Determinando o volume do Sólido de Escher (dodecaedro rômbico estrelado) através de sua construção no GeoGebra

Determining the volume of Escher's Solid (starry rhombic dodecahedron) through its construction in GeoGebra.

EDERSON MARCELINO DA SILVA[1]
OLGA HARUMI SAITO[2]
SILVANA GOGOLLA DE MATTOS[3]

http://dx.doi.org/10.23925/2237-9657.2019.v8i2p044-061

RESUMO

Neste artigo, apresentamos o uso de recurso digital, o GeoGebra, no ensino e aprendizagem de poliedros, mais especificamente do dodecaedro rômbico estrelado, também conhecido como Sólido de Escher. Utilizando esse software, construímos o sólido e, durante esse processo, foi possível determinar uma fórmula para o cálculo de seu volume. Também disponibilizamos, na internet, um vídeo mostrando o passo a passo das construções, bem como os poliedros construídos na forma de applet. Acreditamos que esse trabalho contribui como uma opção de atividade aos docentes que buscam alternativas para atrair a atenção e o interesse dos alunos para conteúdos da Matemática.

Palavras-chave: *GeoGebra; ensino e aprendizagem; Sólido de Escher.*

ABSTRACT

In this article, we present the use of digital resource, GeoGebra, in the teaching and learning of polyhedron, more specifically the starry rhombic dodecahedron, also known as Escher's Solid. Using this software, we constructed the solid and, during this process, it was possible to determine a formula for the calculation its volume. We also provide, on the internet, a video showing the step-by-step of the constructions, as well as the polyhedron built in the form of applet. We believe that this work contributes with one more option to teachers who seek alternatives to attract the attention and interest by students to Mathematics contents.

[1] Colégio Militar de Curitiba - edersonmarcelinodasilva@gmail.com - https://orcid.org/0000-0003-0409-0966

[2] Universidade Tecnológica Federal do Paraná - ohsaito@gmail.com - https://orcid.org/0000-0001-7079-4502

[3] Secretaria de Estado da Educação do Paraná - syl.mattos@gmail.com

Keywords: *GeoGebra; teaching and learning; Escher's Solid.*

Introdução

Consideramos que o estudo de poliedros é um dos temas abordados na disciplina de Matemática no Ensino Básico que causa certa inquietação. Qual é a sua aplicação? Qual é a profissão que faz uso do conhecimento adquirido no estudo do icosaedro? Será que um adulto precisa saber calcular o volume de um dodecaedro? Essas e outras perguntas podem surgir na mente dos discentes e gerar um obstáculo para uma aprendizagem significativa desse tema.

Acreditamos que muitos alunos não utilizarão tudo que aprenderam no Ensino Básico ao longo de sua vida, no entanto, concordamos que, entre outros fatores e disciplinas, a aprendizagem de Matemática tem grande importância no desenvolvimento cognitivo dos alunos.

A integração das habilidades e conhecimentos adquiridos com o estudo das diversas disciplinas dessa etapa da vida escolar servirá como base para a formação de cada aluno, tornando-os cidadãos capacitados e com caráter crítico, fazendo com que "as informações, o conhecimento, as competências, as habilidades e os valores desenvolvidos sejam instrumentos reais de percepção, satisfação, interpretação, julgamento, atuação" (BRASIL, 2000, p. 4) e desenvolvimento pessoal. Isso será útil não só no ambiente de trabalho, mas na vida como um todo.

Diante do exposto e corroborando com Sartor (2013), é importante que o professor utilize formas diferenciadas para atrair a atenção e o interesse dos alunos à Matemática. Com isso ele, possivelmente, facilitará a aprendizagem dessa disciplina tornando-a mais prazerosa e, dessa forma, a Matemática deixa de ser apenas mais uma matéria e passa a ser uma ferramenta de apoio para um melhor desenvolvimento cognitivo, acadêmico e pessoal.

Procurando atingir esse objetivo, no âmbito do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) realizado na Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR), em Curitiba, desenvolvemos uma dissertação (SILVA, 2018) na qual apresentamos algumas sugestões para abordar o tema poliedros em sala de aula no Ensino Básico.

Tal trabalho teve como motivação a procura de maneiras para tratar o assunto poliedros em sala de aula para atrair a atenção e o interesse dos alunos. Buscamos apresentar exemplos de sua presença na natureza, na arquitetura e na arte.

Na arte, apresentamos a presença dos poliedros em algumas das obras do artista gráfico Maurits Cornelis Escher e realizamos o estudo de um dos poliedros (o Sólido de Escher) presente em seus trabalhos. Para tal, antes foi necessário apresentar aspectos históricos e as características dos poliedros de Platão, Arquimedes, Catalan e Kepler-Poinsot, passando por definições de poliedros e de volume de poliedros.

1. O Sólido de Escher

Escher afirmava: “apesar de não possuir qualquer conhecimento ou treino nas ciências exatas, sinto muitas vezes que tenho mais em comum com os matemáticos do que com os meus colegas artistas” (PERES; NASCIMENTO, 20–, p. 2). Mesmo sem intenção inicial de trilhar pelos caminhos da Matemática, as obras do artista gráfico holandês Maurits Cornelis Escher têm grande destaque nessa área, principalmente quando o assunto é Geometria.

Com trabalhos que exploram construções impossíveis, pavimentação de planos e transformações de imagens, as obras desse artista têm o poder de atrair olhares e instigar a curiosidade de diversas pessoas. Mesmo os alunos mais avessos ao estudo da Matemática poderão se impressionar e se interessar pelo conceito utilizado em cada obra.

Uma das obras feitas por Escher foi a litogravura Cascata, Figura 1(a), de 1961, que tem, no alto de suas torres, dois poliedros. O que está sobre a torre esquerda é uma composição de três cubos e o da torre direita é um dodecaedro rômbico estrelado que, graças a essa obra, ficou conhecido como Sólido de Escher. Essa obra exibe uma construção impossível baseada, segundo Ernst (1991), no Triângulo de Penrose, Figura 1(b). Esse triângulo, formado por arestas tridimensionais perpendiculares entre si, teria 270º como soma dos ângulos internos, o que seria geometricamente impossível.

