisa

Diante dos resultados, pode-se perceber que muitos estudantes conseguem identificar uma equação polinomial do segundo grau, pois na questão 1 mais de 60% dos estudantes do 9º ano B acertaram, enquanto no 9º C foram 50%.

Por se tratar de um conteúdo até então novo, os estudantes não conheciam nenhum método para resolver equações quadráticas. Um estudante mencionou sobre a fórmula de Bhaskara, mas ao ser questionado não sabia do que se tratava, apenas já havia conversado a respeito com seu irmão que estava em um nível de ensino mais adiantado. Além disso, os estudantes também não apresentaram um bom entendimento a respeito do que são as raízes de uma equação polinomial do segundo grau. Alguns acabaram associando com os conceitos de raízes quadradas e cúbicas.

Mesmo diante destas respostas, os estudantes resolveram as questões 4, 5 e 6 que perguntavam sobre as raízes de algumas equações do segundo grau. O 9º ano B também apresentou um aproveitamento ligeiramente maior que o 9º ano C nestas três questões (Figuras 6 e 7 – comparativo entre o pré e o pós-teste).

Aulas no 9º ano C

As aulas foram ministradas através de um método de ensino “tradicional” (CARVALHO, 2012). A acadêmica que realizou esta pesquisa, na posição de professora da turma, apresentou aos estudantes todos os conceitos sobre equação polinomial do segundo grau enquanto os mesmos prestavam atenção às suas explicações. Pode-se comprovar que nessas aulas o papel da pesquisadora e o dos estudantes estavam bem definidos; aquela, era o sujeito ativo e, estes, os sujeitos passivos em todo o processo de aprendizagem.

Foram destinadas seis aulas para o 9º ano C através deste método tradicional. Na primeira aula foi aplicado o pré-teste, na segunda aula foram exploradas as características de uma equação polinomial do segundo grau como: reconhecer uma equação polinomial do segundo grau, os seus coeficientes e quando as equações do segundo grau são completas e incompletas. O conteúdo foi exposto aos estudantes através de explicações da pesquisadora e registros no quadro. Na terceira aula foi trabalhada a resolução de uma equação polinomial do segundo grau através da fórmula de Bhaskara, em que a pesquisadora escreveu a fórmula no quadro e foi explicando aos estudantes seus termos, condição de existência das raízes de acordo com o discriminante (Δ), como utilizar a fórmula e também lembrando as características explicadas anteriormente.

A quarta aula foi destinada para resoluções dos exercícios utilizando a fórmula de Bhaskara. Na quinta foi realizada a correção dos exercícios feitos na aula anterior e deixados como tarefa. Na sexta aula foi aplicado o pós-teste. Todas estas aulas tiveram duração de três semanas, na primeira semana foram três aulas (com uma aula destinada à aplicação do pré-teste), na segunda semana duas aulas e na terceira semana uma aula destinadas à aplicação do pós-teste. Todas as aulas com duração de 48 minutos cada uma.

Aulas no 9º ano B

Essas aulas foram feitas através de uma metodologia diferenciada utilizando o Material Dourado, assim os estudantes puderam visualizar melhor a representação geométrica de uma equação polinomial do segundo grau manipulando as peças do material e fazendo a resolução algébrica através da sua representação geométrica. Com isso, os estudantes puderam ter uma aprendizagem menos abstrata, característica que além de ser observada nesta pesquisa, também pôde ser identificada por Silva, Oliveira e Camargo (2016).

Foram destinadas oito aulas para o 9º ano B utilizando o Material Dourado. Na primeira aula foram exploradas as características de uma equação polinomial do segundo grau, através de questionamentos aos estudantes para que eles pudessem ir construindo esse novo conhecimento. As outras cinco aulas foram destinadas para a resolução da equação polinomial do segundo grau com o uso do Material Dourado, para que os estudantes pudessem utilizar uma forma de resolução diferente da ensinada na escola.

