NÚMEROS. Revista de didáctica de las matemáticas
Volumen 42, junio de 2000, páginas 37-47

El rincón de la calculadora gráfica
A cargo de Francisco Puerta García

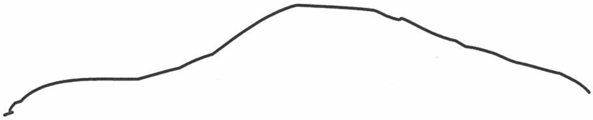
Reproducir curvas en la pantalla de una calculadora

Carl Leinbach

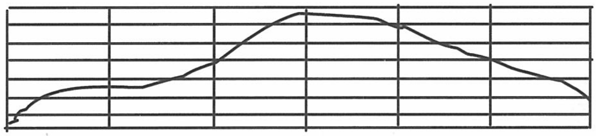
Introducción

¿Cómo se logran esas bonitas y suaves curvas en la pantalla de un ordenador? Parece que fluyen suavemente y no tienen ese efecto desigual que sale si dibujas un montón de puntos y los unes con segmentos rectilíneos. La razón es que el software muestrea los dibujos y usa métodos de interpolación suave. A menudo, el método de interpolación es el llamado de los splines cúbicos, que aprovecha inteligentemente ciertos conceptos matemáticos corrientes, como mostraremos a continuación.

Empezamos con un bosquejo, muy tosco, representando la parte superior de un automóvil. El dibujo deja bastante que desear pero servirá como meta para nuestro método.



La primera operación será tomar puntos de la curva e introducirlos en la calculadora; para ello, superponemos un sistema de coordenadas sobre el dibujo, como en la siguiente ilustración.

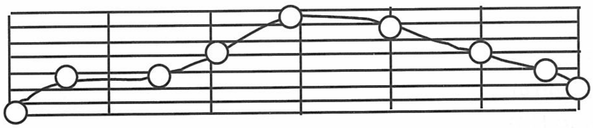


Hemos de tomar ciertas decisiones; la primera, dónde situar el origen de coordenadas. Escogemos el lugar obvio: la esquina inferior izquierda de la

Esta sección ofrece a los lectores un foro en el que exponer ideas, consultar dudas y debatir planteamientos didácticos relacionados con el uso de la nueva generación de calculadoras gráficas avanzadas en la enseñanza de las matemáticas. Esperamos que participes enviando tus consultas o aportaciones a la dirección indicada abajo.

retícula. Las unidades pueden ser arbitrarias. Por las dimensiones de la figura decidí que el ancho debía de ser 12 unidades y el alto 2, e insisto en la naturaleza arbitraria, pero necesaria, de la elección.

A continuación hay que decidir qué puntos almacenamos en la calculadora. Esto es un arte, y puede necesitar varias pruebas. Una regla empírica es no dejar huecos demasiado grandes entre los puntos y tomar muestras más frecuentes en las zonas de mayor variación de la curva. Por ejemplo, en la figura de abajo hay más frecuencia en los parachoques y el parabrisas. Las zonas



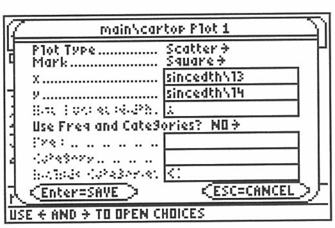
relativamente planas del techo, el capó y el maletero se muestrean menos. Debido a la capacidad de la calculadora (relativamente limitada), sólo escogí nueve puntos. Con un ordenador –más grande y rápido– hubiera tomado más. Usando las unidades del párrafo anterior podemos estimar que las coordenadas de los puntos son:

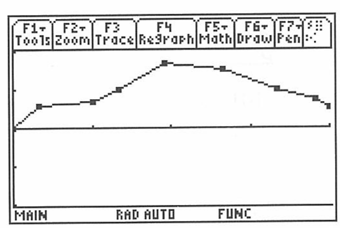
x	*0.0*	*1.0*	*3.0*	*4.0*	*5.8*	*8.0*	*10.0*	*11.5*	*12.0*
y	*0.0*	*0.6*	*0.7*	*1.0*	*1.7*	*1.5*	*1.0*	*0.75*	*0.5*

y empezar a transferir el dibujo a la calculadora, una TI-89.

