http://dx.doi.org/10.23925/2237-9657.2020.v9i2p103-119

Estudo das funções trigonométricas com o uso do software GeoGebra: uma experiência com calouros do curso de engenharia elétrica

Study of the trigonometric functions with the use of GeoGebra software: an experience with freshmen of the course of electrical engineering

LÚCIA HELENA COSTA BRAZ[1]

GUSTAVO TEIXEIRA DE CASTRO[2]

SUÉLEM COSTA BRAZ[3]

RESUMO

O presente trabalho tem o objetivo de apresentar resultados obtidos em uma experiência que envolveu o uso de tecnologias no ensino de Matemática em uma turma de calouros do curso de Engenharia Elétrica. A partir da literatura consultada, considera-se que a inserção das tecnologias no ambiente de ensino pode possibilitar que os alunos construam seus próprios conhecimentos e assumam um papel ativo nesta construção. Buscando ilustrar sua utilização e benefícios em sala de aula, foi desenvolvida uma atividade que fez uso do software GeoGebra e cujo objetivo principal foi estudar as funções trigonométricas e suas propriedades. Os resultados mostraram que o uso do software GeoGebra contribuiu para a compreensão dos conceitos envolvidos, para o desenvolvimento da capacidade de análise e argumentação, para a socialização e colaboração dos discentes durante o desenvolvimento da atividade, para a motivação para o estudo e para a inserção dos estudantes em um ambiente de ensino com uso de tecnologias.

Palavras-chave: *funções trigonométricas; GeoGebra; engenharia elétrica.*

ABSTRACT

The present work has the objective to present results obtained in an experiment that involved the use of technologies in the teaching of Mathematics in a group of freshmen of the course of Electrical Engineering. From the literature consulted, it is considered that the insertion of the technologies in the teaching environment can enable students to build their own knowledge and take an active role in this construction. To illustrate its use and benefits in the classroom, an activity was developed that made use of GeoGebra software and whose main objective was to study the trigonometric functions and their properties. The results showed that the use of the GeoGebra software contributed to the understanding of the concepts involved, to the development of the analysis and argumentation capacity, to the students' socialization and collaboration during the development of the activity, the motivation for the study and the insertion of students in an environment of teaching using technologies.

Keywords: *trigonometric functions; GeoGebra; electrical engineering.*

[1] Docente do Instituto Federal de Minas Gerais (IFMG), *Campus* Formiga – lucia.helena@ifmg.edu.br.
[2] Licenciado em Matemática pelo Instituto Federal de Minas Gerais, *Campus* Formiga - gustavo.teixeira@ufv.br
[3] Licenciada em Matemática pelo Instituto Federal de Minas Gerais, *Campus* Formiga – suelemcostabe@hotmail.com

Introdução

Os diversos sistemas nacionais de avaliação de ensino que o Brasil possui, como o Sistema Nacional de Avaliação da Educação Básica (SAEB), o Exame Nacional de Cursos (ENC) e o Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM) trazem resultados que apontam para dificuldades em conteúdos básicos da disciplina Matemática em alunos e, segundo Ferreira e Brumatti (2009), estas permanecem nos cursos superiores.

Sobre os cursos de engenharia, as orientações curriculares oficiais apontam que a formação destes profissionais deve ter por objetivo desenvolver competências e habilidades específicas como "aplicar conhecimentos matemáticos, científicos, tecnológicos e instrumentais à engenharia" (MEC, 2002, p. 1). No entanto, as disciplinas destes cursos que envolvem matemática são apontadas como as grandes responsáveis pela apreensão nos alunos, provocando elevado índice de reprovação e, até mesmo, evasões dos cursos (FERREIRA; BRUMATTI, 2009).

Nesse sentido, Pinho (2016) afirma que "Professores de engenharia conhecem o fenômeno, que se repete ano a ano em diversas faculdades do país. Em fevereiro, as aulas começam cheias. Em abril, quando saem as primeiras notas, começa a debandada". A autora ainda destaca que os cursos de exatas são os que lideram o ranking de evasão no primeiro ano de curso no ensino superior.

Rodrigo Capelato, diretor-executivo do Sindicato das Mantenedoras de Ensino Superior (Semesp), aponta a deficiência na formação básica de matemática como uma das particularidades dos cursos de exatas que contribuem para a evasão (PINHO, 2016).

Enquanto professora[4] da disciplina Cálculo Diferencial e Integral I no semestre 2017/2 em uma instituição pública na cidade de Formiga (MG), foi muito frequente ouvir os alunos do curso de Engenharia Elétrica fazerem diversos questionamentos de matemática básica, em especial, relacionados à trigonometria. Por várias vezes, quando encerrava a aula, eu ficava com um pequeno grupo de alunos discutindo exercícios que envolviam trigonometria.