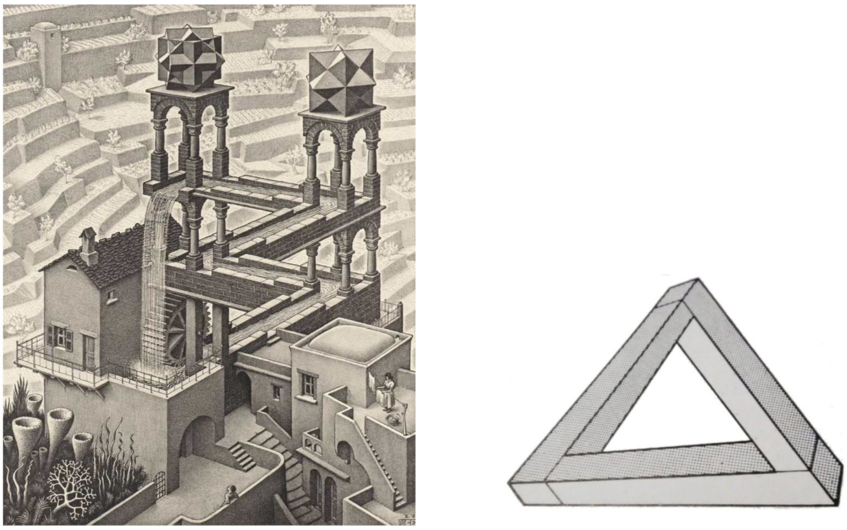

FIGURA 1: (a) Litogravura Cascata, de 1961, 38,1 cm×30 cm; (b) Triângulo de Penrose
FONTE: (a) Escher (2018); (b) Ernst (1991).

Apresentaremos uma fórmula para determinar o volume do Sólido de Escher por meio do software GeoGebra.

O Sólido de Escher (SE) é uma estrelação (técnica utilizada por Kepler e Poinsot) do dodecaedro rômbico (Sólido de Catalan), que é o dual do cuboctaedro (Sólido de Arquimedes) que, por sua vez, pode ser obtido através do truncamento de um cubo ou octaedro (Sólidos de Platão), Figura 2.

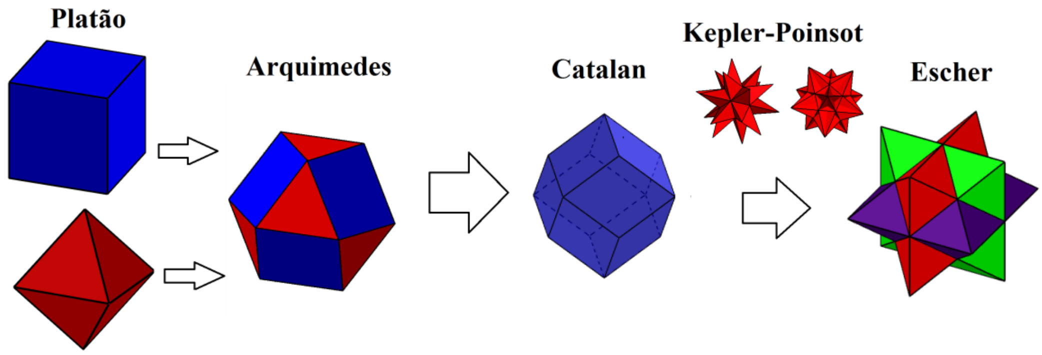

FIGURA 2 – O Sólido de Escher: de Platão a Poinsot

Os poliedros estrelados apresentam definições especiais para arestas, faces e vértices (LIMA; LUZ; GÓES, 2013). Assim, o SE possui 12 faces, geradas da expansão de cada uma das 12 faces do dodecaedro rômbico. A união de todos os triângulos que estão contidos em um mesmo plano do SE é uma de suas faces, como mostrado na Figura 3, onde os quatro triângulos vermelhos (AEC, CGB, EHF e GFI) representam uma face do SE, os quatro triângulos roxos (AJE, DEF, JLM e FMK), outra face e assim por diante.

Sete dos 12 vértices do Sólido de Escher estão representados pelos pontos A, B, D, H, I, L e K. Os pontos C, E, F, G, J e M, por coincidirem com os vértices do dodecaedro rômbico que gerou o SE, são chamados de falsos vértices.

O SE possui 36 arestas, formadas pelas interseções das faces. Na Figura 3, por exemplo, $\overline{AB}$ e $\overline{HI}$ são duas dessas arestas. Definiremos que elas possuem medida $2a$, logo, todos os segmentos verdes, entre dois pontos, terão medida a (como $\overline{AC}$, $\overline{CD}$ e $\overline{CB}$, por exemplo).

Outras seis arestas, de tamanho diferente das citadas anteriormente, são $\overline{AE}$, $\overline{EH}$, $\overline{BG}$, $\overline{GI}$, $\overline{ED}$ e $\overline{DG}$. Definiremos que o comprimento de cada uma é b, logo, todos os segmentos em preto, entre dois pontos, têm medida b (como $\overline{EC}$ e $\overline{ED}$, por exemplo).

Por coincidirem com as arestas do dodecaedro rômbico (DR), os segmentos CE, EF, FG e GC, são chamados de falsas arestas, no entanto, também têm medida b.

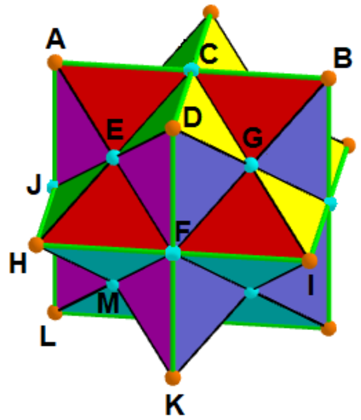

FIGURA 3 – Sólido de Escher: segmentos verdes, entre dois pontos, medem a e segmentos pretos, entre dois pontos, medem b

Mostraremos a seguir que volume do Sólido de Escher é dado pela fórmula $V_{SE} = 4a^3$.