Primer intento: Interpolación lineal

Después de introducir las coordenadas de los puntos en una tabla utilizando el editor de Datos/Matrices de la Ti-89, preparamos la gráfica como se muestra debajo y la representamos en una ventana $0 \le x \le 12$, $-2 \le y \le 2$. El resultado se muestra debajo a la derecha.





En efecto, el resultado se parece a nuestro dibujo original y, como primer intento, no es malo. Las líneas que unen los puntos son simples segmentos rectilíneos que los conectan. Es decir, dados dos puntos (x_1, y_1) y (x_2, y_2), el segmento que los une es un trozo de la recta. $y = y_1 + \dfrac{(y_2 - y_1)}{(x_2 - x_1)}(x - x_1)$

El problema con este tipo de aproximación es que el dibujo queda bastante quebrado. Por ejemplo, vea el comienzo del capó, la unión del parabrisas con el techo y otras zonas de la curva. Las curvas que conectan los puntos han de unirse suavemente. Pero ¿cómo creamos esa suavidad?

Una condición de suavidad consiste en que la tasa de variación de la curva que sale del punto sea la misma que la de la que llega a él. Dicho de otra forma, las pendientes de las dos curvas deben ser las mismas en el punto que tienen en común. Esto es imposible usando funciones lineales, puesto que el coeficiente de x debería ser el mismo en ambas rectas y eso significaría que todas las rectas tendrían la misma pendiente. Así que hemos de buscar curvas de grado mayor.

Intento fallido: Interpolar con curvas cuadráticas

Una elección aparentemente obvia sería usar curvas cuadráticas, cuyas pendientes no son constantes como las rectas. Esto quiere decir que tendríamos posibilidad de ajustar las curvas, de modo que se unan suavemente unas con otras en sus puntos comunes. Así es, pero existe un problema que ilustraremos con un conjunto de datos más pequeño. Considérense los tres puntos

x	*1.0*	*3.0*	*5.0*
y	*2.0*	*4.0*	*3.0*

sin tener en cuenta que sabemos que por ellos pasa una única parábola, puesto que nos interesa hablar de interpolación.

Estos datos significan que queremos encontrar dos curvas cuadráticas que se encuentren suavemente en el punto (3,4), pasando la primera por el punto (1,2) y la segunda por (5,3), además de pasar cada una por (3,4).

Las expresiones para sus polinomios cuadráticos están dadas por

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$
$$g(x) = px^2 + qx + r$$

Sabemos que $f(1) = 2$, $f(3) = 4$, y $g(3) = 4$ y $g(5) = 3$, así que tenemos las ecuaciones siguientes:

Es un sistema de cuatro ecuaciones con seis incógnitas, del que no se obtiene solución única. Sin embargo, no hemos usado el criterio de suavidad. En este

$$\begin{aligned} a + b + c \quad\quad\quad\quad\quad\quad &= 2 \\ 9a + 3b + c \quad\quad\quad\quad\quad\quad &= 4 \\ 9p + 3q + r &= 4 \\ 25p + 5q + r &= 3 \end{aligned}$$

caso, $f'(3) = g'(3)$, lo que se traduce en la ecuación

$$6a + b = 6p + q$$

o

$$6a + b - 6p - q = 0$$

Ahora tenemos un sistema de cinco ecuaciones con seis incógnitas, pero todavía estamos en una situación donde no podemos determinar de forma única los coeficientes de los polinomios. Se necesita una ecuación más para abrigar la esperanza de determinar los coeficientes.

Una posibilidad consiste en obligar a que las derivadas segundas en el punto donde las curvas se unen sean las mismas. Esto igualaría los coeficientes de x^2 para cada polinomio, pero produciría un efecto en cascada forzando también a que los coeficentes de x sean iguales en ambos polinomios interpoladores. Este resultado sería insatisfactorio, así como imposible en muchos casos.