Em uma aula de resolução de exercícios, um aluno chegou até mim e disse "*Professora, me explica qual é o cosseno de 0º, 90º, 180º, 270º e 360º, porque o seno eu sei*". Intrigada com o fato de ele saber o valor do seno destes ângulos e não saber o cosseno, o sugeri "*Me explique, você, o porquê dos valores do seno destes ângulos! Deixe-me entender o que você sabe a respeito do seno para que eu possa lhe explicar o cosseno*". E tive uma resposta muito inesperada: *"O seno, eu decorei"*. Ou seja, o aluno decorou os valores dos senos sem ter compreendido o conteúdo.

Corroborando o fato ocorrido, Micotti (1999, p. 157) afirma que "a memorização pode ocorrer sem compreensão. A falta de compreensão pode chegar a ponto de impedir que a

[4] Neste e no próximo parágrafo será usada a 1ª pessoa do singular por se tratar de uma experiência pessoal da professora orientadora deste trabalho.

informação tenha algum significado para o aluno e de comprometer sua transformação em conhecimento".

O diálogo citado, as dúvidas apontadas ao longo do semestre 2017/2, além dos mais de cinco anos de experiência trabalhando com as disciplinas de Cálculo, me fizeram[5] refletir e sentir a necessidade de desenvolver atividades com os alunos ingressantes do curso de Engenharia Elétrica que envolvessem conteúdos de Matemática da Educação Básica, em especial, conteúdos relacionados à trigonometria.

O objetivo deste trabalho é, a partir da literatura sobre o uso de tecnologias no ensino de Matemática, relatar e refletir sobre uma experiência com o uso do *software* GeoGebra ao utilizá-lo em um minicurso ofertado para uma turma de alunos que iniciaram o curso de Engenharia Elétrica no primeiro semestre de 2018[6], em uma instituição pública da cidade de Formiga (MG).

O objetivo principal das atividades era estudar as funções trigonométricas e suas propriedades fazendo uso do *software* GeoGebra. Optou-se por utilizar as tecnologias por acreditar que estas poderiam despertar a motivação nos alunos e, então, desta forma, favorecer a aprendizagem, pressupondo que "o aprendiz manifeste uma disposição de relacionar um novo material de maneira substantiva e não arbitrária a sua estrutura cognitiva" (MOREIRA; MASSINI, 2011, p. 23).

1. A utilização das tecnologias no ensino de Matemática

São constantes as discussões na literatura acerca do uso das tecnologias na educação. Pesquisas apontam as contribuições do uso desse recurso no processo de ensino e aprendizagem de Matemática. Entre esses estudos, mencionamos os desenvolvidos por Zulatto (2002) e Borba e Penteado (2016).

Zulatto (2002) afirma que a utilização das tecnologias informáticas em atividades do dia-a-dia tem crescido de forma acelerada em toda sociedade e, em particular, nas instituições de ensino. Aponta que várias escolas do ensino básico já possuem uma sala de informática e, este fato, associado a diversas ações que as próprias escolas têm promovido, tem contribuído para mudanças no cenário da educação. A autora chama a atenção para a importância do bom planejamento de atividades que envolvam o uso de tecnologias, afirmando que "é preciso atentar para o fato de que a qualidade de sua utilização depende muito da forma como as propostas são interpretadas e colocadas em prática pelos professores" (ZULATTO, 2002, p. 8).

[5] Neste parágrafo também foi usada a 1ª pessoa do singular por dar continuidade ao relato da experiência pessoal da professora orientadora deste artigo.
[6] Esta atividade foi desenvolvida durante os Cursos de Verão ofertados pela instituição em fevereiro de 2018. Os alunos envolvidos eram calouros do curso de Engenharia Elétrica, cujas aulas regulares tiveram início em março de 2018.

Neste sentido, Borba e Penteado (2016) apontam que é importante que os professores se sintam preparados e à vontade para inserir as tecnologias em suas aulas, pois, caso contrário, o que pode ocorrer é apenas uma “troca” de mídias, onde o lápis e o papel darão lugar ao computador, mas este funcionará apenas como um caderno eletrônico, não havendo mudança e/ou reorganização na maneira tradicional de conduzir a aula.

Os autores sugerem que “[...] a escolha de propostas pedagógicas que enfatizem a experimentação, visualização, simulação [...]” (BORBA; PENTEADO, 2016, p. 88), que são algumas das características das atividades investigativas (PONTE; BROCARDO; OLIVEIRA, 2009), podem contribuir para evitar que ocorram apenas aulas expositivas seguidas de exemplos no computador (BORBA; PENTEADO, 2016) e, então, desta forma, os docentes podem gerar um ambiente propício à aprendizagem e à investigação.

Ainda acerca do planejamento para inserção das tecnologias nas aulas, Santos e Santos (2017) acreditam que o professor assume um ‘novo’ papel neste ambiente, acreditando que este seja fundamental para o bom desenvolvimento da proposta. Os autores afirmam que os professores “atuam como mediadores na construção do conhecimento” (SANTOS; SANTOS, 2017, p. 458).