2. O volume do Sólido de Escher por meio do GeoGebra

Buscando facilitar a tarefa de determinar o volume do SE por meio do GeoGebra, desenvolvemos um vídeo tutorial mostrando, passo a passo, a construção do SE e como verificar o seu volume. Esse vídeo, entre outros trabalhos realizados, pode ser encontrado em Silva (2016). O SE construído nesse vídeo tutorial, entre outros poliedros, está disponível[4] no *site* do GeoGebra (2018) na forma construções prontas para serem utilizadas *on-line (*chamadas de *applets*).

Começamos construindo um dodecaedro rômbico e, em seguida, o estrelaremos obtendo o SE. Assim, a partir das construções, definimos uma fórmula para determinar o volume do SE, bem como do DR.

O DR é o poliedro dual do cuboctaedro, que é obtido do truncamento de um cubo ou octaedro. Uma maneira mais simples de construí-lo utilizando o GeoGebra é por meio de 6 cubos com uma face adjacente a um sétimo cubo, como mostrado na Figura 4.

---

[4]No *site* do GeoGebra (GEOGEBRA, 2018), busque por "Ederson Marcelino da Silva" (utilizando as aspas). Dessa forma, você encontrará não só o SE, mas outros materiais produzidos/utilizados na dissertação em questão.

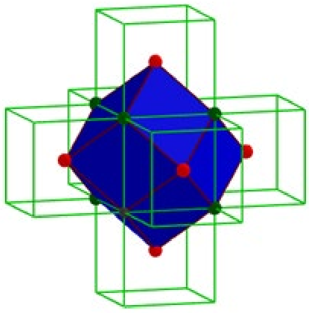

FIGURA 4 – DR gerado a partir de um cubo envolto por 6 cubos congruentes.

2.1 Construção do dodecaedro rômbico no GeoGebra

1. Abra a Janela de Visualização 3D (indicado na Figura 5 por 1), feche a Janela de Visualização 2D (indicado por 2) e marque os pontos $A(1,-1,-1)$ e $B(-1,-1,-1)$. As coordenadas dos pontos também podem ser digitadas no Campo de Entrada (indicado por 3). Esses pontos foram escolhidos para que a construção fique centralizada, ou seja, sobre o centro dos eixos coordenados.

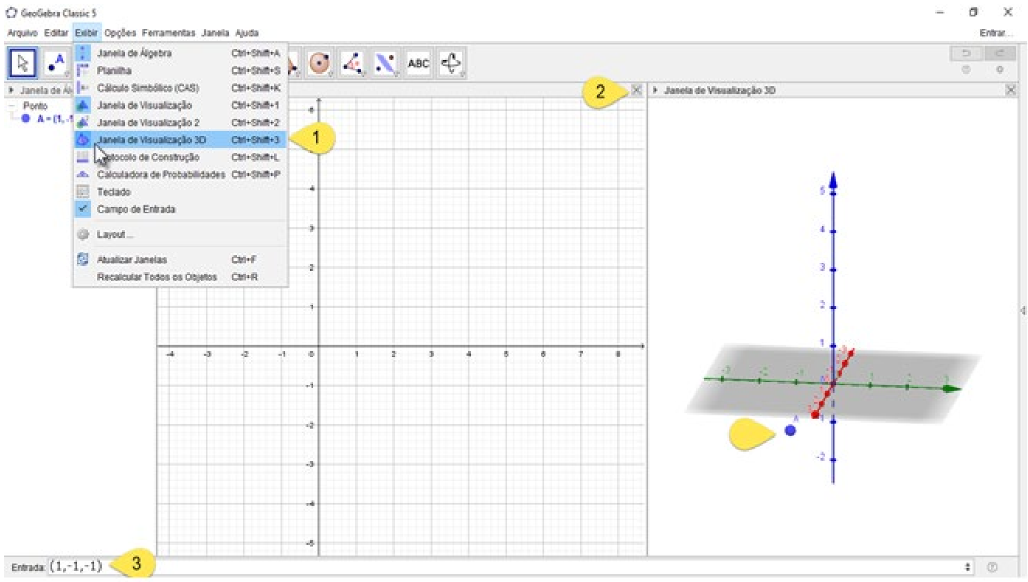

FIGURA 5 – Seleção da Janela de Visualização 3D do GeoGebra

2. Utilizando a ferramenta Cubo (indicada na Figura 6 por 1), selecione os pontos A e B (indicados por 2 e 3), gerando um cubo, Figura 7, com arestas de medida a, que nesse caso, escolhemos de 2 unidades de comprimento (u.c.).