Otra idea puede ser fijar el valor de las derivadas del primer y último polinomio en los puntos extremos de la curva que estamos tratando de aproximar. Esto resultaría consistente con nuestra elección de derivadas iguales en los puntos donde las curvas se unen. Supongamos que arbitrariamente decimos que $f'(1) = 1$ y que $g'(5) = -\frac{3}{2}$. Tendremos las ecuaciones

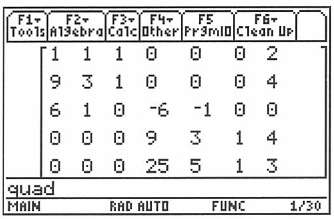
$$2a + b = 1$$

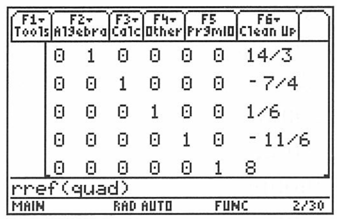
$$10p + q = -\frac{3}{2}$$

¡Pero ahora hay una ecuación de más! ¿Tendrá importancia si cogemos sólo una de las dos? Vamos a mostrar que sí la tiene. Comenzando con la ecuación obtenida de la derivada en el punto final derecho tendremos el sistema de 6 ecuaciones con seis incógnitas

$$
\begin{aligned}
a + b + c \quad &= 2 \\
9a + 3b + c \quad &= 4 \\
6a + b \quad - 6p - q \quad &= 0 \\
9p + 3q + r &= 4 \\
25p + 5q + r &= 3 \\
10p + q \quad &= -\frac{3}{2}
\end{aligned}
$$

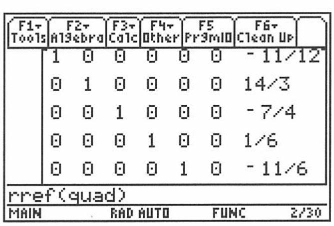
e introducimos sus coeficientes en una matriz ampliada de la calculadora, como se muestra debajo.

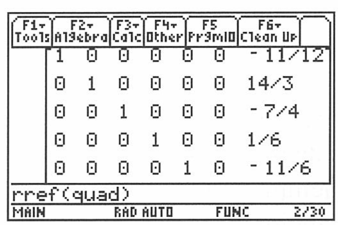




(Necesitamos dos pantallas porque lo máximo que la TI-89 puede mostrar simultáneamente son cinco filas de una matriz, y queremos ver los coeficientes de las seis ecuaciones.)

La TI-89/92 dispone de funciones para el manejo de matrices. En particular se puede usar el comando **rref** (reduced row echelon form, reducción por filas a forma escalonada) para hallar los valores de a, b, c, d, p, q y r, como vemos en las pantallas siguientes.



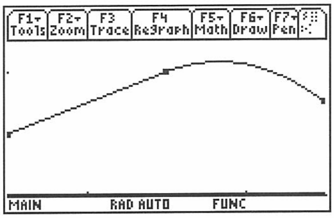


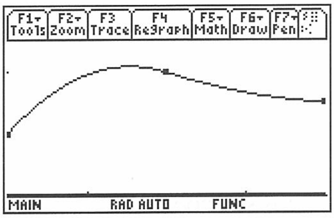
Así, los valores de los coeficientes de la última columna de la matriz nos dan

$$a = -11/12 \qquad c = -7/4 \qquad q = -11/6$$

$$b = 14/13 \qquad p = 1/6 \qquad r = 8$$

La gráfica resultante la mostramos debajo a la derecha, y nos preguntamos ¿qué ocurrirá si usamos la derivada en el punto final izquierdo? ¿Obtendremos la misma curva? La respuesta, como es de esperar, es *¡en absoluto!* Compare la gráfica de la izquierda. Ambas curvas tienen unión suave en el punto central, pero son completamente diferentes.





¿Cuál es la que queremos? Desgraciadamente, la respuesta es *ninguna*. La razón es que ninguna de las curvas satisface la condición dada para la derivada en *ambos* puntos finales. Podemos argumentar que las derivadas en los puntos finales se añadieron al conjunto de suposiciones iniciales sólo para conseguir un conjunto de ecuaciones que pudiéramos resolver, pero las figuras de arriba muestran que el punto final considerado influye al hallar los coeficientes de los polinomios interpoladores. Así, debemos concluir que la interpolación cuadrática no es una opción práctica.

