



<http://dx.doi.org/10.23925/2237-9657.2020.v9i2p035-051>

A compreensão do Teorema Fundamental do Cálculo em uma atividade exploratória com o uso do GeoGebra

Understanding the Fundamental Calculus Theorem in an exploratory activity using GeoGebra

GREICE KELI SILVA LACERDA ¹

THAYS RAYANA SANTOS DE CARVALHO ²

AGNALDO DA CONCEIÇÃO ESQUINCALHA ³

VINICIUS DA CUNHA LUZ ⁴

RESUMO

Neste artigo apresentar-se-á uma proposta de atividade para o estudo do Teorema Fundamental do Cálculo (TFC) na perspectiva da disciplina de Análise Real. O objetivo proposto é analisar as contribuições do uso do GeoGebra no estudo do TFC por meio da realização de uma atividade exploratória de gráficos que visa ressignificar sua aprendizagem. A pesquisa utilizou-se de uma abordagem metodológica qualitativa, inspirada na Engenharia Didática, para validar a atividade proposta. Os resultados mostraram que o recurso tecnológico utilizado atuou como dinamizador e motivador, potencializando e incentivando o processo de aprendizagem dos participantes. A sua utilização contribuiu para a compreensão do TFC e de conceitos que envolvem a integral de Riemann, bem como possibilitou uma discussão entre pesquisadores e participantes, favorecendo a construção e a ressignificação destes conceitos. Espera-se que este trabalho possa motivar novas discussões acerca do ensino e da aprendizagem dos conceitos da disciplina de Análise Real.

Palavras-chave: Ensino de Análise; Teorema Fundamental do Cálculo; GeoGebra; Tecnologias no Ensino Superior.

ABSTRACT

In this article we will present an activity proposal for the study of the Fundamental Calculus Theorem (FCT) from the perspective of the Real Analysis discipline. The proposed objective is to analyze the contributions of the use of GeoGebra software in the study of FCT through the accomplishment of an exploratory activity of graphs that aims to redefine the learning of the proposed Theorem. The research used a qualitative methodological approach, inspired by the Didactic Engineering, to validate the proposed activity. The results showed that the

¹ SEEDUC-RJ – greicelacerda@gmail.com

² PEMAT/UFRJ – thays.santos@ufrj.br

³ PEMAT/UFRJ – agnaldo@im.ufrj.br

⁴ PEMAT/UFRJ – viniciuscunhaluz@gmail.com

technological resource used acted as a motivator and motivator, potentiating and encouraging the learning process of the participants. Correspondingly, its use contributed to the understanding of the TFC and the concepts that involve the Riemann integral, as well as allowed a discussion between researchers and participants, favoring the construction and reframing of these concepts. It is hoped that this work may motivate further discussions about teaching and learning the concepts of the Real Analysis discipline.

Keywords: *Teaching Analysis; Fundamental Theorem of Calculus; GeoGebra; Technologies in Higher Education.*

Introdução

No curso de Licenciatura em Matemática, o aluno se depara com diversas disciplinas de cunho científico, pedagógico, de prática como componente curricular, dentre outros componentes curriculares que deverão prepará-lo para o exercício de sua profissão. Dentre todas as disciplinas de um curso de Matemática, segundo vários estudiosos (OTERO-GARCIA, 2011; BARONI, 2015; PAULIN; RIBEIRO, 2019), o Cálculo Diferencial e Integral e a Análise Real são disciplinas que mais costumam apresentar altos índices de reprovação, temor e evasão. Ávila (2002) afirma que antigamente aprendia-se o Cálculo juntamente com Análise, e somente a partir da década de 1960, houve a separação. Momento este, que segundo o autor, foi marcado pela substituição dos livros europeus pelos livros americanos.

Hoje, a disciplina de Cálculo costuma ser ofertada no início do curso de Licenciatura, enquanto Análise, que aprofunda algumas questões do Cálculo, é ofertada na segunda metade do curso. O Teorema Fundamental do Cálculo (TFC), tema escolhido para este trabalho, encontra-se prescrito na ementa de ambas as disciplinas, porém em uma privilegia-se o cálculo algébrico, em outra, o rigor e a formalização das provas e demonstrações.

A preocupação com a formação de professores de Matemática, a qualidade desta formação e os impactos destas disciplinas na atuação dos egressos como professores da Educação Básica, foi discutida por Esquincalha e Bairral (2019) e por Nascimento e Esquincalha (2017) e tem motivado pesquisas no âmbito da Educação Matemática.

O ensino de Análise nos cursos de licenciatura em Matemática tem gerado discussões complexas que permeiam questionamentos como: Qual o papel da disciplina de Análise na formação do futuro professor de Matemática? Por que Análise Real na Licenciatura? O ensino de Análise e seus questionamentos têm preocupado vários pesquisadores educadores matemáticos como: Moreira, Cury e Vianna (2005), Mazzi (2014), Baroni (2015), Nascimento e Esquincalha (2017), Esquincalha e Bairral (2019) entre outros.

Como a Análise Real é uma disciplina que possui uma abordagem matematicamente rigorosa e que costuma provocar preocupações em alunos, professores e pesquisadores, entendemos que o processo de ensino e aprendizagem dessa disciplina possa ser mais significativo para a formação docente com a inserção da tecnologia. Nascimento e Esquincalha (2017) consideram, a partir de sua pesquisa, que:

[...] o ensino de Cálculo e Análise em ambientes informatizados pode contribuir para um repensar do ensino destas disciplinas e, assim, para um repensar da própria formação de um professor de matemática com flexibilidade de conhecimentos específicos, pedagógicos e curriculares. (NASCIMENTO; ESQUINCALHA, 2017, p. 56).