Sobre o comportamento dos alunos em aulas que envolvem uso de tecnologias, Borba e Penteado (2016) apontam que, num primeiro momento, a motivação dos discentes é notória. Os autores acreditam que muitos defendem a inserção das tecnologias nas salas de aula por acreditarem que esta traz motivação para o processo de aprendizagem.

1.1. O software GeoGebra e um ensino dinâmico e investigativo das funções trigonométricas

Rezende, Pesco e Bortolossi (2012, p. 77) apontam que “*Softwares* de geometria dinâmica estão na ordem do dia da prática docente dos professores de matemática da educação básica”. Os autores afirmam que várias são as alegações para utilização desses *softwares*, em especial, defendem sua utilização no ensino de funções reais.

> Experimentar, criar estratégias, fazer conjecturas, argumentar e deduzir propriedades matemáticas são, em verdade, ações desejáveis no ensino de matemática em qualquer domínio de conhecimento e nível de ensino. Nesse sentido, essas ferramentas computacionais são bem-vindas no ensino das funções reais. Em particular, o *software GeoGebra*, com excelente interface dinâmica entre os sistemas algébrico e geométrico de representações, se apresenta como uma poderosa ferramenta para o estudo do comportamento variacional das funções reais. (REZENDE; PESCO; BORTOLOSSI, 2012, p.78)

A expressão “Geometria Dinâmica” está relacionada ao computador, pois faz referência aos *softwares* que propiciam ambientes nos quais é possível construir figuras que podem ser arrastadas pela tela, mantendo os vínculos estabelecidos nas construções

(ZULATTO, 2002). A figura 1 é um exemplo, onde o vértice B do triângulo retângulo ABC foi movimentado, mantendo-se a medida da hipotenusa, AB, que corresponde ao raio do ciclo trigonométrico, e mantendo-se o ângulo de 90º no vértice C.

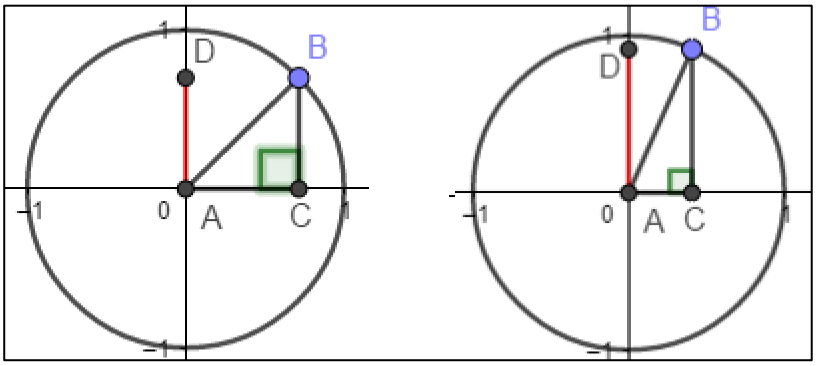


Figura 1: Triângulo ACB antes e depois de arrastar o vértice B
Fonte: Imagem do GeoGebra gerada pelos autores.

Este movimento de arrastar possibilita, aos alunos, analisar os diversos resultados gerados por estes movimentos, colocando-os, desta forma, no papel de investigadores, a observar as variações ocasionadas.

> [...] o aluno pode formular suas próprias conjecturas e tentar verificar se elas são válidas. Ou seja, o próprio aluno irá realizar a verificação e validação da conjectura que formulou. Isso é possível devido aos recursos dos softwares, como o arrastar, que possibilita a simulação de diferentes casos da figura, como se o aluno estivesse verificando "todos" os casos possíveis de uma mesma família de configuração (ZULATTO, 2002, p. 20).

Nesse sentido, podemos apontar que atividades matemáticas desenvolvidas com *softwares* de geometria dinâmica (GD) geram um ambiente de investigação matemática em sala de aula (BORBA; SILVA; GADANIDIS, 2016), uma vez que explorar, formular hipóteses, conjecturar e testar são algumas características das atividades investigativas (PONTE; BROCARDO; OLIVEIRA, 2009).

Criar *ambientes de investigação com tecnologias* pode favorecer o entendimento dos conceitos envolvidos nas aulas, uma vez que os discentes ficam mais comprometidos com as atividades. "Em numerosas experiências já empreendidas com trabalho investigativo, os alunos têm mostrado realizar aprendizagens de grande alcance e desenvolver um grande entusiasmo pela Matemática" (PONTE; BROCARDO; OLIVEIRA, 2009, p. 10). Os autores afirmam que o envolvimento dos alunos nesse tipo de atividade "tende a favorecer o seu envolvimento na aprendizagem (PONTE; BROCARDO; OLIVEIRA, 2009, p.23).