Nessas aulas, a pesquisadora fazia questionamentos aos estudantes para que eles chegassem às conclusões. Esses questionamentos eram feitos através de perguntas sobre o conteúdo para que os estudantes pudessem refletir e discutir com os colegas de sala. Essas aulas foram aplicadas em três semanas, na primeira semana foram três aulas (com uma aula destinada a aplicação do pré-teste), na segunda semana foram duas aulas e na terceira semana três (com uma aula destinada à aplicação do pós-teste). Todas aulas tiveram duração de 48 minutos cada uma.

Dessas oito aulas, seis aulas estavam no planejamento da pesquisadora, as outras duas aulas foram acrescentadas devido à necessidade de mais tempo para terminar as atividades; uma aula para que os estudantes pudessem terminar a resolução dos exercícios com o auxílio da pesquisadora para sanar as dúvidas. A outra foi feita com resoluções de exercícios, mas sem o Material Dourado para que os estudantes pudessem registrar no caderno o desenvolvimento das questões e também para fazerem a aplicação do pós-teste.

Ficou evidente que a questão do tempo se torna um obstáculo que deve ser vencido pelos professores na aplicação de aulas diferenciadas, pois essas aulas demandam mais tempo do que as aulas tradicionais. Segundo Ceolim (2015), isso é um obstáculo pelo fato dos professores terem que dar conta de todo o currículo escolar. No entanto, o mais importante é o aprendizado dos estudantes de forma significativa.

Na primeira aula foram exploradas as características de uma equação polinomial do segundo grau através de questionamentos para que os estudantes chegassem às conclusões corretas. A aula começou com uma pergunta: “O que é uma equação polinomial do segundo grau?” Alguns não conseguiram responder, assim a pesquisadora questionou: “O que é uma equação do primeiro grau?”, assunto já estudado. Os estudantes responderam que “*uma equação é uma igualdade*”, outros que “*a equação do primeiro grau tem x* ”, outros ainda que “*a equação do primeiro grau tem x e números*”, através dessas respostas a pesquisadora colocou exemplos no quadro de equações do primeiro grau, com essas relações os estudantes conseguiram fazer uma associação sobre o que é uma equação polinomial do segundo grau,

respondendo que “*então na equação do segundo grau também tem igualdade*”, “*na equação do segundo grau tem x^2 e números*”, assim foram colocados no quadro exemplos de equações do segundo grau conforme as respostas dos estudantes.

Em seguida foi exposta no quadro a forma geral de uma equação polinomial do segundo grau conforme as respostas dos estudantes. A partir dela apareceram as letras a , b e c que os estudantes reconheceram como uma letra que poderia assumir qualquer valor. A pesquisadora fez mais uma pergunta em relação à letra a : Ela pode assumir qualquer valor? No primeiro momento os estudantes disseram que “*sim*”, mas alguns minutos depois um estudante respondeu: “*Não pode professora, porque se a for zero não teria mais o x^2 .*” Foi feita a mesma pergunta para os estudantes em relação às letras b e c se poderiam assumir qualquer valor, e os estudantes afirmaram que “*sim*”. A pesquisadora perguntou o que são os coeficientes da equação, mas os estudantes não souberam responder. Fazendo novamente a relação com a equação do primeiro grau que foi escrita no quadro, os estudantes então conseguiram responder que “*os coeficientes são o a , b e c* ”, também falaram que “*o a acompanha o x^2 , o b acompanha o x e o c não acompanha nenhum x* ”. A professora completou dizendo que se ele não depende de ninguém ele é “*independente*”. Depois desse debate coletivo os estudantes fizeram alguns exercícios. Logo após a correção, a pesquisadora questionava os estudantes sobre o que tinham feito.

A segunda parte da aula foi destinada para falar sobre as equações do segundo grau completas e incompletas. Novamente a pesquisadora questionou os estudantes: “*O que é uma equação do segundo grau completa?*”, os estudantes ficaram pensativos, pois sabiam o que era uma equação polinomial do segundo grau, mas agora como a caracterizar como completa? Utilizando o exercício anterior, os estudantes responderam que “*uma equação completa tem todos os coeficientes*”. Quando foi feita a outra pergunta: “*O que é uma equação do segundo grau incompleta?*”, os estudantes responderam “*quando falta algum termo*”. Depois desse debate coletivo os estudantes fizeram alguns exercícios. Em seguida, houve a correção por parte da pesquisadora que, do mesmo modo, questionou os estudantes sobre o que tinham feito.