Por corroborar com esse pensamento, este artigo tem como objetivo analisar as contribuições do GeoGebra por meio da realização de uma atividade exploratória de gráficos que visa ressignificar a aprendizagem do Teorema Fundamental do Cálculo. Levantaremos como hipótese de investigação que uma atividade exploratória de gráficos com o GeoGebra pode influenciar positivamente a ressignificação da aprendizagem dos conceitos que envolvem o TFC.

Neste ponto, chamamos a atenção para o sentido de ressignificação a ser adotado. Segundo o Dicio (2020), ressignificar é “atribuir um novo significado a; dar um sentido diferente a alguma coisa”. Para Giusti e Reuwsaat (2018, p. 25), ressignificar em Educação Matemática evidencia a necessidade de “refletir, discutir, pesquisar e compartilhar com os pares para melhorar e aperfeiçoar o que já se sabe”. Concatenando esses dois sentidos, ressignificar para este trabalho relaciona-se à ideia de trazer o conceito proposto para uma zona mais próxima do aluno, buscando através de estímulos: a reflexão, a discussão, a manipulação da TD e ao compartilhamento de conjecturas e vivências dos conceitos matemáticos entre alunos e professores, a construção de um novo olhar, de um novo significado para o TFC.

A justificativa pela escolha do TFC se deu pelo fato de existirem poucos trabalhos acerca desse tópico relacionado à Análise Real, fato verificado por meio da revisão de literatura, e por considerarmos a integral de Riemann um conteúdo importante e que nem sempre é abordado nas disciplinas de Análise. A escolha pelo GeoGebra se deu por ser multiplataforma, além de trabalhar, concomitantemente, as representações algébricas e geométricas e, também por fornecer os comandos necessários para trabalhar os conteúdos referentes à integral de Riemann e ao TFC, como por exemplo, funções, partições de um intervalo, somas inferiores, somas superiores e integrais. A seguir são apresentados algumas inspirações teóricas e os caminhos da pesquisa.

1. A tecnologia na perspectiva do ensino de Análise

O papel e a importância da disciplina de Análise Real vêm sendo questionado por egressos do curso de Licenciatura em Matemática, uma vez que muitos não conseguem enxergar as contribuições desta disciplina em sua atuação profissional (BARONI, 2015). Para Ferreira e Muniz (2014), “Números Reais” é um dos conteúdos que mais contribuem na formação matemática do futuro professor e é o principal alicerce na Análise Matemática.

Segundo Roque (2015), a história da Análise Real ou do Cálculo Infinitesimal possui um papel central nas transformações que culminaram com a imagem da Matemática que temos hoje, forjada principalmente ao longo do século XIX e no início do XX. A Matemática costumava ser dividida em três momentos: o primeiro de natureza geométrica; o segundo um estágio analítico ou algébrico, e o terceiro, o período em que foi forjada uma nova arquitetura para a Análise Matemática, proposta inicialmente por Cauchy no início do século XIX e continuada por diversos outros matemáticos nas décadas seguintes. O século XIX é descrito como a “idade do rigor”, ou seja, neste século, a Análise Matemática adquiriu a forma que reconhecemos ainda hoje como válida (ROQUE, 2015). Otero-Garcia, Baroni e Martines (2013), concluíram em seu trabalho que “[...]a disciplina de análise está cristalizada, ou seja, sua estrutura geral pouco se alterou ao longo desses anos, apesar das modificações políticas e filosóficas que incidiram sobre os cursos de formação de professores de matemática” (OTERO-GARCIA; BARONI; MARTINES, 2013, p. 704).

Quanto a disciplina de Análise Real nos cursos de licenciatura em Matemática, não percebemos nas pesquisas de Moreira, Cury e Vianna (2005), Ferreira e Muniz (2014) e Otero-Garcia, Baroni e Martines (2013) como esta disciplina contribui efetivamente na prática do futuro professor de Matemática. Além disso, essas pesquisas apontam que não há um consenso quanto ao papel da disciplina de análise nos cursos de formação de professores. Entretanto, Otero-Garcia, Baroni e Martines (2013), através de professores de análise e coordenadores de cursos de licenciatura em matemática de diferentes universidades, chegaram a três categorias acerca do papel da disciplina de análise. O papel da disciplina é: 1) fundamentar o conhecimento matemático do futuro professor; 2) consolidar e formalizar conteúdos, bem como propiciar cultura e bagagem matemática; e 3) fundamentar o conhecimento sobre a construção dos números reais. Em resumo, o papel seria fundamentar, consolidar e aprofundar o conhecimento matemático do futuro professor. Estes autores consideram que para cumprir com esse papel, “a formação do professor deveria desenvolver uma prática pedagógica pautada na construção e negociação de significados” (OTERO-

GARCIA; BARONI; MARTINES, 2013, p. 712). Para isso, é preciso ter um domínio dos conceitos, e é isso que a atividade proposta neste artigo com o uso da tecnologia busca. Durante a revisão da literatura percebermos que poucos textos mencionam o uso de tecnologias digitais para o ensino de Análise. Otero-Garcia (2011), ao realizar um mapeamento da produção brasileira em ensino de Análise, ressaltou treze pontos que foram considerados como questões críticas relacionadas a esse ensino, dentre eles destacamos: o uso de computadores no ensino de Análise. Baroni (2015) afirma que existem muitas pesquisas sobre o uso de computadores para o ensino de Cálculo, mas não de Análise. Entretanto, percebemos que em meados de 2012 começaram a surgir pesquisas que trabalharam com experimentação de *softwares* no ensino de alguns conteúdos específicos de Análise. Destacam-se neste sentido: a pesquisa de Alves e Neto (2012), que investigou os usos do GeoGebra em definições e teoremas de Análise Real; a pesquisa de Mazzi (2014), que investigou uma experimentação com o GeoGebra para revisitar alguns conceitos fundamentais da Análise Real; e a pesquisa de Lacerda (2018) que propôs a elaboração de uma ferramenta para o ensino de conceitos relacionados à Sequências de Números Reais com auxílio do GeoGebra.