Corroborando as ideias de Ponte, Brocardo e Oliveira (2009), Borba, Silva e Gadanidis (2016) apontam que o GeoGebra é um *software* que promove integração entre geometria dinâmica e múltiplas representações de funções, além de proporcionar cenários de investigação matemática. Nele, as funções podem ser definidas e estudadas em termos de parâmetros e, estes, por sua vez, fazendo uso da ferramenta *controle deslizante*, podem sofrer alterações dinamicamente (REZENDE; PESCO; BORTOLOSSI, 2012).

Sobre o GeoGebra, Lieban e Müller (2012, p. 49) comentam que "através de atividades com o GeoGebra, podemos criar um ambiente propício a aprendizagem da matemática". No entanto, de acordo com Baldini e Cyrino (2012, p. CLXII-CLXIII), "o computador ou a utilização do GeoGebra por si só, não garante o sucesso dos processos de ensino e de aprendizagem". Existem outros aspectos importantes a serem levados em consideração quando se fala do uso de tecnologias como, por exemplo, o papel do professor (BORBA; SILVA; GADANIDIS, 2016).

Em atividades investigativas, Ponte, Brocardo e Oliveira (2009) apontam que o professor deve "navegar" entre dois polos. Por um lado, o docente deve propiciar aos discentes, "a autonomia que é necessária para não comprometer a sua autoria na investigação e, por outro lado, garantir que o trabalho dos alunos vá fluindo e seja significativo do ponto de vista da disciplina de Matemática" (PONTE; BROCARDO; OLIVEIRA, 2009, p. 47). E ainda, é importante que seja reservado um momento para socialização dos resultados obtidos, pois é nesse momento que as conjecturas levantadas serão debatidas (BORBA; PENTEADO, 2016).

Com o intuito de estudar as funções trigonométricas e suas propriedades com uma abordagem didática baseada na investigação matemática e fazendo uso das tecnologias, optamos pela elaboração de atividades que fazem uso do *software* de geometria dinâmica GeoGebra.

A escolha do tema a ser investigado, funções trigonométricas, se justifica por este ser apontado como de grande dificuldade de compreensão por parte dos alunos do Ensino Médio (DIONÍZIO; BRANDT, 2011) e também por ser de grande importância para o estudo da disciplina Cálculo Diferencial e Integral I, cujos envolvidos iriam cursar logo no primeiro semestre do curso de Engenharia Elétrica.

2. Descrição da experiência

A atividade foi desenvolvida no turno matutino nos dias 26, 27 e 28 de fevereiro de 2018 no Laboratório de Informática 1 do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Minas Gerais (IFMG) - *campus* Formiga, durante os Cursos de Verão ofertados pela instituição e contou com uma carga horária total de 12 horas. Os envolvidos foram 24[7] alunos ingressantes no curso de Engenharia Elétrica no ano de 2018 cuja faixa etária variava de 17 a 36 anos.

[7] Para preservar a identidade dos alunos, a referência aos mesmos, no texto, se dará por aluno 1, aluno 2, ..., aluno 24.

Dentre os participantes, 21 haviam concluído o Ensino Médio em 2017, sendo que, destes, nove haviam feito o Ensino Médio Integrado ao Curso Técnico em Eletrotécnica no IFMG *campus* Formiga, e os demais, 3, concluíram o Ensino Médio há mais de dez anos. Sobre o GeoGebra, apenas os alunos que cursaram o Ensino Médio no *campus* Formiga já conheciam o *software* e já haviam participado de aulas de Matemática com o uso do mesmo.

Identificar o perfil dos participantes e saber sobre seus conhecimentos acerca do *software* que utilizaríamos na atividade foi muito importante para o planejamento, pois, antes de trabalhar o conteúdo de funções trigonométricas no GeoGebra, propomos um momento de apresentação do *software*, para que os alunos pudessem se familiarizar com o programa. Os que já conheciam o *software* auxiliaram os colegas neste primeiro momento.

Neste primeiro contato com o GeoGebra, identificamos o nome dos botões, suas funções e janelas. Em seguida, inserimos pontos, retas, paralelas, triângulos, círculos; alteramos cor, estilo, formato, nome e, por fim, buscando melhor compreensão das funcionalidades do *software*, os alunos ficaram livres para fazerem quaisquer construções.

Já neste primeiro momento, foi possível perceber o envolvimento e a motivação dos alunos com o trabalho no Laboratório de Informática (BORBA; PENTEADO, 2016), em especial daqueles que estavam tendo uma aula de Matemática com *software* pela primeira vez.

2.1. Desenvolvimento da atividade

Conhecidas algumas funcionalidades básicas do *software*, passamos, para o desenvolvimento das atividades que tinha por objetivo estudar as funções trigonométricas no que se refere a definição, domínio, conjunto imagem, sinal nos quadrantes, crescimento e decrescimento, representação gráfica no plano cartesiano e período, fazendo uso do *software* GeoGebra.

Inicialmente, antes de introduzirmos o estudo das funções trigonométricas, revisamos as relações trigonométricas seno, cosseno e tangente no triângulo retângulo. Para esta etapa, utilizamos a atividade *online Razões trigonométricas no triângulo retângulo*[8] e solicitamos aos alunos que respondessem a atividade que segue abaixo.