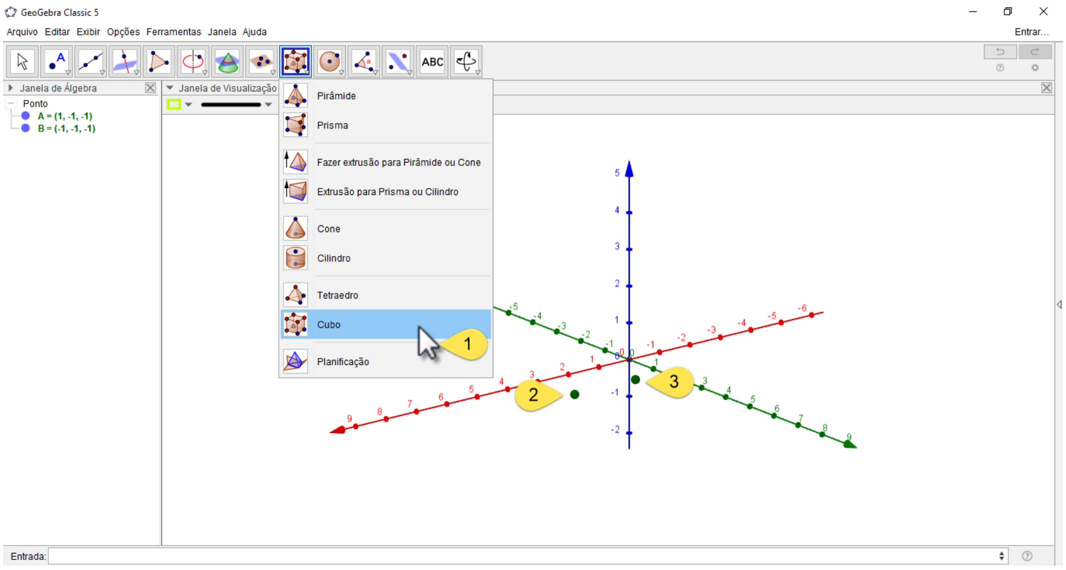

FIGURA 6 – Construção do primeiro cubo na constituição do SE

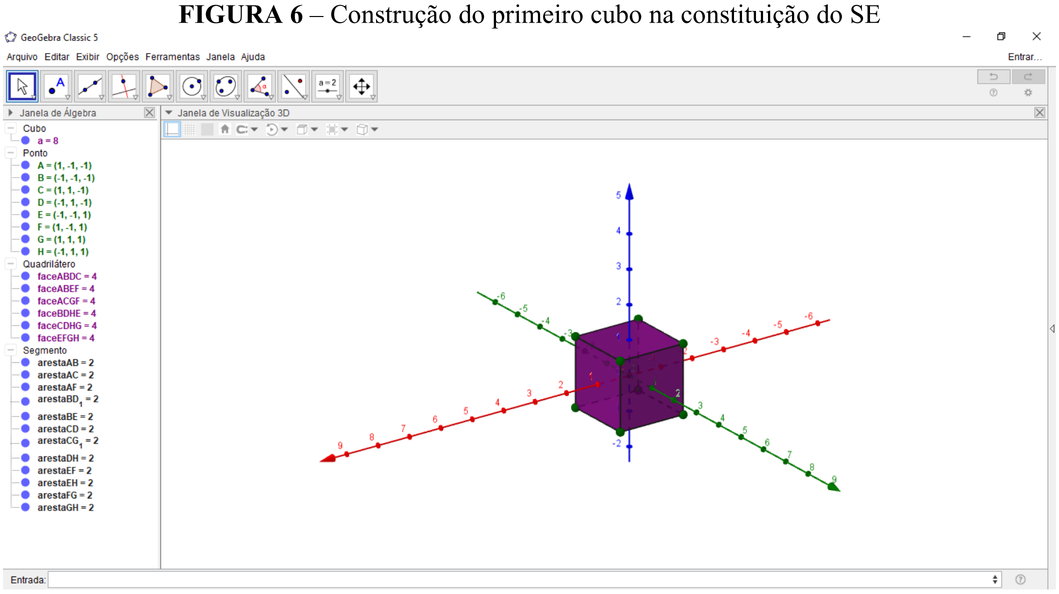

FIGURA 7 – Cubo centrado na origem dos eixos coordenados

3. Com a mesma ferramenta (Cubo) e utilizando os vértices do primeiro cubo, crie outros 6 cubos com uma de suas faces adjacente ao primeiro cubo, como mostrado na Figura 8.

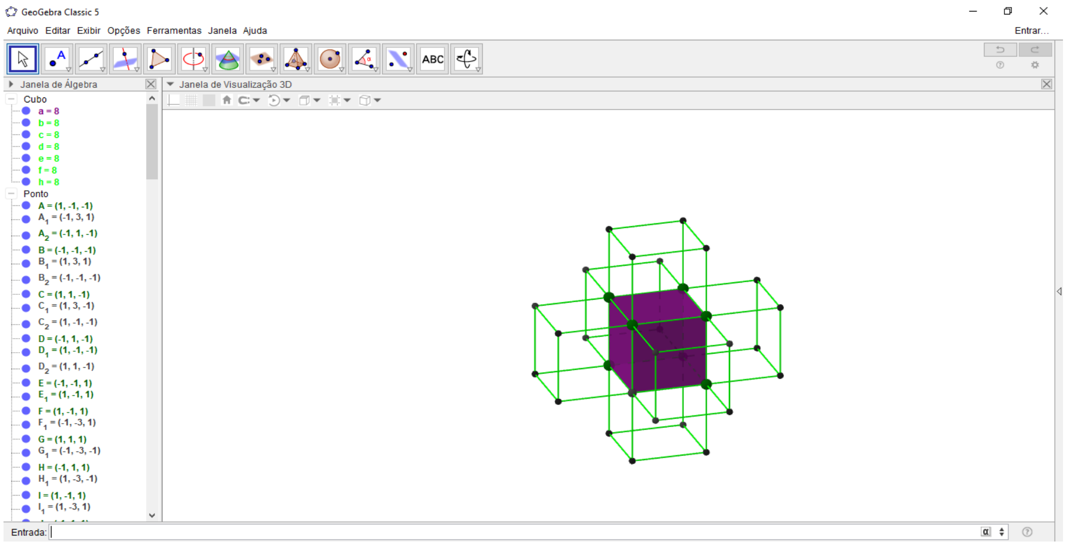

FIGURA 8 – Seis cubos externos, adjacentes ao primeiro cubo

4. Utilizando a ferramenta Ponto Médio, Figura 9, encontre o centro de cada um dos cubos externos ao primeiro cubo (Figura 10). Para tal, basta encontrar o ponto médio de uma das diagonais principais de cada cubo.

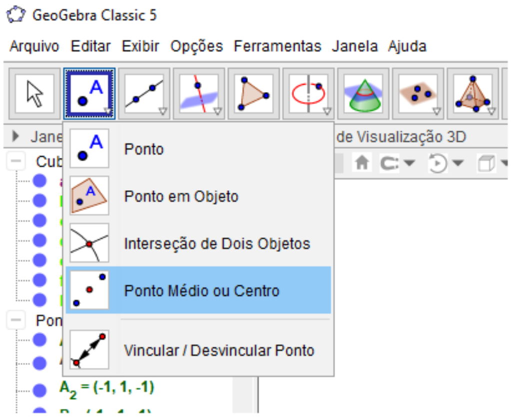

FIGURA 9 – Seleção da ferramenta Ponto Médio

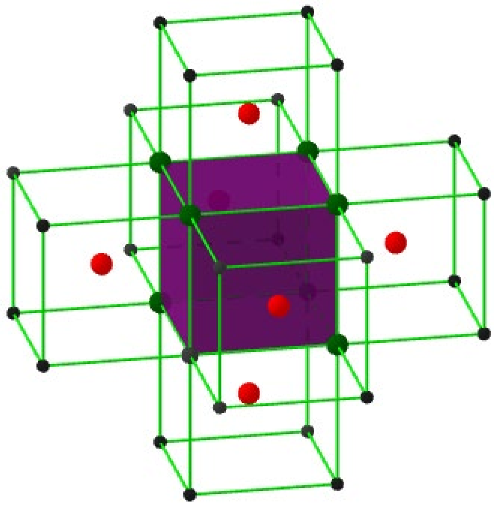

FIGURA 10 – Centro dos cubos externos

5. Depois de identificar os centros (pontos em vermelho na Figura 10), para facilitar a visualização, oculte os cubos externos e, utilizando a ferramenta Polígono, Figura 11, construa as faces losangulares do DR. Para isso, construa losangos selecionando 4 pontos, de tal forma que dois sejam centros e dois sejam vértices do cubo, Figura 12.