Evidenciando uma forma diversificada de enxergar o ensino e aprendizagem da Análise Real, Alves e Neto (2012) discutem em seu trabalho que:

[...] a significação proporcionada pela exploração do software GeoGebra, pertinente às definições e alguns teoremas essenciais nesta teoria, adquirem um significado que ultrapassa os limites do formalismo e o olhar estrutural dos objetos matemáticos. (ALVES; NETO, 2012, p. 328).

Segundo Mazzi (2014), ainda que o aluno já tenha cursado as disciplinas de Cálculo e Análise, dúvidas em relação às ideias básicas e importantes podem não ter sido sanadas ao longo do curso. Ainda segundo o autor, as disciplinas ofertadas para a Licenciatura geralmente são repletas de exercícios instrumentais priorizando as repetições de passos lógicos, ao invés de primar pela compreensão dos conceitos estudados. Dessa forma, o autor defende uma Matemática que faça sentido, que não seja simplesmente mecânica. Ponderando sobre este aspecto importante na aprendizagem da disciplina, pretendemos chamar a atenção para um ensino de Análise que não exija somente o rigor matemático por meio da apresentação de definições, teoremas, corolários e demonstrações, mas que tenha foco na compreensão dos conceitos.

Com base nos trabalhos de Drijvers (2013) sobre a integração da tecnologia digital no ensino e de suas três funcionalidades didáticas: (a) a função da ferramenta para fazer matemática; (b) a função do ambiente de aprendizagem para a prática de habilidades; e (c) a função do ambiente de aprendizagem para

promover o desenvolvimento da compreensão conceitual; pretendemos situar este trabalho na terceira funcionalidade didática, que segundo o autor, é a mais desafiadora para explorar. Ainda embasados em Drijvers (2013), decidimos levar em consideração para este trabalho, os fatores que o autor identifica como decisivos para o sucesso da integração de tecnologias digitais na Educação Matemática: (1) o planejamento da ferramenta digital e as tarefas apropriadas que exploram o potencial pedagógico da ferramenta; (2) o papel do professor; e (3) o contexto educacional.

Diante do uso do GeoGebra como plataforma para as atividades que visam observar a compreensão do TFC, é importante questionarmos se a forma como o aluno aprende com Tecnologias Digitais (TD) é a mesma com atividades realizadas em mídias “estáticas”. Entendemos que, apesar de não ser indispensável, considerar o uso de TD no processo de ensino e aprendizagem pode trazer potencialidades e desafios diferentes daqueles que se configuram a partir do uso de outras tecnologias, além de acompanhar as inovações do tempo em que vivemos.

Cabe-nos então refletir sobre que mudanças são essas e o quão significativas são para a aprendizagem de um conceito matemático. Para Moreno-Armella, Hegedus e Kaput (2008) atividades matemáticas, por meio de mídias dinâmicas, permitiriam aos estudantes um acesso mais experimental às estruturas matemáticas e, conseqüentemente, a diferentes formas de generalização e demonstração. Os autores propõem cinco estágios evolutivos, no que concerne à maneira como as representações semióticas são inscritas: estático inerte; estático cinestésico; estático computacional; dinâmico discreto; dinâmico contínuo. Destacamos neste estudo o estágio dinâmico contínuo. Neste estágio, o usuário pode experimentar, além da interação usuário-mídia, possibilidade de exploração de propriedades de manipulação direta de um objeto, favorecendo a construção de conjecturas e reformulações de ideias instantaneamente (*feedback*). Aqui podem ser alocados *softwares* como o GeoGebra, considerado de Geometria Dinâmica.

Moreno-Armella, Hegedus e Kaput (2008) afirmam que as tecnologias digitais não são ferramentas ou mediadores, mas sim colaboradores no estabelecimento de um campo de referência dinâmico. Dessa forma, acerca de ambientes tecnológicos dinâmicos os autores concluem que:

O avanço de ambientes tecnológicos dinâmicos nos permite combinar múltiplos atos cognitivos individuais de referência. Isso é possível, pois os indivíduos podem projetar suas intenções e expressividade através das notações que criam e compartilham. Também podem perceber e generalizar a estrutura da matemática através da colaboração co-ativa com esses ambientes. Isto pode ser possível através dos avanços nas infraestruturas de representação (matemática dinâmica) e

infraestruturas de comunicação (redes sociais e digitais). (MORENO-ARMELLA; HEGEDUS; KAPUT, 2008, p. 110)

Paulin e Ribeiro (2019) apresentaram algumas reflexões a partir de uma revisão sistemática de literatura de pesquisas em Educação Matemática que investigaram e discutiram aspectos relacionados ao ensino e aprendizagem do TFC. Os autores identificaram a necessidade de valorizar alguns conceitos que são imprescindíveis para a compreensão do TFC, a saber: derivada, continuidade e integral de uma função. Além disso, identificaram a importância de uma prática pedagógica que articule as diferentes representações de um conceito matemático. Pensando nisso, Picone (2007) destaca a importância da articulação entre as representações gráfica e algébrica das funções. Assim, consideramos que o aspecto dinâmico apresentado pelo software GeoGebra mais as representações gráfica e algébrica podem contribuir para que os alunos compreendam melhor os conceitos envolvidos no TFC. E de acordo com Paulin e Ribeiro (2019), estes conceitos podem ser abordados fazendo uso de TD, ainda que as pesquisas atentem para as dificuldades dos alunos em relação aos conceitos de Cálculo Diferencial e Integral. Para Anacleto (2007, p. 118), a dificuldade dos estudantes está provavelmente associada aos “hábitos dos estudantes, que tendem a não focar atenção aos aspectos conceituais do teorema, apenas memorizando o algoritmo dos procedimentos sem, todavia refletir sobre a sua aplicabilidade”.