Atividade 1 – Razões trigonométricas no triângulo retângulo
01) Movimente o controle deslizante b, observe e anote o que acontece, quando se fixa um ângulo α: **a)** Com os valores de a, b e c; **b)** E com as razões $\frac{a}{c}, \frac{b}{c}, \frac{a}{b}$? Por que isto acontece?
02) Agora altere o valor de α, movimentando seu controle deslizante e, novamente, observe o que acontece com as razões $\frac{a}{c}, \frac{b}{c}, \frac{a}{b}$ ao movimentar o controle deslizante b.

[8] Disponível em: https://www.geogebra.org/m/M5NMgq6q

No segundo dia, iniciamos com a construção[9] da função seno e seu gráfico no *software* GeoGebra. Durante essa construção, relembramos a definição de ciclo trigonométrico e reforçamos que se o ponto P está associado ao número real x, então P é a imagem de x no ciclo. Após a construção, passamos para a investigação da função seno. Nesta parte, buscando a familiarização dos alunos com a construção que havíamos acabado de fazer e, também no intuito de direcioná-los para as próximas investigações, fizemos o estudo da função seno em conjunto – alunos e pesquisadores.

Acompanhar os alunos nas primeiras investigações está em consonância com o que sugerem Ponte, Brocardo, Oliveira (2009) acerca do papel do professor em atividades investigativas – assegurar a autonomia na investigação por parte dos alunos, mas orientando para que o trabalho flua matematicamente.

Movimentamos o ponto P sobre o ciclo trigonométrico e/ou analisamos o gráfico da função seno construído na janela 2 para estudarmos sinal, crescimento e decrescimento, período, domínio e conjunto imagem da função seno.

Passamos em seguida, para o estudo da função cosseno, cuja construção[10] no GeoGebra foi disponibilizada pronta para os alunos e, para melhor organização das conjecturas a serem socializadas posteriormente e avaliação da atividade, solicitamos que eles anotassem suas considerações e respondessem aos questionamentos abaixo.

Atividade 2 – Estudo da função cosseno

01) Analisando o gráfico da função cosseno na janela 2 e/ou movimentando o ponto P sobre o ciclo trigonométrico:

a) Determine o sinal da função cosseno em cada um dos quadrantes do ciclo trigonométrico.

b) Os valores da função cosseno são limitados? Em caso afirmativo, por qual intervalo?

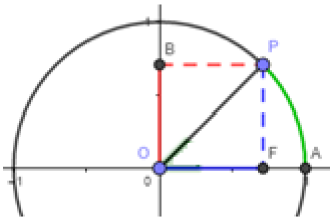
c) Determine em quais quadrantes a função cosseno é crescente e em quais quadrantes ela é decrescente?

d) Determine o período da função cosseno.

e) Qual o domínio da função cosseno?

f) Qual o conjunto imagem da função cosseno?

02) Das definições de seno e cosseno no ciclo trigonométrico, podemos afirmar que, se um ponto P é imagem de um número real α no círculo trigonométrico, então ele tem coordenadas $P(x,y) = P(cos\alpha, sen\alpha)$. Utilizando o Teorema de Pitágoras, as coordenadas do ponto P e o ciclo trigonométrico, mostre que $sen^2\alpha + cos^2\alpha = 1$ (relação fundamental da trigonometria).



[9] Disponível em: https://www.geogebra.org/classic/pyqctaz5
[10] Disponível em: https://www.geogebra.org/classic/mveewpym

Durante o estudo da função cosseno, ouvimos, entre as duplas, alguns diálogos.

Aluno 20 (em dupla com o aluno 18) – Olha! A função cosseno é muito parecida com a função seno.

Aluno 18 – É mesmo! A função seno está no eixo y e a função cosseno está no eixo x.

Aluno 20 – Então acho que o estudo das duas vai ser muito semelhante.

Aluno 18 – Acho que vai. Por exemplo, o cosseno também varia de -1 a 1, pois também "está dentro do círculo". E o sinal?

Aluno 20 – Vamos verificar, mas como o cosseno está no eixo y, penso que deve seguir o sinal deste eixo.

Aluno 18 – É mesmo! Confirmado. Positivo nos 1º e 2º quadrantes e negativo nos demais.

Feito o estudo da função cosseno, iniciamos a construção[11] da função tangente e seu gráfico no GeoGebra. E, novamente, pedimos aos alunos que anotassem suas considerações em uma folha, além de responder às perguntas abaixo.

Atividade 3 – Estudo da função tangente

01) Analisando o gráfico da tangente na janela 2 e/ou movimentando o ponto *P* sobre o ciclo trigonométrico:

a) Determine o sinal da função tangente em cada um dos quadrantes do ciclo trigonométrico;

b) Determine em quais quadrantes a função tangente é crescente e em quais quadrantes ela é decrescente?

c) Determine o período da função tangente;

d) Os valores da função tangente são limitados? Em caso afirmativo, por qual intervalo?

e) O que você observa com os valores da tangente quando o valor de x se aproxima de ${}^{\pi}/_{2}$?

f) E quando x se aproxima do valor ${}^{3\pi}/_{2}$?