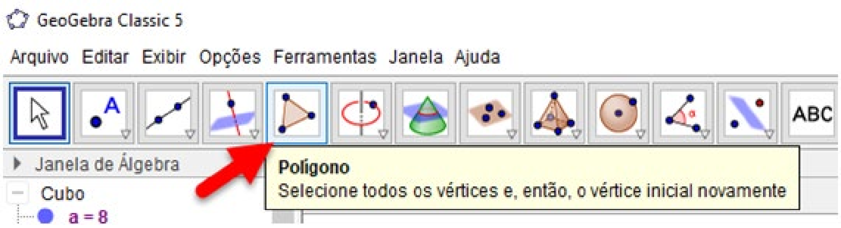

FIGURA 11 – Seleção da ferramenta Polígono

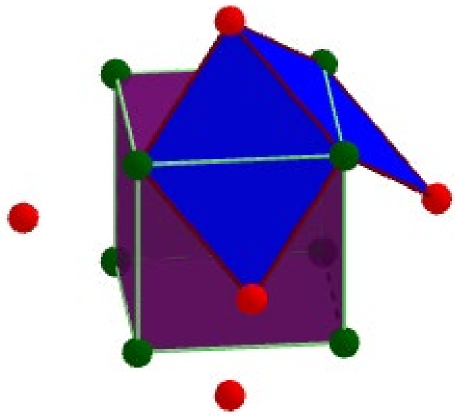

FIGURA 12 – Construção dos losangos que formarão o DR

Repita o processo até obter o DR, Figura 13, que é formado pelo cubo interno e por 6 pirâmides que pertencem aos cubos externos, Figura 14.

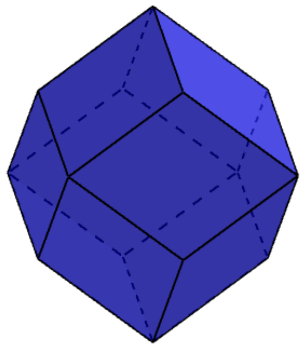

FIGURA 13 – Dodecaedro rômbico

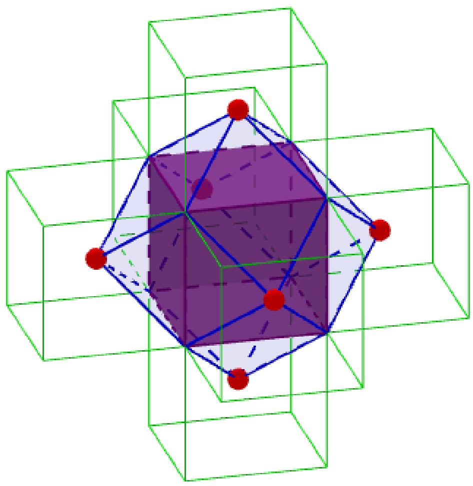

FIGURA 14 – Decomposição do DR em um cubo e 6 pirâmides

Na Figura 14, cada uma das 6 pirâmides tem volume equivalente a $\frac{1}{6}$ do volume do cubo a que pertencem, ou seja, $\frac{a^3}{6}$. Logo, $6 \cdot \frac{a^3}{6} = a^3$, que equivale ao volume de 1 cubo com arestas de medida a. Note que as arestas do DR construído têm comprimento (que aqui chamamos de b) igual à metade da diagonal principal do cubo.

Portanto, observando a Figura 14, podemos concluir que o volume do DR é equivalente ao volume de dois cubos de aresta a (o volume do cubo interno e a soma dos volumes das seis pirâmides externas a ele), ou seja,

$$V_{DR} = 2a^3,$$

onde a é a medida da diagonal menor das faces do DR.

Ao construir um objeto tridimensional o GeoGebra exibe, automaticamente, o seu volume na Janela de Álgebra, Figura 15. Para verificar o volume das seis pirâmides mencionadas, basta construir pirâmides com base nas faces do primeiro cubo e elevar seu topo até o centro dos cubos construídos ao redor deste.

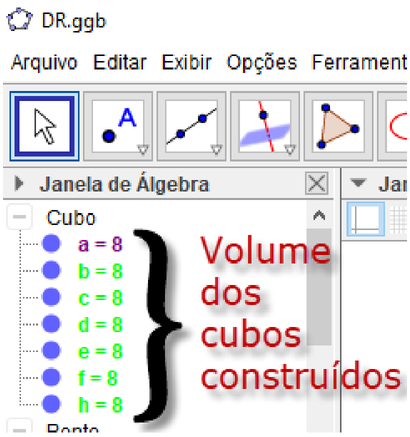

FIGURA 15 – Detalhe da Janela de Álgebra

2.2 Estrelação do dodecaedro rômbico no GeoGebra

Depois de construído o DR, vamos fazer sua estrelação para obter o Sólido de Escher.

1. Inicialmente, selecione a ferramenta Plano, Figura 16.

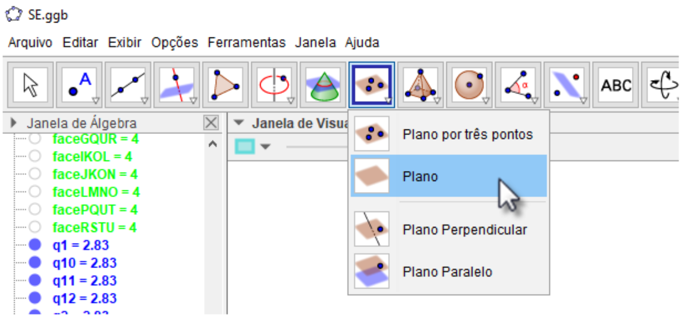

FIGURA 16 – Seleção da ferramenta Plano

2. Será necessário prolongar as faces do DR procurando por sua interseção. Para isso, escolha uma das faces do poliedro (face amarela da Figura 17) e clique em cada uma das 4 faces adjacentes a ela, criando 4 planos.