Diante das perspectivas ressaltadas, consideramos a importância de utilizarmos atividades já construídas em mídias estáticas para trabalhar o Teorema Fundamental do Cálculo, adaptando-as para mídias dinâmicas, considerando todas as suas peculiaridades, a fim potencializar o entendimento e favorecer a compreensão do conceito proposto.

2. Metodologia

O presente artigo trata da análise da validação de uma proposta de atividade a partir das contribuições de cinco participantes que são licenciandos (do último ano do curso) ou recém-licenciados em Matemática de uma universidade pública do Rio de Janeiro. Para alcançar o objetivo proposto, a abordagem metodológica utilizada nesta pesquisa é qualitativa e inspirada na Engenharia Didática de Artigue (1988). Como instrumentos de coleta de dados, foram utilizados a observação participante da aplicação da atividade exploratória e um questionário que foi aplicado ao seu término.

A Engenharia Didática é uma metodologia de validação interna, pautada nas fases de análise prévias, concepções e análise a priori, experimentação, análise a

posteriori e validação. A fase de análise a posteriori e validação se constitui no confronto da análise a priori e dos dados coletados na experimentação. A fase de análise a posteriori e validação será apresentada na seção de análise de dados.

No caminho para validar a hipótese de que uma atividade exploratória de gráficos com o GeoGebra pode influenciar positivamente a ressignificação da aprendizagem do TFC e, conseqüentemente, validar a atividade exploratória proposta, destacamos na fase de análise prévias três fatores que, segundo os alunos, dificultam o aprendizado da disciplina: dificuldades na compreensão dos conceitos, dificuldades na realização de provas e demonstrações, e dificuldades de aplicação do conceito estudado.

Na fase de concepções prévias e a priori definimos como variáveis macrodidáticas: o estudo do TFC e o uso do GeoGebra. Vale ressaltar que uma variável macrodidática representa a parte da pesquisa que não pode ser alterada. E definimos como variável microdidática: o planejamento pedagógico da atividade. Essa variável contempla todas as demais escolhas para sua aplicação. Define-se nesta variável o ambiente de aplicação, o material (impresso ou virtual), o formato da aula (expositivo, de exploração, invertida etc.) e outras etapas do planejamento.

A fase de experimentação consiste na aplicação da atividade no ambiente de aula escolhido, a qual foi realizada no primeiro semestre de 2019, em um encontro de duas horas. Para essa pesquisa, convidamos cinco participantes já descritos. Após a explicação do objetivo da pesquisa e a sua garantia de anonimato por questões éticas, todos concordaram em fazer parte desta pesquisa.

O ambiente escolhido para o encontro foi o presencial. Para o desenvolvimento da atividade planejada, devido à indisponibilidade do laboratório de informática da instituição, os participantes utilizaram dois *notebooks* com o GeoGebra instalado e foram organizados em uma dupla e um trio.

Vale ressaltar que a atividade aqui apresentada foi pensada tendo um caráter específico de pesquisa, mas que pode ser utilizada por professores em suas aulas ou por estudantes como uma forma de complementar os estudos. Para elaboração da atividade proposta, utilizamos a teoria apresentada por Lima (2011). Antes de começar a exploração no *software*, alguns conceitos foram revisados, como partição de um intervalo, integral superior e integral inferior e funções integráveis. A atividade é composta por três exemplos e dois exercícios de aplicação do TFC, estando disponível em <https://www.geogebra.org/m/ypmrgfph>. Três funções reais de uma variável real exploram, nos exemplos, a soma inferior, a soma superior, a integral inferior e a integral superior visando a compreensão das condições necessárias para que uma função seja integrável e para que, ao término

do terceiro exemplo, seja possível compreender as condições necessárias para aplicação do TFC, passando-se assim, aos exercícios de aplicação.

O TFC estabelece que: Se uma função integrável $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ possui uma primitiva $F: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, então $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$. Para um melhor entendimento dos conceitos e das relações que envolvem esse enunciado, é importante destacar quais são as condições que devem ser satisfeitas. Assim, a função $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ deve ser integrável e possuir uma primitiva F , i.e., $F' = f$. Em Lima (2011, p. 323) podemos ver que toda função contínua num intervalo compacto possui primitiva. Por outro lado, como toda função contínua é integrável, segue que toda função contínua satisfaz as hipóteses do TFC. Convém observar que não é preciso supor que f é contínua para satisfazer as hipóteses do TFC.

Tendo em vista o pouco tempo para aplicação da atividade, e pensando em uma situação de sala de aula em que muitas vezes o conteúdo não é abordado por falta de tempo, os gráficos das funções a serem trabalhadas no GeoGebra em cada exemplo da atividade foram disponibilizados. Assim, o participante não precisava criar tudo do início, bastava movimentar os controles deslizantes e analisar as somas inferiores e as somas superiores. Não sendo possível tratar de cada exemplo da atividade neste texto, optamos por fazer um recorte e apresentar somente o primeiro, que explorou uma discussão que se mostrou importante tanto para os pesquisadores, quanto para os participantes envolvidos.