Essa aula foi de extrema importância para dar autonomia aos estudantes no processo de aprendizado, fazendo com que eles refletissem sobre o conteúdo e tirassem suas conclusões. Os questionamentos realizados, nessas aulas diferenciadas, tiveram o objetivo de oportunizar reflexões; por exemplo, quando os estudantes não conseguiam tirar suas conclusões sobre as equações do segundo grau, a pesquisadora trazia questionamentos sobre

equação do primeiro grau para que eles pudessem fazer relações, refletir e pensar como seria, então, para equação polinomial do segundo grau.

Na segunda aula, foram lembradas as características de uma equação polinomial do segundo grau estudadas na aula anterior através de perguntas aos estudantes e, também, iniciou-se a parte referente às resoluções de uma equação polinomial do segundo grau com o Material Dourado. Antes de iniciar algum diálogo sobre a resolução foi perguntado aos estudantes: *“Por que se resolve uma equação do 2º grau? O que se quer encontrar?”*. As respostas dos estudantes foram imediatas e diretas: *“Para achar o x ”*. A pesquisadora questionou: *“O que são as raízes da equação?”* Os estudantes ficaram em dúvida na resposta. Um estudante falou *“é a raiz quadrada professora?”*. A pesquisadora explicou que, nesse caso, não se irá tirar a raiz quadrada de um número. Então, a pesquisadora perguntou novamente o que se quer encontrar e os estudantes responderam: *“Achar o x professora”*. Com isso, a pesquisadora perguntou: *“Como a gente pode relacionar o x que se irá encontrar com as raízes da equação?”*. Alguns falaram: *“o x que a gente encontrar é raiz da equação?”*. A pesquisadora respondeu que sim e afirmou novamente que as raízes são os valores de x encontrados.

Em seguida foi apresentado aos estudantes o Material Dourado, falando da sua utilização e de sua criadora. Os estudantes não haviam tido nenhum contato com o material anteriormente, apesar dos materiais estarem disponíveis na escola. Nas aulas os materiais dourados utilizados foram os da escola e também os da universidade. Como atividades, os estudantes teriam que relacionar as peças do material com a forma geral de uma equação polinomial do segundo grau. Essa parte foi bem intuitiva, os estudantes relacionaram a placa com o coeficiente a , a barra com o coeficiente b e o cubo com o coeficiente c .

Para começar a parte resolutiva, a pesquisadora colocou um exemplo no quadro e dividiu os estudantes em grupos de até 4 pessoas e distribuiu o Material Dourado, com algumas peças na cor de madeira e outras peças coloridas, que, na resolução, os estudantes utilizaram para representar coeficientes positivos e negativos. Esta foi uma melhoria feita pela pesquisadora para distinguir os positivos dos negativos visto que, segundo Vicente (2010), ele ser todo de uma cor e não ter distinções era uma deficiência do material para o trabalho com as equações quadráticas.

Assim, a pesquisadora começou perguntando aos estudantes: *“Como se pode obter uma representação geométrica da equação através do Material Dourado?”*. Os estudantes iam tentando fazer de vários jeitos. Alguns estudantes ficaram em dúvida sobre o que era uma

representação geométrica. A pesquisadora mudou a pergunta: “*Como se podem obter uma figura geométrica da equação através do Material Dourado?*”. Os estudantes representaram algumas figuras: quadrados, retângulos, hexágono, ... de forma aleatória. Como os estudantes não estavam evoluindo para chegar em uma representação próxima da esperada, a pesquisadora teve que fazer uma intervenção através da equação que estava no quadro: $x^2 - 5x + 6 = 0$. Perguntou aos estudantes quantas peças do material seriam utilizadas nessa equação olhando os seus coeficientes? Solicitou que os mesmos separassem as suas peças e explicou que a figura geométrica com as peças teria que ficar completa, não poderia ser desenhada só a borda e deixar vazio no meio, concluindo com os estudantes que as representações geométricas teriam que ser quadradas ou retangulares e as peças teriam que estar alinhadas.