Extender la idea: Polinomios cúbicos

En este caso consideramos dos polinomios cúbicos

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$
$$g(x) = px^3 + qx^2 + rx + d$$

A primera vista esto parece peor. Hay un coeficiente más en cada expresión, lo que significa que tendremos ¡ocho ecuaciones! Los valores en los puntos dados y el hecho de que las pendientes en los puntos comunes sean iguales producen cinco ecuaciones, pero necesitamos ocho. Usando una de las ideas dadas (y rechazadas) en el apartado previo hacemos iguales las derivadas segundas de las funciones en cada uno de los puntos que tienen en común. En nuestro ejemplo, eso proporciona seis ecuaciones con ocho incógnitas. Es una situación mejor que cinco ecuaciones en seis incógnitas y quedan los dos puntos finales para considerar.

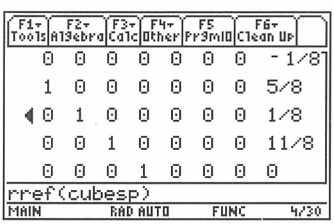
Hay dos opciones sobre qué hacer en este momento. Una es usar los valores de las derivadas primeras en cada uno de los puntos finales. Esto nos da las ocho ecuaciones y no hemos de primar a ninguno de los puntos finales. Los polinomios interpoladores hechos de esta manera se llaman splines cúbicos *afianzados* (clamped) debido a que estamos suponiendo que la curva empieza y termina en direcciones prescritas; esto es, la curva está sujeta o *afian-*

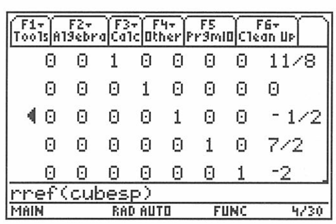
zada a los puntos finales del intervalo.

La otra suposición –más común– utiliza la derivada segunda, y trata de hacerla cero en los puntos finales. Esto también nos da dos ecuaciones más y no hemos de suponer nada sobre la dirección de la curva en los puntos finales. Los polinomios interpoladores cúbicos que se generan bajo estas suposiciones se llaman splines cúbicos *libres*. El resultado es parecido a la curva que se formaría dejando descansar una pieza flexible de metal sobre los puntos dados. Vamos a desarrollar el caso en que nos dan las derivadas en los puntos finales, y dejamos para el lector la tarea de hallar las funciones f y g y dibujar la curva resultante en el caso de los splines cúbicos libres. Las ocho ecuaciones que deducimos de la información sobre f y g dada en el apartado anterior son:

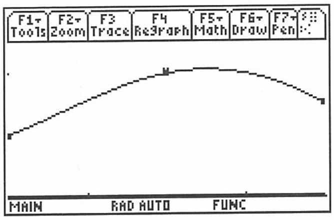
$$\begin{array}{llll}
3a + 2b + c & & = 1 & \\
a + b + c + d & & = 2 & \\
27a + 9b + 3c + d & & = 4 & \\
27a + 6b + c & -27p - 6q - r & = 0 & \text{(pendientes iguales)} \\
18a + 2b & -18p - 2q & = 0 & \text{(segundas derivadas iguales)} \\
 & 27p + 6q + 3r + s & = 4 & \\
 & 125p + 25q + 5r + s & = 3 & \\
 & 75p + 10q + r & = -3/2 &
\end{array}$$

Introducimos los coeficientes del sistema en forma matricial en la TI-89, y usamos el operador rref para reducirlo y leer los coeficientes, como se muestra debajo. (De nuevo necesitamos dos pantallas. Las dos filas inferiores de la primera pantalla y las dos superiores de la segunda son las mismas.)





Estos coeficientes se introducen entonces en las expresiones de los polinomios cúbicos y se dibujan las gráficas.



Sería interesante comparar esta gráfica con la gráfica del spline libre trazada por usted.