A atividade foi planejada para que o participante realizasse uma sequência de passos e respondesse as perguntas a partir da visualização no software. Os exemplos tinham como objetivo a compreensão do conceito de função integrável. Em particular, no exemplo 1, consideramos a função $g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, dada por $g(x) = \begin{cases} c + 2, & n \leq x < m \\ c + 4, & m \leq x \leq b \end{cases}$. Vejamos a sequência de passos no quadro 1.

1º) abra o arquivo TFC_EXEMPLO1.ggb e observe o gráfico gerado;

2º) responda as perguntas abaixo:

- A função g é limitada no intervalo $J = [-5, 10]$? Justifique a sua resposta.
- Marque os botões seletores: “soma superior” e “soma inferior” e movimente os controles deslizantes c e r . O que ocorre com os valores de Σ e σ à medida em que se aumenta o número de partições do intervalo $[a, b]$?
- Podemos afirmar que a função g é integrável no intervalo $[a, b]$ dado? Justifique a sua resposta.
- Indique qual seria o valor da integral da função g no intervalo $[a, b]$.

Quadro 1. Sequência de passos para realização do exemplo 1.

Esse exemplo, assim como os demais, aborda a integral de uma função $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ interpretada como a área do conjunto $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq f(x)\}$. Mas, qual é a área deste conjunto? De acordo com Lima (2011) é necessário dizer o que significa a “área” de A para então tentar calculá-la. Nas palavras de Lima (2011, p. 302),

A área de um subconjunto limitado A do plano \mathbb{R}^2 deve ser um número real. Como defini-lo? Podemos admitir que sabemos calcular áreas de polígonos e tomar como aproximações por falta deste número as áreas dos polígonos contidos em A . Isto equivale a pôr: área de $A = \text{supremo das áreas dos polígonos contidos em } A$. [...] (LIMA, 2011, p. 302).

Para Lima (2011), a noção de área motiva os conceitos referentes à integral de Riemann, como a noção de soma inferior ou de soma superior associada a uma partição de $[a, b]$, e está relacionada com as derivadas. Segundo Lima (2011), quando $f \geq 0, \forall x \in [a, b]$, as somas inferiores e as somas superiores “[...] podem ser interpretadas como áreas de polígonos, um inscrito e outro circunscrito ao gráfico de f , respectivamente, e portanto como valores aproximados (por falta e por excesso) da área compreendida entre esse gráfico e o eixo das abscissas” (LIMA, 2011, p. 305). Na figura 1, podemos ver os retângulos inscritos (tracejados em vermelho) e circunscritos (em verde) ao gráfico de f .

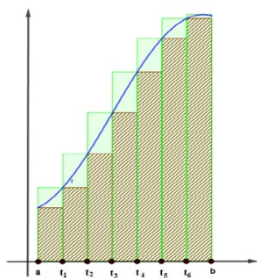


FIGURA 1: soma inferior e soma superior
FONTE: os autores.

Como houve a revisão desses conceitos antes da realização do primeiro exemplo, ao responderem o item “c” indicado no quadro 1, dois participantes discutiram porque que as somas inferiores e superiores ficavam diferentes ao fixar um determinado número de retângulos, suponhamos $r = 58$. Para eles, por causa do gráfico da função, esses valores deveriam ser iguais. Nas figuras 2 e 3, podemos ver, respectivamente, a representação da soma inferior e da superior quando $r = 58$.

Neste caso, a soma inferior representada por σ é igual a 51,41 e a soma superior, Σ , é igual a 52,45. Os participantes diziam que os retângulos deveriam ter a mesma altura nos dois casos e achavam que era um “bug” do GeoGebra. Em casos como o da função $f(x) = x^2$, eles entendiam que existem retângulos acima e abaixo do gráfico. Mas no caso da função g , acreditavam que deveria ser diferente. Então, ressaltamos que esses valores mudam de acordo com o número de partições tomadas e pedimos para que continuassem explorando, marcando apenas uma das somas, pois ambas estavam marcadas e se sobrepondo. Após a discussão e a visualização do *software* exposto nas figuras 2 e 3, todos ficam convencidos de que as somas tendem a ficar iguais quando o número de partições aumenta. Por fim, concluem que a função é integrável no intervalo $[a, b]$ dado.

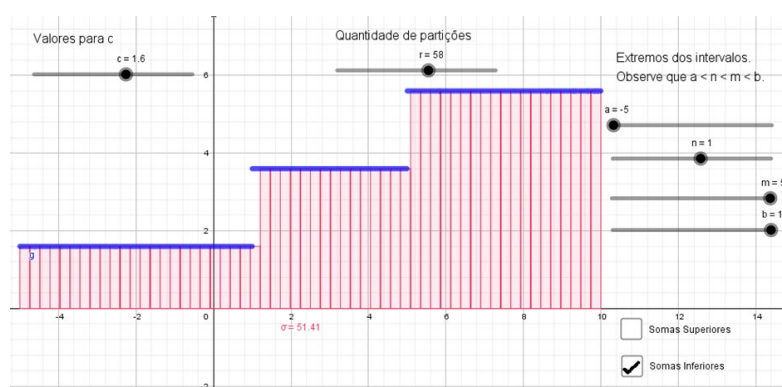


FIGURA 2: soma inferior da função g .

FONTE: os autores.