Por fim, já representado o exemplo geometricamente, veio a parte algébrica. A pesquisadora fez um desenho da representação no quadro para que todos os estudantes visualizassem (mesmo eles tendo a forma geométrica em sua carteira) e em seguida foi questionando os estudantes qual a expressão algébrica que se teria na base e altura da figura considerando sua dimensão. Essa parte, também, foi mais intuitiva para os estudantes, pois já estavam familiarizados, chegando à conclusão de que a base seria $(-x + 2)$ e a altura $(-x + 3)$.

Com isso, para fazer a resolução da equação através da condução da pesquisadora os estudantes tiveram que fazer a seguinte operação $(-x + 2)(-x + 3) = 0$. Essa forma de resolução os estudantes já haviam estudado, então chegaram à resposta correta. Deste modo, nessas aulas os estudantes tinham as equações na forma algébrica e através da manipulação dos objetos concretos conseguiram transformar essas equações em uma representação geométrica concreta, desenvolvendo todo o processo da resolução de forma prática, fazendo relações entre o concreto e o abstrato.

Nas outras duas aulas os estudantes fizeram resoluções de exercícios em grupo de até quatro estudantes e com o Material Dourado. A pesquisadora foi circulando pela sala para tirar as dúvidas e verificar se estavam conseguindo realizar os exercícios. A maioria estava desenvolvendo bem as resoluções, mas tinham alguns estudantes com dificuldades e precisavam de ajuda. Segundo Araújo (2013, p. 888),

No ensino da matemática, destacam-se dois aspectos básicos: um consiste em relacionar observações do mundo real com representações (esquemas, tabelas e figuras); outro consiste em relacionar essas representações com princípios e conceitos matemáticos.

Nesse processo de aprendizagem os estudantes tinham que observar a equação relacionando com sua representação geométrica e depois novamente relacionar essas representações com a sua resolução utilizando conceitos matemáticos. Nas resoluções, os estudantes faziam a manipulação do material para chegar às suas raízes sem precisar decorar uma fórmula, nem terem que fazer diversos exercícios para treinar a sua utilização; faziam a descoberta da resolução na prática com o material (SÁ, s.d). É importante ressaltar que com o uso do Material Dourado o estudante pode fazer a resolução de equações do segundo grau completas e incompletas, assim a pesquisadora não precisou intervir nas resoluções das equações incompletas, pois os estudantes conseguiram resolver utilizando a mesma ideia das equações completas.

Na penúltima aula foram realizadas resoluções de exercícios sem a utilização do Material Dourado e de maneira individual utilizando o caderno, para que pudessem exercitar sem a presença do material concreto, pois na aplicação do pós-teste os estudantes procederiam desta forma. Além disso, é relevante que os estudantes aprendam a resolver sem o material concreto em mãos, porque em outras avaliações e até mesmo no vestibular, eles não terão acesso ao mesmo.

Os estudantes conseguiram fazer o desenvolvimento das resoluções das equações do segundo grau completas e incompletas no caderno muito bem sem o Material Dourado; a única dificuldade observada foi, por exemplo, na equação $x^2 - 9 = 0$ em que os estudantes utilizaram uma placa e nove cubos negativos, colocando-os de maneira enfileirada ao lado da placa. Pelo que foi estudado em aula, o procedimento a ser adotado deveria ser semelhante aos exercícios feito em sala, mas como não tinham as peças concretas não conseguiram observar que dessa forma não fecharia a figura. Na última aula foi feita a aplicação do pós-teste.