Vuelta al problema original

Ahora volvamos al automóvil. Como pudo notar en el apartado anterior, si tenemos n puntos necesitamos encontrar $4(n-1)$ coeficientes. Esto significa que hemos de resolver un sistema de $4(n-1)$ ecuaciones. Así, en el caso del automóvil tendremos que resolver un sistema de 32 ecuaciones lineales. Introducir esos datos puede ser tedioso. He escrito un programa en TI Basic que toma los valores de x e y y genera la matriz. La entrada del programa son dos listas, xco e yco, que contienen las abscisas y ordenadas de los puntos por donde pasará la curva. La salida del programa es la matriz ampliada de orden $(n-1)\times n$ que se reducirá para hallar los coeficientes de los polinomios interpoladores del spline cúbico libre.

```
cumat(xco,yco)
Func
Local  n,m,cm,n1,i
dim(xco)\->\n1
4*(n1-1)\->\n
n+1\->\m
newMat(n,m)\->\cm
6*xco[1]\->\cm[1,1]
2\->\cm[1,2]
6*xco[n1]\->\cm[n,4*n1-7]
2\->\cm[n,4*n1-6]
For i,1,n1-1
   xco[i]^3\->\cm[4*i-2,4*i-3]
   xco[i]^2\->\cm[4*i-2,4*i-2]
   xco[i]\->\cm[4*i-2,4*i-1]
   1\->\cm[4*i-2,4*i]
   yco[i]\->\cm[4*i-2,m]
```

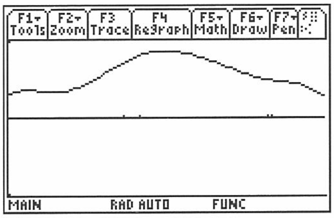
```
    xco[i+1]^3\->\cm[4*i-1,4*i-3]
    xco[i+1]^2\->\cm[4*i-1,4*i-2]
    xco[i+1]\->\cm[4*i-1,4*i-1]
    1\->\cm[4*i-1,4*i]
    yco[i+1]\->\cm[4*i-1,m]
    If i<n1-1 Then
      3*xco[i+1]^2\->\cm[4*i,4*i-3]
      2*xco[i+1]\->\cm[4*i,4*i-2]
      1\->\cm[4*i,4*i-1]
      \(-)\3*xco[i+1]^2\->\cm[4*i,4*i+1]
      \(-)\2*xco[i+1]\->\cm[4*i,4*i+2]
      \(-)\1\->\cm[4*i,4*i+3]
      6*xco[i+1]\->\cm[4*i+1,4*i-3]
      2\->\cm[4*i+1,4*i-2]
      \(-)\6*xco[i+1]\->\cm[4*i+1,4*i+1]
      \(-)\2\->\cm[4*i+1,4*i+2]
EndIf
EndFor
Return cm
EndFunc
```

La matriz de orden 32×33 que resulta no la mostramos aquí debido al tamaño de la pantalla de la TI-89 y a que no tiene nada instructivo. Se entrega entonces al operador **rref** para que la reduzca y podamos leer los coeficientes. Este proceso es una tarea hercúlea que toma aproximadamente 12 minutos de tiempo de cálculo. Hay maneras más eficientes de computar los coeficientes, pero requieren técnicas más avanzadas; en tanto que seamos pacientes, la TI-89 hará el trabajo. (No recomiendo usar muchos más puntos como entrada del programa.)

Una vez tenemos los coeficientes hemos de dibujar la curva. También he escrito una función de TI-89 que tiene como entrada la variable *x*, la lista *xco* de abscisas de los puntos y la lista pco de coeficientes del spline.

```
spl(x,xco,pco)
Func
Local i,m
dim(xco)\->\m
If x<xco[1] or x>xco[m] Then
  Return 0
 Else
  For i,1,m-1
```

```
      If xco[i]\<=\x and xco[i+1]>x Then
         Return pco[4*i-3]*x^3+pco[4*i-2]*x^2+
                pco[4*i-1]*x+pco[4*i]
      EndIf
    EndFor
  EndIf
EndFunc
```



Para representarla usamos el comando Graph spl(x, xco, pco) y vemos el resultado.

No es perfecto, pero tomando algunos puntos más obtendríamos una representación bastante exacta. De todos modos, como primer intento no lo hemos hecho tan mal.

Comentario sobre polinomios de grado superior

Puede pensarse que si el método sale con polinomios cúbicos quizás sería bueno probar con polinomios de cuarto o quinto grado o incluso superiores. No es buena idea. Una razón es que aumentaría el número de ecuaciones a resolver. Para cuarto grado tendremos cuarenta ecuaciones. Para quinto, cuarenta y ocho. No es un número excesivo para un ordenador pero el incremento de tiempo en una calculadora no es razonable.