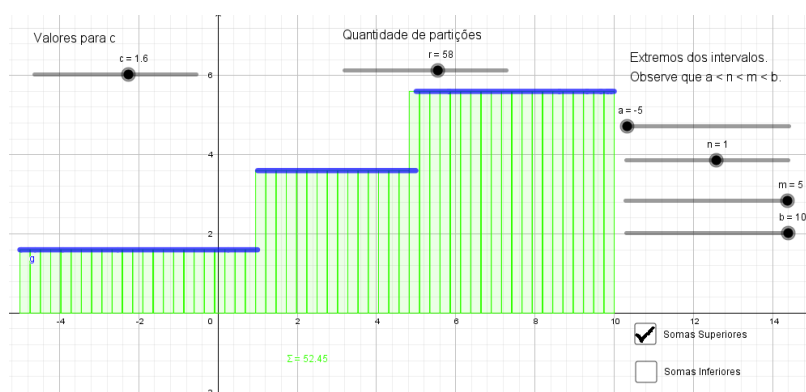


FIGURA 3: soma superior da função g .

FONTE: os autores.

Como podemos perceber, o uso do *software* GeoGebra contribuiu para a compreensão dos conceitos de soma superior e soma superior por meio dos exemplos. Além do *software*, percebemos que a forma como os participantes estavam organizados, em dupla ou em trio, se mostrou importante, pois possibilitou

uma troca de ideias entre eles. Então, consideramos que a tecnologia junto às discussões são fatores que favoreceram a compreensão dos conceitos e conseqüentemente, a produção do conhecimento matemático. A atividade atendeu as expectativas, pois proporcionou uma melhor visualização do TFC, assim como possibilitou discussão entre os pesquisadores (atuando como professores) e os participantes. Outro fator que se mostrou importante para o sucesso da integração do GeoGebra no ensino de Análise, foi o papel do professor na condução da atividade, como apontado por Drijvers (2013).

3. Análise dos dados

Inicialmente, destacamos que tanto a Integral de Riemann quanto o Teorema Fundamental do Cálculo estão presentes na ementa da disciplina de Análise Real do curso de Licenciatura em Matemática da universidade a qual os participantes desta pesquisa se graduaram, mas o que nos chamou atenção foi o fato dos participantes afirmarem que não chegaram a estudar esses temas na disciplina. Como esses temas ficam para o final da disciplina, por vezes acaba não dando tempo de serem trabalhados em Análise e o estudante acaba ficando apenas com os estudos realizados na disciplina de Cálculo acerca desses temas.

A partir do questionário respondido ao término da aplicação da atividade, constatamos que nenhum recurso tecnológico foi utilizado nas aulas da disciplina de Análise Real cursada pelos participantes da pesquisa. Quando questionados se já haviam utilizado o GeoGebra para o estudo dos conceitos da disciplina, apenas um dos cinco participantes respondeu que sim, justificando da seguinte maneira: “Pois fui tirar uma dúvida com um professor que usa o GeoGebra nas suas práticas”. A partir desta fala, entendemos que o participante, com dúvidas nos conceitos, foi pedir ajuda a outro professor que não era o que lecionava a disciplina de Análise, e este optou por usar o GeoGebra para ajudá-lo.

Em relação às dificuldades encontradas pelos participantes no estudo da disciplina de Análise, oferecemos as seguintes opções para serem marcadas: 1) a assimilação dos conceitos; 2) a prática das demonstrações e provas; 3) a aplicação dos conceitos em situações-problemas; e 4) outros. Como os participantes poderiam marcar mais de uma opção, eles só marcaram entre as três primeiras e não identificaram outras dificuldades. Identificamos a prática das demonstrações e provas como a maior dificuldade, pois todos marcaram essa opção. As dificuldades 1 e 3, foram marcadas três vezes cada uma. Com a atividade, ainda identificamos a prática das demonstrações como uma dificuldade, uma vez que foram solicitados, durante a atividade, a dar a ideia do que seria preciso para fazer a demonstração do TFC. Percebemos, no entanto, que a palavra demonstração já os assusta e que a

exploração gráfica não foi suficiente para que eles tivessem subsídios para realizar demonstrações, embora os tenha auxiliado na compreensão do TFC.

Durante a elaboração da atividade, pensamos quanto à necessidade de solicitar demonstrações, pois percebemos que a exploração talvez não desse conta disso, ficando evidente após a aplicação. Nos questionamos se, para que a atividade fosse considerada sob o ponto de vista do ensino de Análise, seria necessário solicitar demonstração? Ou seja, em Análise eu não posso trabalhar uma atividade exploratória com o uso da tecnologia sem cobrar o rigor que a Análise exige? Mais ainda, pode-se considerar o rigor em explicações informais ou apenas em demonstrações com épsilons e deltas? Consideramos que em um contexto de sala de aula, o professor poderia trabalhar a atividade e, em seguida, apresentar as demonstrações; ou seja, poderia trabalhar paralelamente com a tecnologia digital, neste caso, com o GeoGebra e outras tecnologias, como o quadro, o lápis e o papel; ficando assim, o professor da disciplina responsável por apresentar as demonstrações necessárias. Desta forma, o ensino da disciplina não “perderia” o seu rigor e a sua formalização.

O quadro 2 apresenta de forma resumida, o resultado dos dados coletados durante a fase de experimentação, confrontando-os com os dados da fase de análise a priori.

Conceito e Objetivo	Análise a Priori	Síntese dos Dados Coletados
<p>Teorema Fundamental do Cálculo (TFC)</p> <hr/> <p>Analisar as contribuições do <i>software</i> GeoGebra por meio da realização de uma atividade exploratória de gráficos que visa ressignificar a aprendizagem do TFC.</p>	<p>Dificuldades sinalizadas:</p> <ul style="list-style-type: none"> • Compreensão do conceito; • Provas e demonstrações; • Aplicação dos teoremas em demonstrações; • Utilização de tecnologias digitais no estudo dos conceitos da disciplina. 	<p>Resultados:</p> <ul style="list-style-type: none"> • Compreenderam os conceitos de integrabilidade e o TFC; • Indicaram os tópicos necessários para a realização de uma demonstração do teorema; • Visualizaram algumas aplicações do TFC em outra área do conhecimento; <ul style="list-style-type: none"> • Visualizaram, manipularam e experienciaram outra forma de compreender o teorema por meio do <i>software</i>; • Compartilharam e discutiram conjecturas a partir da manipulação do <i>software</i>.