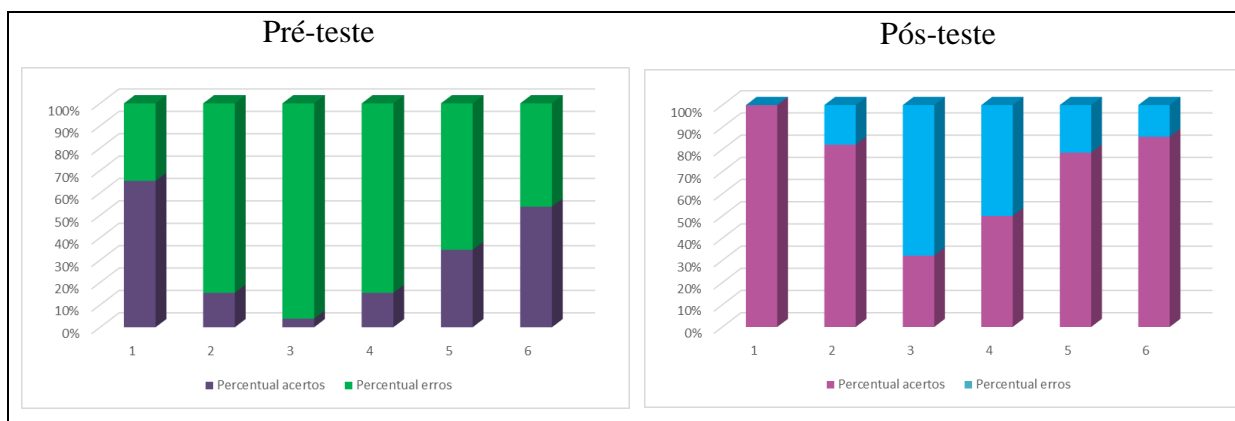
Vale ressaltar que com a utilização do Material Dourado os estudantes têm uma representação menos abstrata e mais concreta do processo resolutivo (SILVA; OLIVEIRA; CAMARGO, 2016). “É importante que se incentive os estudantes quanto ao valor da utilização desse material, sendo que se espera que as atividades os levem a entender, de forma prática, as equações quadráticas e evidenciá-las no seu cotidiano” (VICENTE, 2010, p. 9).

Pós-teste

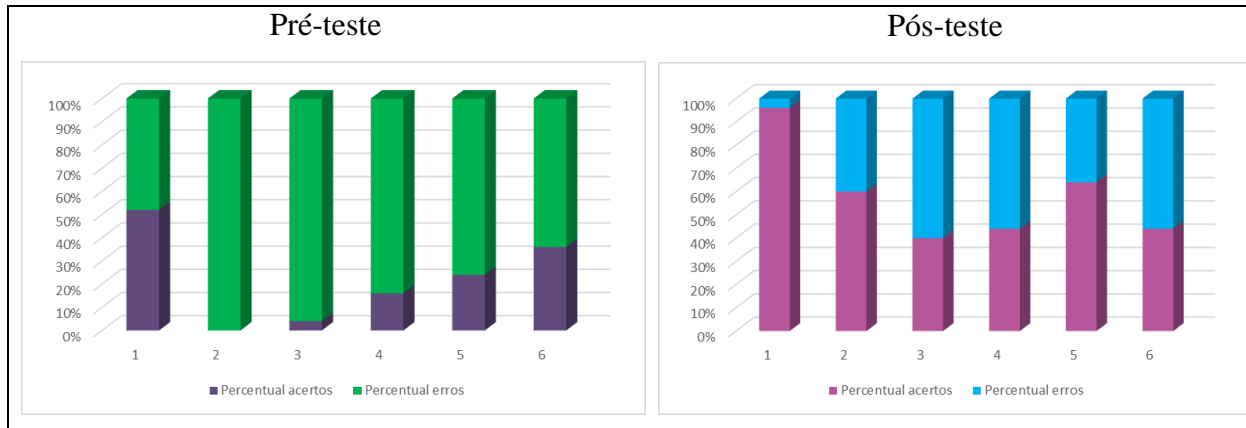
A aplicação do pós-teste foi feita nas duas turmas de forma individual. As perguntas eram as mesmas do pré-teste, todas elas foram estudadas em sala de aula e esperava-se que os estudantes tivessem um bom desempenho. O objetivo do pós-teste era analisar o conhecimento adquirido pelo estudante no decorrer das aulas ministradas pela pesquisadora. Analisando o pós-teste, pode-se concluir que os estudantes do 9º ano B tiveram um maior desempenho obtendo média de nota igual a 7,00 enquanto o 9º ano C obteve a média de nota igual a 5,50.