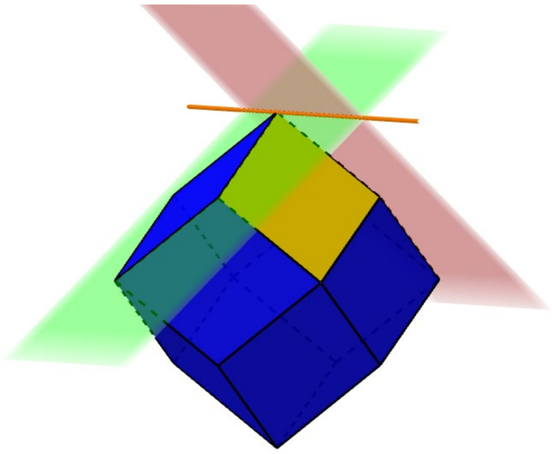

FIGURA 17 – Processo de estrelação do DR: interseção de planos

3. As retas geradas pelas interseções dos planos podem ser obtidas utilizando a ferramenta Interseção de Duas Superfícies, Figura 18. Selecione a ferramenta e clique em dois planos que se interceptem até obter as retas desejadas. Ocultando os planos obtemos a Figura 19.

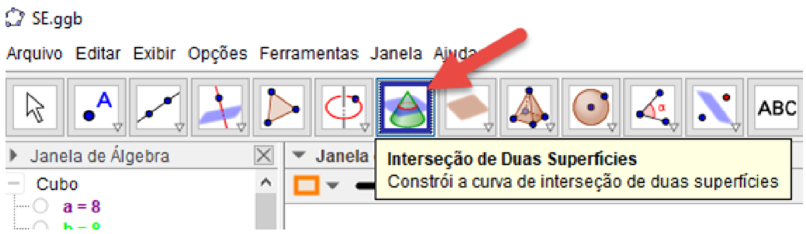

FIGURA 18 – Seleção da ferramenta Interseção de Duas Superfícies

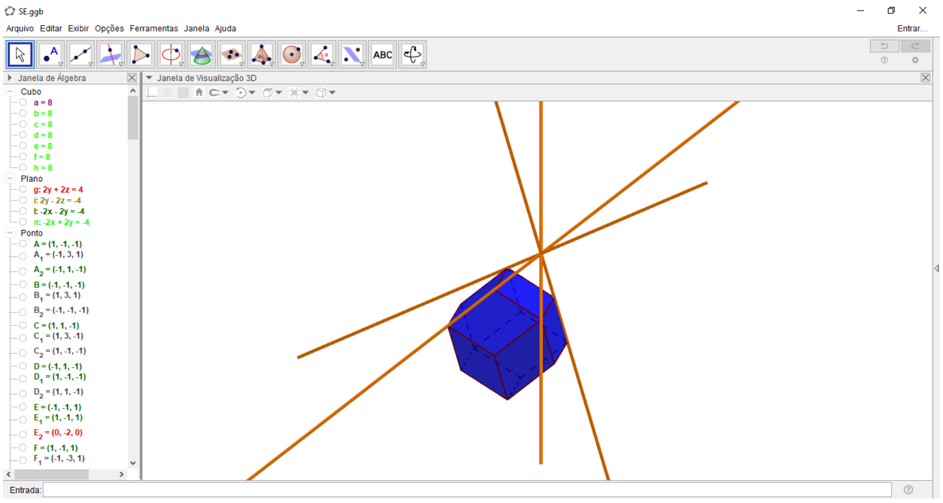

FIGURA 19 – Processo de estrelação do DR: interseção de retas

4. Utilizando a ferramenta Interseção de Dois Objetos, Figura 20, selecione cada uma das retas para obter o ponto de interseção das mesmas. Repita o procedimento com as outras faces até obter 12 pontos.

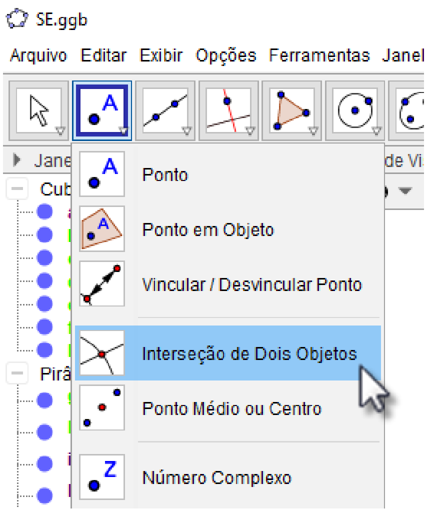

FIGURA 20 – Seleção da ferramenta Interseção de Dois Objetos

Observe, na Figura 21, que é possível encontrar o ponto de interseção entre os planos utilizando apenas duas das quatro retas geradas pela interseção dos planos durante a estrelação do DR.

Note também, que as retas que não estão tracejadas, na Figura 21, contêm as arestas do DR. Dessa forma, não precisamos utilizar planos para encontrar os pontos de interseção desejados, mas sim essas retas que passam pelas arestas.