Quadro 2 - Fase de Análise a Posteriori.

O confronto exposto no quadro 2 tem como objetivo validar a hipótese de pesquisa levantada. É válido lembrar que a variável macrodidática definida prevê o estudo dos conceitos do TFC com o auxílio do *software* GeoGebra.

Ao longo do desenvolvimento das atividades na fase de experimentação, os participantes demonstraram uma evolução no domínio e manipulação do *software*; conseguiram alcançar a compreensão dos conceitos estudados por meio do acesso a conhecimentos prévios sobre funções, partições e gráficos, das visualizações, manipulações e construções propostas. Eles também consideraram a metodologia adequada e facilitadora do processo de ensino e aprendizagem.

Em resumo, a análise qualitativa do confronto sintetizada no quadro acima é positiva e expõe que, apesar das dificuldades apresentadas na análise a priori para a compreensão do conceito e para a utilização do GeoGebra, na análise a posteriori a atividade exploratória foi capaz de facilitar a compreensão do conceito abordado.

A análise do quadro 2 sugere ainda que o recurso tecnológico utilizado atuou como dinamizador e motivador, potencializando e incentivando o processo de aprendizagem dos alunos. Em correspondência, culminou em uma forma diversificada de enxergar a disciplina e o estudo de seus conceitos.

Sendo assim, levando em consideração que as dificuldades para a compreensão dos conceitos propostos foram parcialmente superadas, que os participantes vislumbraram outra forma de aprender os conceitos da disciplina com o uso do GeoGebra, que o objetivo traçado foi alcançado e que a aplicação da atividade foi satisfatória, pode-se afirmar que a hipótese levantada no início da pesquisa foi validada e, conseqüentemente, a atividade exploratória foi validada.

Considerações finais

Este trabalho teve como principal objetivo analisar as eventuais contribuições do GeoGebra por meio da realização de uma atividade exploratória de gráficos na ressignificação da aprendizagem do Teorema Fundamental do Cálculo. No intento de alcançar o objetivo proposto, levantamos a seguinte hipótese de investigação: “uma atividade exploratória de gráficos com o GeoGebra pode influenciar positivamente a ressignificação da aprendizagem dos conceitos que envolvem o TFC”.

Motivados pelo objetivo descrito e com a intenção de validar a hipótese levantada, realizamos uma revisão de literatura que nos ajudou a identificar as diversas pesquisas relacionadas ao tema escolhido. Percebemos que diferentes pesquisadores buscam compreender o papel e a importância da Análise na formação docente e que apesar da preocupação com a qualidade do ensino dos conceitos da disciplina, poucos autores abordam em seus trabalhos metodologias de ensino que adotem o uso das tecnologias digitais como parte integrante do ensino e da aprendizagem da Análise Real. A partir da revisão de literatura elegemos como

referencial Drijvers (2013), por considerar que a integração da tecnologia digital no ensino possui fases distintas e muito bem definidas. Baseados em seu trabalho, consideramos que a pesquisa se enquadra na funcionalidade didática de utilização do ambiente gerado pela tecnologia digital como promovedor do desenvolvimento da compreensão do conceito escolhido. Consideramos importante para esta pesquisa: o planejamento da ferramenta digital e as atividades apropriadas para a exploração de seu potencial pedagógico, o papel do professor como mediador e motivador; e o contexto educacional em que os alunos estariam inseridos.

A inspiração metodológica na Engenharia Didática nos ajudou a controlar as variáveis da pesquisa e estruturá-la em quatro fases: análises prévias, concepções e análise a priori, experimentação, análise a posteriori e validação. Na fase de análises prévias, os alunos indicaram algumas dificuldades na aprendizagem de Análise Real, como: de compreensão e aplicação dos teoremas em provas e demonstrações e de utilização de tecnologias no estudo de seus conceitos. A fase de concepções e análise a priori foram definidas como variáveis macrodidáticas: o estudo do TFC e o uso do GeoGebra; e como variáveis microdidáticas: todo o planejamento pedagógico necessário para a aula.

A fase de experimentação foi a efetiva aplicação da atividade exploratória e a aplicação dos instrumentos de coleta de dados: a observação participativa e o questionário. Nesta fase, percebemos que a atividade proporcionou uma melhor visualização do TFC, que possibilitou discussões entre participantes e os professores-pesquisadores e que houve sucesso na integração da tecnologia digital no ensino deste conceito em Análise Real. Ao final da fase de experimentação foi possível concluir que o objetivo proposto para a pesquisa foi alcançado.

Na fase de análise a posteriori e validação, verificou-se a partir do confronto dos dados coletados e dos dados da análise a priori, que as dificuldades para a compreensão do TFC foram parcialmente superadas; que os alunos experimentaram uma forma diversificada de estudar o teorema proposto; que a metodologia empregada na elaboração das atividades foi adequada e satisfatória; que, apesar de não realizarem as demonstrações, os alunos indicaram verbalmente os tópicos necessários para tal; e, principalmente, que a atividade permitiu o acesso a conhecimentos prévios, o compartilhamento e discussão de conjecturas entre os participantes e a manipulação e observações dos gráficos no *software*. Portanto, conclui-se que os resultados obtidos foram satisfatórios, porque contribuíram para a ressignificação dos conceitos subjacentes a integral de Riemann e ao TFC. Ressaltamos que, embora não tenhamos apresentado e discutido a atividade realizada em sua totalidade, devido à limitação de espaço neste artigo, o leitor interessado poderá encontrá-la em: <https://www.geogebra.org/m/ypmrgfph>.