Já esperava-se que após um considerável número de aulas sobre o assunto os estudantes iriam se sair melhores no pós-teste em relação ao pré-teste, entretanto, avaliando os resultados numéricos apontados nas Figuras 6 e 7, pode-se identificar que a utilização do Material Dourado para a resolução das equações do segundo grau foi um método de resolução que gerou melhores resultados do que a aplicação direta da fórmula de Bhaskara, o que também pôde ser observado na pesquisa realizada por Silva, Oliveira e Camargo (2016).

Figura 6 – Resultados do pré-teste e pós-teste do 9º Ano B



Fonte: Autora da pesquisa

Figura 7 – Resultados do pré-teste e pós-teste do 9º Ano C

Fonte: Autora da pesquisa

Como já mencionado, tratar a resolução de equações do segundo grau por meio da fórmula de Bhaskara, ou algum outro tipo de fatoração algébrica relaciona a este conhecimento matemático um caráter totalmente algébrico, caráter necessário de ser reconhecido por qualquer estudante da educação básica e que se coloca favorável ao seu ensino nas escolas. Entretanto, ao utilizar-se o Material Dourado apresentou-se uma forma geométrica de representar e resolver uma equação polinomial do segundo grau; mais do que ampliar as possibilidades de ação dos estudantes, também há aí uma ampliação do significado que ele poderá atribuir ao conhecimento matemático, então, ao introduzir este material concreto, atingiu-se uma prática de ensino que proporciona outro patamar de aprendizagem.

Analisando os pontos positivos e negativos dos dois métodos aqui apresentados, é importante reconhecer que ao optar pela utilização da fórmula de Bhaskara colocou-se os estudantes numa prática que demanda a manipulação de uma série de regras algébricas já estudadas, o que, sem dúvida, enriquece o desenvolvimento matemático dos mesmos, pois mesmo sendo uma fórmula pronta, seu uso necessita da correta substituição de valores numéricos, o respeito da ordem de resoluções das operações presentes na fórmula, o cuidado ao lidar com os sinais demanda uma reflexão a respeito do resultado do discriminante (Δ) para discorrer sobre a existência das raízes.

Além disso, mesmo não sendo um ponto alcançado nas aulas ministradas, vale lembrar que a utilização da fórmula de Bhaskara amplia a resolução da equação polinomial do segundo grau para os casos em que os coeficientes são racionais quaisquer e também irracionais, além de servir para no futuro realizar o estudo das soluções complexas. Estes pareceram ser os principais pontos positivos de se utilizar desta forma de resolução.

Já o que ela traz de negativo é a “passividade” dos estudantes durante o processo de resolução, por se tratar de uma constante repetição de processos que são muito semelhantes, fazendo com que os estudantes acabem memorizando o processo e aplicando-o diretamente quando necessário, sem muita reflexão. Além disso, neste método os estudantes não conseguem atribuir outro significado às equações do segundo grau senão o algébrico, eliminando deste conhecimento matemático toda uma abordagem geométrica que historicamente lhe é associado.

Em relação ao método de resolução com o uso do Material Dourado, a prática matemática proposta demanda a utilização de dois tipos de representações distintas para o mesmo objeto matemático, ou seja, partindo de um problema algébrico – neste caso a resolução de uma equação polinomial do segundo grau – os estudantes associam cada parte da equação a uma representação geométrica por meio do material concreto. Em seguida manipulam estas representações para reorganizarem as peças e, então, obter uma figura geométrica conhecida. Como já possuem certo conhecimento sobre ela, lançam mão deste conhecimento para tirar suas conclusões, desta forma, retornam ao problema algébrico e resolvem-no. Este nos parece ser o principal ponto positivo do uso do material concreto para a resolução deste tipo de equações. Ainda falando dos pontos positivos, vale mencionar que de maneira diferente do uso da fórmula de Bhaskara, ao possibilitar uma resolução amparada em representações geométricas, o Material Dourado está mantendo associada a estas equações uma característica que historicamente está na motivação de seus estudos (ROQUE, 2012).