02) Analisando o gráfico da função tangente na janela 2:

a) Preencha os dados da tabela abaixo:

x	0 rad	$\frac{\pi}{2} rad$	$\pi\, rad$	$\frac{3\pi}{2} rad$	$2\pi\, rad$
Tangente					

b) Justifique as respostas que apresentou para a tangente de ${}^{\pi}/_{2}$ e ${}^{3\pi}/_{2}$.

c) O que você observou para os valores ${}^{\pi}/_{2}$ e ${}^{3\pi}/_{2}$ no item *b)* acima é válido para outros ângulos? Em caso afirmativo, cite exemplos.

03) Determine o domínio e o conjunto imagem da função tangente.

Notamos, durante as movimentações no ponto P, feitas pelos alunos, para o estudo da função tangente, alguns questionamentos entre eles:

Aluno 12 – Olha a tangente quando o x assume um valor perto de ${}^{\pi}/_{2}$*!*

[11] Disponível em: https://www.geogebra.org/m/vkkcctep

Aluno 4 – Na janela de álgebra aparece indefinido. Por que será que isso acontece?

Aluno 12 – Não sei. Vamos movimentar mais...

Aluno 4 – E no gráfico o valor da tangente vai ficando cada vez maior.

Um aluno da dupla ao lado, ao perceber a discussão, disse:

Aluno 7: Não tem tangente quando x vale $\pi/2$.

Aluno 12 – Mas por quê?

Aluno 7 – Porque nesse valor, a reta OP não vai tocar na reta da tangente, pois elas ficarão paralelas.

Os alunos 4 e 12 movimentaram mais um pouco o ponto *P* e concluíram:

Aluno 12 – Verdade, porque não vai existir o ponto G, que é o cruzamento da reta OP com o eixo das tangentes.

Aluno 7 – Isso!

Para finalizar o estudo das funções trigonométricas, apresentamos as definições das funções cotangente, secante e cossecante, cujas construções no GeoGebra também foram disponibilizadas prontas[12] para os alunos.

Algumas construções – as que envolviam o estudo das funções trigonométricas seno e tangente – foram todas feitas passo a passo com os alunos, tanto para que os mesmos pudessem ir se familiarizando com o *software* GeoGebra quanto para que eles pudessem ir observando e relembrando conceitos matemáticos utilizados ao longo das construções e as próprias definições das funções. Já as outras investigações – funções cosseno, cotangente, secante e cossecante – foram feitas a partir de construções previamente feitas no GeoGebra, pelos autores, e disponibilizadas antecipadamente nos computadores.

Esta forma de organizar as atividades está em consonância com o que aponta Zulatto (2002, p.21): “Em uma, os próprios alunos fazem a construção das figuras[...]. Numa segunda abordagem, os alunos recebem as figuras prontas, também conhecidas como “caixa preta”, construídas pelos professores [...]”

A fim de direcionar as discussões posteriores acerca das investigações das funções cotangente, secante e cossecante, pedimos aos alunos que anotassem todas as suas observações, além de responderem à pergunta seguinte.

Atividade 4 – Estudo das funções cotangente, secante e cossecante

01) Analisando os gráficos das funções cotangente, secante e cossecante na janela 2 e/ou movimentando o ponto *P* sobre o ciclo trigonométrico, anote suas conjecturas, para cada uma destas funções, acerca de:

sinal nos quadrantes; crescimento e decrescimento; período; domínio; imagem.

[12] Disponível em: https://www.geogebra.org/m/b3ccfrzp

3. Socialização das conjecturas levantadas pelos alunos

O último dia de atividades foi destinado à socialização das conjecturas levantadas pelas duplas, conforme sugerem Borba e Penteado (2016) para atividades de investigação, além da aplicação de um questionário que buscava coletar informações e opiniões sobre as atividades desenvolvidas no Laboratório de Informática.

Esta socialização também tinha por objetivo avaliar a proposta desenvolvida.

> A observação informal dos alunos durante a realização da tarefa e na fase de apresentação das suas conclusões à turma é uma forma natural de avaliá-los quando eles trabalham numa investigação. [...] Outra forma de avaliação são as apresentações orais que se fazem no culminar de uma atividade de investigação, quando os alunos dão a conhecer ao professor e aos seus colegas o trabalho por si previamente realizado. Uma apresentação oral constitui uma situação de avaliação e, também, de aprendizagem, favorecendo o desenvolvimento da capacidade de comunicação e de argumentação (PONTE; BROCARDO; OLIVEIRA, 2009, p. 124-125).

Desta forma, o objetivo era que as duplas apresentassem, para toda a turma, as conjecturas levantadas e as debatessem. Esta atividade foi desenvolvida oralmente, fazendo uso do quadro branco, de pincel, Datashow e do *software* GeoGebra.