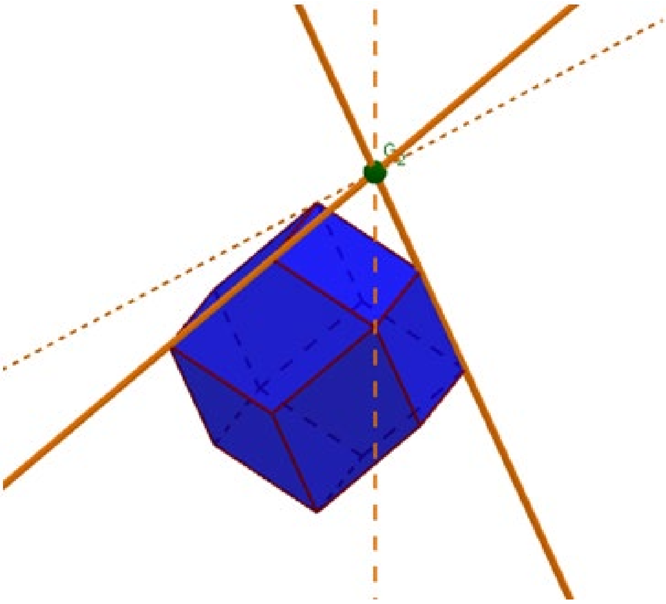

FIGURA 21 – Outra forma de obter o ponto de interseção no processo de estrelação

5. Para utilizar retas para determinar os pontos desejados, selecione a ferramenta Reta Paralela, Figura 22, e clique duas vezes sobre cada aresta desejada.

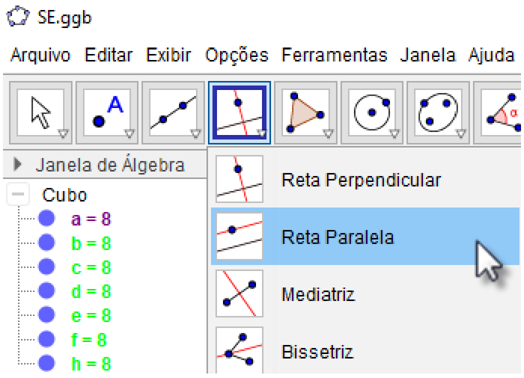

FIGURA 22 – Seleção da ferramenta Reta Paralela

6. Após determinar os 12 pontos, selecione a ferramenta Pirâmide, Figura 23.

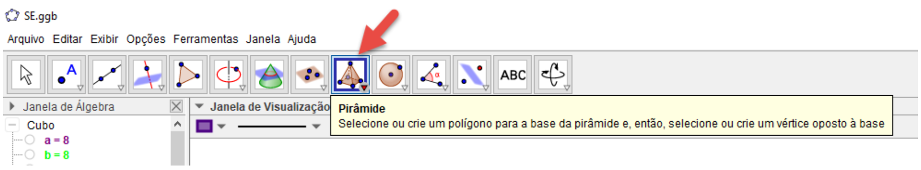

FIGURA 23 – Seleção da ferramenta Pirâmide

7. Vamos utilizar essa ferramenta para estrelar o DR. Selecione uma face do

DR (representado por 1 na Figura 24) e eleve a pirâmide até o ponto superior (representado por 2) à respectiva base.

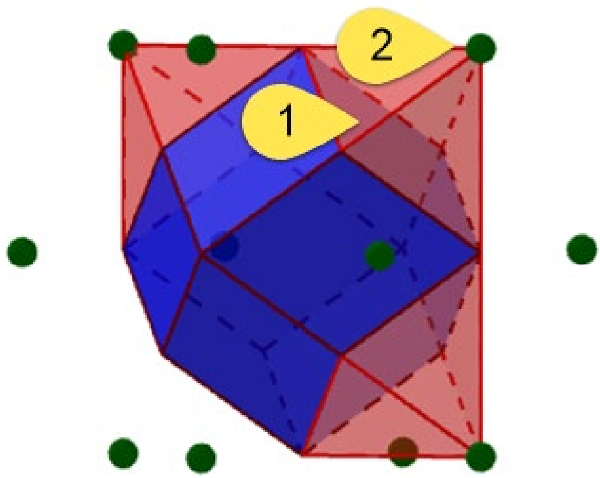

FIGURA 24 – Estrelação do DR

Depois de repetir esse processo 12 vezes, a construção do SE está concluída, Figura 25.

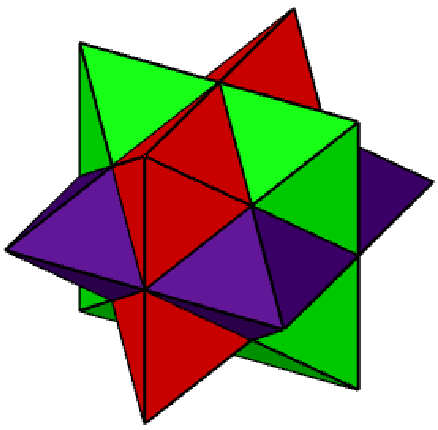

FIGURA 25 – Dodecaedro rômbico estrelado ou Sólido de Escher obtido através do GeoGebra

Perceba que após a construção de cada pirâmide a Janela de Álgebra apresenta um valor numérico. Esse valor é o volume de cada pirâmide construída, Figura 26, que neste caso é $\frac{8}{6} = 1{,}33 \ldots$ unidades de volume.

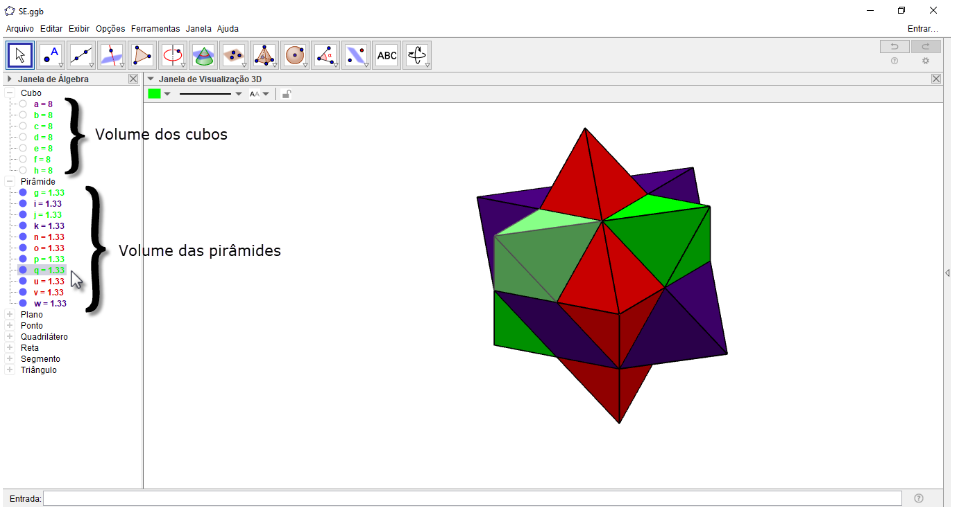

FIGURA 26 – Construção do Sólido de Escher: destaque para os volumes dos cubos e das pirâmides

O volume de cada pirâmide equivale a $\frac{1}{6}$ do volume do cubo utilizado para construir o DR, ou seja, $\frac{1}{6}a^3$. Como o SE possui 12 pirâmides, temos um volume total equivalente ao de 2 cubos, ou seja, $2a^3$.