Quando se pensou em pontos negativos, primeiramente vale mencionar que o uso do Material Dourado limita a resolução das equações para os casos em que seus coeficientes não são inteiros, ou seja, equações do tipo $x^2 + \frac{1}{6}x - \frac{1}{3} = 0$. Outro ponto é que – como em qualquer tentativa de utilização de material concreto – a materialidade do objeto limita as possibilidades de resolução às dimensões físicas do próprio objeto concreto. E isso só pode ser superado quando os estudantes são capazes de ultrapassar o uso do material concreto, partindo para os seus registros escritos no caderno, como foi feito no pós-teste.

Considerações Finais

Na seção final deste artigo, é importante mencionar que quando se optou por realizar práticas de ensino distintas em duas turmas – uma de forma “tradicional” e outra com o uso de material concreto – não se tinha a intenção de concluir qual é o “melhor” método, ou com

qual deles o estudante aprende mais. Além de se apresentar resultados de aplicações em contextos bem particulares (duas turmas, de uma escola, de um bairro, de uma cidade, do Sul do Brasil), as práticas realizadas nas duas turmas não se diferenciaram apenas pelo método utilizado para a resolução das equações do segundo grau, houve, provavelmente, outros fatores que também influenciaram nos processos de ensino e aprendizagem efetivados.

Entretanto, com estas duas abordagens distintas pretendia-se – como se mencionou na introdução deste artigo – analisar a aprendizagem dos estudantes nos dois métodos, identificando as principais dificuldades, tentando elencar pontos positivos e negativos de cada método e ao mesmo tempo desenvolver algum conhecimento em relação à utilização do Material Dourado na resolução das equações do segundo grau.

Ao se refletir sobre as dificuldades que os estudantes apresentaram ao utilizarem a fórmula de Bhaskara, foi possível perceber que mesmo havendo em sala uma discussão inicial sobre a função do cálculo do discriminante Δ nas resoluções, na prática os estudantes simplesmente aplicavam diretamente a fórmula sem reflexão alguma, ou seja, mesmo calculando o valor de Δ eles simplesmente o substituíam na fórmula e continuavam, apenas ao final reconheciam se as raízes possuíam duplicidade ou não, ou se não havia uma solução real, o que aponta para o automatismo na prática matemática que se mencionou no decorrer deste artigo.

Além disso, por se tratar de uma fórmula que demanda certo grau de conhecimentos aritméticos e algébricos, os estudantes apresentaram muitos erros nas substituições de valores, em operações utilizando as regras de sinais e até em alguns cálculos aritméticos considerados básicos.

Estas reflexões permitem apresentar um ponto que não se tratou na seção anterior. Mesmo sendo uma prática que muitas vezes pode ser realizada de forma mecânica, a utilização da fórmula de Bhaskara serve de “indicador” quanto ao conhecimento aritmético/algébrico da turma. Sua correta utilização, por mais que possa estar desprovida de um significado geométrico, apontará para um bom conhecimento algébrico dos estudantes, ao passo que os erros servirão para apontar elementos a serem melhorados nas aulas que se sucederão.

Já no método diferenciado, as dificuldades dos estudantes surgiram no início do processo, ao conhecerem o Material Dourado e saber como aplicá-lo, pois, num primeiro momento, não foram evidentes as relações entre o material concreto e as parcelas envolvidas

na equação. Depois que ficaram familiarizados, os estudantes conseguiram utilizar o material sem maiores dificuldades.

Também apresentaram dificuldades em relação a erros na regra de sinais e nas operações finais da resolução para encontrar as raízes. Isso permite identificar que mesmo se tratando de uma forma alternativa de resolver equações do segundo grau, ela ainda demanda a manipulação algébrica e, com isso, chegou-se a mais um ponto relevante a se considerar: o fato de se tratar de uma prática matemática que demanda o uso concomitante de representações algébricas e geométricas coloca os estudantes em uma forma de agir mais elaborada, pois como os objetos matemáticos são por “natureza” abstratos, o uso de mais de uma representação para lidar com eles amplia os significados que os estudantes podem atribuir ao conhecimento em questão. Além disso, associar representações distintas de um mesmo objeto matemático exige uma demanda cognitiva maior e, com isso, o desenvolvimento de habilidades diferentes.