Iniciamos as discussões pela atividade que tinha o objetivo de rever as *Razões trigonométricas no triângulo retângulo*. Todas as duplas afirmaram que, ao movimentar o controle deslizante *b*, os valores de *a*, *b* e *c* alteravam e as razões $^a/_c$, $^b/_c$, $^a/_b$ permaneciam as mesmas. Apenas duas duplas apresentaram justificativas para o fato de as razões permanecerem constantes, afirmando que isto acontecia porque o ângulo não estava variando.

Em sua pesquisa, Pereira e Guerra (2016) acreditam que o fato de os alunos não apresentarem justificativas para o porquê de as razões permanecerem constantes, se deva "provavelmente por não entenderem o conceito de triângulos semelhantes" (PEREIRA; GUERRA, 2016, p. 65).

Após apresentação dos alunos, esclarecemos o porquê de as razões não mudarem quando se fixa o ângulo e, em seguida, iniciamos as apresentações acerca da função cosseno, cujas principais conjecturas apresentadas pelas duplas foram: 1) é positiva no 1º e no 4º quadrantes, e negativa nos demais; 2) possui valores limitados entre -1 e 1; 3) é crescente no 1º e no 2º quadrantes; 4) seu período é 2π.

Após as apresentações das duplas, levantamos alguns questionamentos: 1) Sobre o domínio da função cosseno, o que podemos dizer? E sobre o conjunto imagem? 2) Alguma dupla resolveu a questão 2? Poderia nos explicar como?

Sobre o questionamento 1, uma dupla apresentou resposta incorreta, afirmando que o domínio da função cosseno é 2π, e três duplas afirmaram, erroneamente, que o conjunto imagem é o conjunto dos números reais. Dionízio e Brandt (2011, p. 4420) acreditam que uma das “dificuldades dos alunos do Ensino Médio em trigonometria, está na falta de conceitualização dos objetos matemáticos”, o que pôde ser constatado nos erros acima.

Os alunos apresentaram conjecturas corretas acerca dos valores que limitam a função cosseno, mas não entenderam que estes valores determinam a imagem da função, ou seja, não sabiam o conceito de conjunto imagem de uma função. Pedimos a uma das oito duplas que acertaram as respostas para mostrarem na construção do GeoGebra, o domínio e a imagem da função cosseno, a fim de corrigir os erros citados acima.

Sobre a questão 2, apenas duas duplas manifestaram tê-la feito e, então, uma destas apresentou sua resolução, que segue na imagem abaixo.

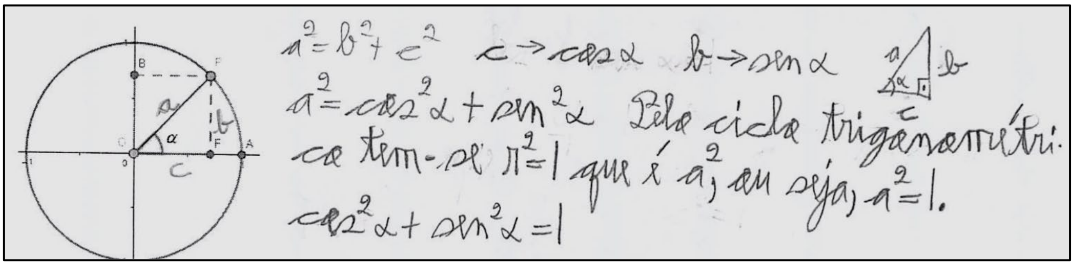


Figura 4: Registro do aluno 6 na questão 2 atividade 2
Fonte: Imagem digitalizada pelos autores.

Finalizadas as apresentações acerca da função cosseno, passamos para a socialização das conjecturas acerca da função tangente, cujas principais apresentadas foram: 1) é crescente em todos os quadrantes; 2) é positiva no 1º e no 3º quadrantes, e negativa nos demais; 3) não possui valores limitados; 4) quanto mais perto de $\pi/2$, maior fica o valor da tangente. O mesmo ocorre quando o ângulo se aproxima de $3\pi/2$, no entanto, com a tangente negativa; 5) o valor da tangente para x igual a 0, π ou 2π é 0, e para $\pi/2$ e $3\pi/2$ não existe.

Após as apresentações das duplas, novamente levantamos alguns questionamentos: 1) O que observaram a respeito do período da função tangente? 2) Sobre o domínio da função tangente, o que podemos dizer? E sobre o conjunto imagem? 3) Por que vocês acham que não existe a tangente de $\pi/2$?