Portanto, somando o volume dessas 12 pirâmides ao volume do DR, é possível concluir que o volume do SE (V_{SE}) é equivalente ao volume de 4 cubos, ou seja, $V_{SE} = 4a^3$.

É importante relembrar que a é a medida do comprimento das arestas dos cubos construídos e da diagonal menor das faces do DR. Além disso, podemos verificar, com o auxílio da ferramenta Distância, Comprimento ou Perímetro, Figura 27, que, como mencionado anteriormente, o SE apresenta dois tipos de segmentos, sendo um menor (b, que equivale às medidas das arestas do DR e tem metade do comprimento da diagonal principal do cubo) e outro maior (a, equivalente as arestas dos cubos construídos inicialmente e as diagonais menores das faces do DR, que, neste caso, tem medida igual a 2 u.c.), conforme podemos identificar na Figura 28.

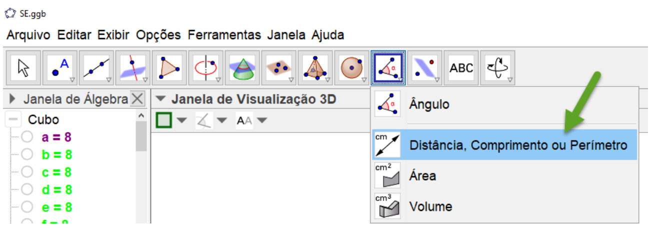

FIGURA 27 – Seleção da ferramenta Distância, Comprimento ou Perímetro

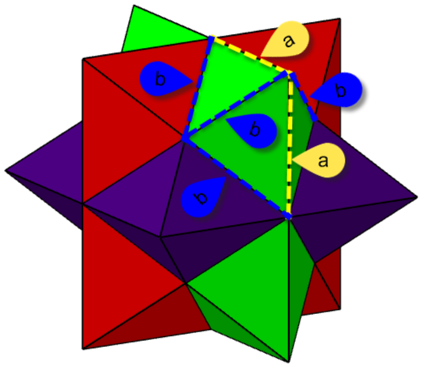

FIGURA 28 – Segmentos de comprimentos a e b do SE

Conclusão

Consideramos importante, e necessário, proporcionar várias experiências que permitam ao estudante ampliar sua capacidade de ver e manipular objetos tridimensionais, transferindo esse conhecimento para situações de seu cotidiano e/ou situações problema. Uma das maneiras de trabalhar com esses objetos é através do uso de recursos digitais como o GeoGebra, por exemplo.

Os aspectos aqui abordados buscaram contribuir com o ensino e aprendizagem do tema poliedros. Determinamos uma fórmula para o cálculo do volume do Sólido de Escher, associando a arte, presente nas obras de Escher, com a Matemática e a tecnologia presentes no GeoGebra.

Acreditamos que, ao explorar esses recursos em sala de aula, o professor atrairá a atenção e o interesse dos alunos no estudo de poliedros, contribuindo assim para o seu ensino e aprendizagem.

Referências

BRASIL. *Parâmetros curriculares nacionais do ensino médio: parte III - ciências da natureza, matemática e suas tecnologias*. Brasília: MEC/SEMTEC, 2000. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/ciencian.pdf>. Acesso em: 2 abr. 2019.

ERNST, B. *O espelho mágico de M. C. Escher*. Berlim: Taschen, 1991.

ESCHER, F. M. *MC Escher: site oficial*. 2018. Disponível em: <http://www.mcescher.com>. Acesso em: 2 abr. 2019.

GEOGEBRA. *GeoGebra: Aplicativos Matemáticos*. 2018. Disponível em: <www.geogebra.org>. Acesso em: 2 abr. 2019.

LIMA, R. T.; LUZ, A. A. B. S.; GÓES, A. R. T. *Poliedros estrelados: o estudo dos sólidos geométricos além dos livros didáticos*. Florianópolis: GRAPHICA, 2013. Disponível em: <https://goo.gl/jTE4qH>. Acesso em: 2 abr. 2019.

PERES, G. B.; NASCIMENTO, M. C. *Um mosaico de Escher*. 20–. Disponível em: <http://wwwp.fc.unesp.br/~mauri/Logo/mosaico4.pdf>. Acesso em: 2 abr. 2019.

SARTOR, N. L. *O universo dos poliedros regulares*. 92 p. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal do Mato Grosso, Instituto de Ciências Exatas e da Terra, Programa de Pós-Graduação em Matemática, 2013. Disponível em: <https://sca.profmat-sbm.org.br/sca_v2/get_tcc3.php?id=33850>. Acesso em: 2 abr. 2019.

SILVA, E. M. da. *Volume dos Sólidos de Platão - Oficina de Matemática - IFPR*. 2016. Disponível em: <https://www.youtube.com/channel/UCGvMZBOrQKWa42uvyfnzXqA>. Acesso em: 2 abr. 2019.

______. *Poliedros de Arquimedes, Catalan, Kepler-Poinsot, Platão e o Sólido de Escher: contribuições para o ensino e aprendizagem de poliedros*. Dissertação (Mestrado) - Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, Curitiba, 2018. Disponível em: <https://sca.profmat-sbm.org.br/sca_v2/get_tcc3.php?id=160640169>. Acesso em: 2 abr. 2019.

SILVEIRA, M. R. A. da. *"Matemática é Difícil": um sentido pré-construído evidenciado na fala dos alunos*. Rio de Janeiro: [s.n.], 1999. Disponível em: <http://www.ufrrj.br/emanped/paginas/conteudo_producoes/docs_25/matematica.pdf>. Acesso em: 2 abr. 2019.