Diante destes pontos apresentados e daqueles que se consideram como positivos e negativos na seção anterior, passou-se a reconhecer o uso do Material Dourado como um artefato que proporciona qualidades ao aprendizado de equações do segundo grau que apenas a utilização da fórmula de Bhaskara parece não alcançar. Este material concreto traz novas potencialidades ao processo de ensino e aprendizagem das equações do segundo grau.

Antes de terminar este artigo é válido registrar que a posição dos autores do trabalho não é a de eliminar a utilização da fórmula de Bhaskara na educação básica, mas de não restringir apenas esta forma de proceder ao se estudar as equações do segundo grau. Parece válido reorganizar o tempo de uso das aulas de matemática sobre este assunto – que geralmente é destinado exclusivamente à fórmula de Bhaskara – para inserir o uso do Material Dourado.

Referências

ARAÚJO, A. F. D. Solução de Equações do 2º grau com Material Concreto. In: Congresso iberoamericano de educação matemática, 7., 2013. Montevideo. **Anais Eletrônicos...** Montevideo: [s.n], 2013. Disponível em: <<http://cibem7.semur.edu.uy/7/actas/pdfs/148.pdf>>. Acesso em: 15 jul. 2017.

CARVALHO, A. M. P. D. **Os estágios nos Cursos de Licenciatura**. São Paulo: Cengage Learning, 2012.

CEOLIM, A. J. **Modelagem matemática na educação básica: obstáculos e dificuldades** apontados por professores. 2015. Tese (Doutorado em Educação) - Universidade Federal de São Carlos, São Carlos, 2015.

DUARTE, A. P. M. **Contribuições de Maria Montessori para as Práticas Pedagógicas na Educação Infantil**. 2014. Trabalho apresentado como parte das obrigações para obtenção do título de Licenciatura em Pedagogia, do Curso de Licenciatura em Pedagogia, Faculdade de Ciências Sociais e Agrárias de Itapeva, Itapeva, 2014.

PRESSI, A.; BARBOSA, M. A.; SMANIOTTO, M. R. **A Utilização do material dourado como Ferramenta na Resolução das Equações de 2º Grau**. [S.l.:s.n.], [20__ ?]. Disponível em:
<https://www2.faccat.br/portal/sites/default/files/A%20UTILIZACAO%20DO%20MATERIA%20L%20DOURADO.pdf>. Acesso em: 17 jul. 2017.

ROQUE, T. **História da Matemática: uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas**. Rio de Janeiro: Zahar, 2012.

SÁ, I. P. D. **O Material Dourado Montessori**. [S.l.:s.n.], [20__ ?]. 15 p. Apostila de aula de Fundamentos Teóricos e Metodologia da Matemática I. Disponível em:
<http://www.magiadamatematica.com/uss/pedagogia/15-material-dourado.pdf>. Acesso em: 18 jul. 2017.

SILVA, E. A. C. E.; OLIVEIRA, N. D. S. D. D.; CAMARGO, J. A. Revisitando a Resolução da Equação do Segundo Grau nas Séries Finais do Ensino Fundamental. In: ENCONTRO CONVERSANDO SOBRE EXTENSÃO NA UEPG, 14., 2016. Ponta Grossa. **Anais Eletrônicos...** Ponta Grossa: UEPG, 2016. Disponível em:
http://sites.uepg.br/conex/anais/anais_2016/anais2016/1096-4691-1-PB-mod.pdf. Acesso em: 19 jul. 2017.

VICENTE, C. A. D. Equações do 2º Grau, sua História e Metodologias Aplicadas. In: PARANÁ. **Secretaria de Estado da Educação**. Superintendência de Educação. O professor PDE e os desafios da escola pública paranaense, 2010. Curitiba: SEED/PR., 2014. v.1. (Cadernos PDE). Disponível em:
http://www.diaadiaeducacao.pr.gov.br/portals/cadernospde/pdebusca/producoes_pde/2010/2010_unioeste_mat_artigo_carlos_alberto_de_vicente.pdf. Acesso em: 01 dez. 2017. ISBN 978-85-8015-062-9.

*Recebido em 27 de agosto de 2019
 Aprovado em 09 de dezembro de 2019*