Más aún, no es buena idea porque cuando aumentamos el grado del polinomio, la curva puede adquirir una tendencia a oscilar entre los puntos muestreados y dar una impresión equivocada de la forma. Queremos mantener el grado de la curva tan pequeño como sea posible sin abandonar el criterio de suavidad. Las cúbicas son las primeras candidatas factibles que cumplen este criterio.

Conclusión

Hemos mostrado que con algo de conocimiento de las cúbicas y sus derivadas podemos usar la calculadora para obtener algunas ideas sobre esta potente técnica gráfica. El muestreo ha sido limitado y el tiempo de cálculo más largo de lo que nos gustaría, pero el hecho es que hemos enseñado una técnica muy potente.

Existen algoritmos más eficientes para determinar los splines cúbicos, pero requieren transformar las ecuaciones originales. Esto hace la técnica más eficiente computacionalmente, pero desafortunadamente hace que el método sea más difícil de entender. Son técnicas más apropiadas para cursos avanzados. Esta es para el disfrute y entendimiento de los estudiantes. La eficiencia es un asunto importante pero deberá ser abordada posteriormente.

Cualquier persona que desee los programas anteriores en versiones para la TI-89 , TI-92 o TI-92 plus puede solicitarlos al autor por e-mail. Los recibirá agrupados adjuntos a un e-mail a la dirección de respuesta. También podrá descargarlos de la página web de *El rincón de la calculadora gráfica* http://nti.educa.rcanaria.es/scpm/numeros/elrincon.htm

(Traducción de Francisco Puerta García)

El profesor Carl Leinbach leinbach@gettysburg.edu enseña en el Gettysburg College, Pennsilvania, USA, aunque actualmente pasa un año sabático en la Liverpool John Moores University, Reino Unido, donde es uno de los organizadores de The Fourth International Derive TI-89/92 Conference – «Computer Algebra in Mathematics Education». www.cms.livjm.ac.uk/derive2k

Francisco Puerta García
Instituto "Isabel de España"
Tomás Morales, 39
35003 Las Palmas de G. Canaria
fpgg@correo.rcanaria.es

TEXAS INSTRUMENTS

PROGRAMA DE FORMACIÓN:
Cursos de formación con docencia gratuita, en los que cada participante dispondrá de una calculadora durante las sesiones y de material especializado para impartir clases.

PROGRAMA DE PRÉSTAMO:
Calculadoras en préstamo:
TI-106, MATH EXPLORER,TI-30X A,TI-36S, TI-80,TI-82,TI-83,TI-85,TI-92,GRAPH-LINK,CBL

REVISTAS

TI-MAT: Con experimentadas en el aula.
TI-APOYO: Con información de todo tipo.
TI-PRODUCTOS: Con información sobre productos nuevos.

BIBLIOGRAFÍA:

1. "El taller de la TI-92".
2. "Análisis con las calculadoras TI-XX".
3. "Estadística con las calculadoras TI-XX".
4. "Matrices y Determinantes con la TI-92".
5. "Distribuciones de probabilidad" y "Calculadoras gráficas: un reto para resolver ecuaciones".
6. "Cálculo Formal con la TI-92"
7. "Ecuaciones con las calculadoras TI-XX".
8. "CABRI II en el 2º Ciclo de E.S.O.".
9. "Fractales con el miniordenador TI-92".
10. "Guia didáctica de la calculadora Math Explorer".
11. "Programas calculadoras gráficas TI-XX".
12. "Conexión entre naturaleza y matemáticas a través del CBL y la TI-83".
13. "La Geometría de los mecanismos".
14. "La TI-83 en clase: Bachilleratos".
15. "Guía didáctica de calculadora TI-40 college".
16. TI-83. Guía de menús y ejemplos. (próxima aparición).
17. Juegos matemáticos con calculadoras. (próxima aparición).

Programa Educacional
Texas Instruments España SA

C/. Musgo, 2 - 2º A - Edificio Europa II - 28023 Madrid
Phone: + 34-91-710 29 15 Fax: + 34-91-307 68 64
www.ti.com/calc/spain www.ti.com/calc/portugal