Esperamos que este artigo possa motivar o desenvolvimento de novas formas de se ensinar e aprender os conceitos da disciplina de Análise Real, sem que estes percam seu rigor e formalismo, ainda que acreditemos que caibam questionamentos sobre ressignificações desses conceitos. Desejamos que este trabalho incentive novas discussões sobre o ensino da disciplina na Licenciatura e que estimule sua articulação com as tecnologias digitais e o ensino em todos os níveis educacionais.

Referências

- ALVES, F. R. V; NETO, H. B. Interpretação geométrica de definições e teoremas: o caso da Análise Real. In: CONFERÊNCIA LATINOAMERICANA DE GEOGEBRA, 1, 2012, Montevideu. *Anais...* Montevideu: Editora Universitária, p. 322-329, 2012.
- ANACLETO, G. M. C. *Uma investigação sobre a aprendizagem do teorema fundamental do cálculo*. Dissertação em Educação Matemática. 2007, 136 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2007.
- ARTIGUE, M. *Ingénierie Didactique*. Recherches em Didactique des Mathématiques. Grenoble: La Pensée Sauvage-Éditions, v.9.3, p. 281-308, 1988.
- ÁVILA, G. O Ensino do Cálculo e da Análise. *Revista Matemática Universitária*, São Paulo, n.33, p. 83-95, 2002.
- BARONI, R. L. S. Algumas questões sobre o ensino de Análise em cursos de formação de professores de Matemática. In: III Fórum de Discussão Parâmetros Balizadores da Pesquisa em Educação Matemática, PUC-SP. *Anais...* São Paulo, 2015.
- DICIO. *Significado de Resignificar*. Dicionário Online de Português. Disponível em: <<https://www.dicio.com.br/ressignificar/>>. Acesso em: 21 fev. 2020.
- DRIJVERS, P. Digital technology in mathematics education: why it works (or doesn't). *PNA*, v. 8, n. 1, p. 1-20, 2013.
- ESQUINCALHA, A. C.; BAIRRAL, M. A. Refletindo sobre análise real com professores da educação básica em um curso a distância. *Revista de Educação, Ciências e Matemática*, Duque de Caxias, v. 9, n.3, p. 213-222, 2019.
- FERREIRA, M. S.; MUNIZ, T. O. M. O ensino de Análise: contribuições e perspectivas na formação do professor de Matemática. In: I Simpósio Educação Matemática em Debate, UDESC, Joinville. *Anais...* Joinville, 2014.
- GIUSTI, N. M. R.; REUWSAAT, J. C. Educação Matemática e desenvolvimento profissional de professores dos anos iniciais do Ensino Fundamental. *Revista Iberoamericana de Educación*, v. 76, n.2, p. 9-28, 2018.

- LACERDA, G. K. S. *O Estudo de Sequências e Limites com o Auxílio do GeoGebra em Análise Real na Formação Docente*. 2018. 117 f. Dissertação (Mestrado em Ensino da Ciências na Educação Básica) – Universidade do Grande Rio, Duque de Caxias, 2018.
- LIMA, E. L. *Curso de Análise*. Rio de Janeiro: Associação Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada, v. 1, 13.ed., 2011.
- MAZZI, L. C. *Experimentação-com-GeoGebra: revisitando alguns conceitos da Análise Real*. 2014. 137 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Rio Claro, 2014.
- MOREIRA, P. C.; CURY, H. N.; VIANNA, C. R. Por que Análise Real na Licenciatura? *Zetetiké*, Campinas, n.23, p.11-42, 2005.
- MORENO-ARMELLA, L.; HEGEDUS, S.J.; KAPUT, J. From static to dynamic mathematics: historical and representational perspectives. *Educational Studies in Mathematics*, v. 68, p. 99-111, 2008.
- NASCIMENTO, A. G. C., ESQUINCALHA, A. C. Construção de um GeoGebra Book para estudo de Cálculo e Análise. In: SEMINÁRIO DE PESQUISA “DESENVOLVIMENTO CURRICULAR, FORMAÇÃO DE PROFESSORES E TECNOLOGIAS EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA”, 1, 2017, Santo Antônio de Pádua, RJ. *Anais...* Santo Antônio de Pádua: PROPPI/UFF, p. 52-56, 2017.
- OTERO-GARCIA, S. C. *Uma Trajetória da Disciplina de Análise e um Estado do Conhecimento sobre seu Ensino*. 2011. 500 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Rio Claro, 2011.
- OTERO-GARCIA, S. C.; BARONI, R. L. S.; MARTINES, P. T. Uma trajetória da disciplina de Análise e o seu papel a formação do professor de matemática. *Educação Matemática Pesquisa*, São Paulo, v. 15, n. 3, p. 692-717, 2013.
- PAULIN, J. F. V; RIBEIRO, A. J. Ensino e Aprendizagem do Teorema Fundamental do Cálculo: algumas reflexões a partir de uma revisão sistemática de literatura. *Educação Matemática Pesquisa*, São Paulo, v. 21, n. 2, p. 239-263, 2019.
- PICONE, D. F. B. *Os registros de representação semiótica mobilizados por professores no ensino do teorema fundamental do cálculo*. 2007, 126 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2007.
- ROQUE, T. *História da Matemática: uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas*. Rio de Janeiro: Zahar, 3ª reimpressão, 2015.