Sobre o questionamento 1, duas duplas disseram, erroneamente, que o período da função tangente é infinito e as demais afirmaram, equivocadamente, que o período é 2π. Estas respostas nos remetem, novamente, à falta de conceitualização dos objetos matemáticos em trigonometria (DIONÍZIO; BRANDT, 2011), pois, anteriormente, haviam apontado corretamente que o período da função cosseno era 2π, mas entendemos que eles não compreenderam o conceito de período, pois podem ter considerado o mesmo período da função seno para determinarem o da função cosseno e, quando estudaram a função tangente, demostraram não terem entendido este conceito. Ou seja, o erro pode estar ligado à simples repetição das respostas apresentadas nas discussões anteriores (PEREIRA; GUERRA, 2016).

A dificuldade de conceitualização dos objetos matemáticos em trigonometria (DIONÍZIO; BRANDT, 2011) pode ser observado, novamente, na determinação do domínio e do conjunto imagem da função tangente, pois somente quatro duplas deram as respostas corretas: domínio = $\{\mathbb{R} - (\pi/_2 + k\pi), k \in \mathbb{Z}\}$ e imagem = $\mathbb{R}$, as demais duplas não souberam responder e haviam deixado esta questão em branco na folha de registros.

Sobre o questionamento 3, nove duplas apresentaram respostas corretas acerca de o porquê não existir a tangente de $\pi/_2$. Destacamos o registro abaixo.

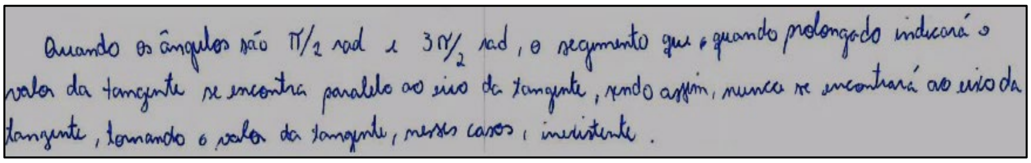


Figura 5: Registro do aluno 22 na questão 3, atividade 3
Fonte: Imagem digitalizada pelos autores.

As demais duplas apenas disseram que o valor da tangente aparece como *indefinido* na janela de álgebra. Neste caso, apesar da orientação de analisarem tanto a janela de álgebra quando as janelas 1 (círculo trigonométrico) e 2 (gráfico das funções) e, ainda, termos comentado que o *software* tem limitações na apresentação (visualização) na janela de álgebra e que para isso é preciso mover, ampliar, reduzir e analisar as demais janelas, entendemos que estas duplas acabaram ficando presas apenas aos dados da janela de álgebra.

Para finalizar as discussões, passamos para as apresentações acerca das funções cotangente, secante e cossecante, onde discutimos sinal, crescimento e decrescimento, período, domínio e conjunto imagem.

As duplas não tiveram dificuldades em falar sobre o sinal e o crescimento destas funções e, como já havíamos discutido bastante os conceitos de período, domínio e conjunto imagem de funções, algumas duplas disseram que seus registros estavam errados, mas que sabiam explicar e mostrar no GeoGebra estes valores para as funções cotangente, secante e cossecante e, então, assim foi feito, ou seja, uma das duplas que havia dito que seus registros estavam errados, foi até a frente e explicou período, domínio e conjunto imagem das funções cotangente, secante e cossecante.

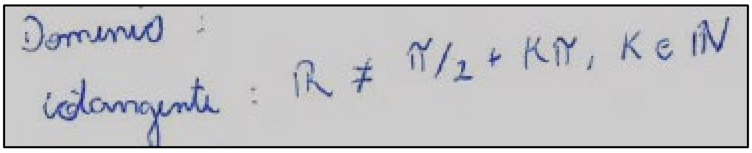


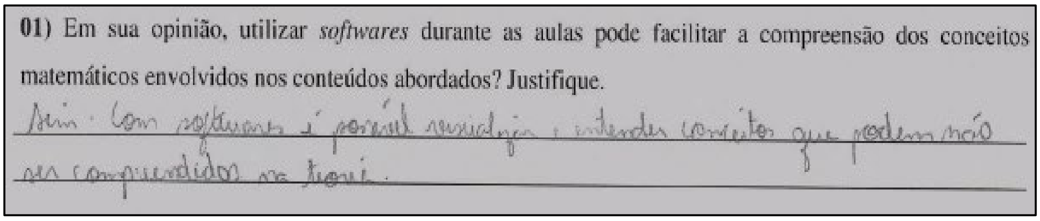
Figura 6: Registro errôneo do aluno 23 na atividade 4
Fonte: Imagem digitalizada pelos autores.

4. Avaliação da intervenção realizada

Consideramos que os registros feitos pelos alunos durante a realização da atividade, as respostas apresentadas por eles no questionário[13] e o momento de socialização das conjecturas nos permitem verificar se o objetivo principal da atividade – estudar as funções trigonométricas e suas propriedades – foi alcançado.

Percebemos, ao longo das apresentações, um amadurecimento dos alunos e compreensão de conceitos que antes não estavam bem formulados, o que pode ser comprovado através da fala das duplas sobre os registros errados de domínio, conjunto imagem e período, ou seja, durante a atividade houve a compreensão destes conceitos.

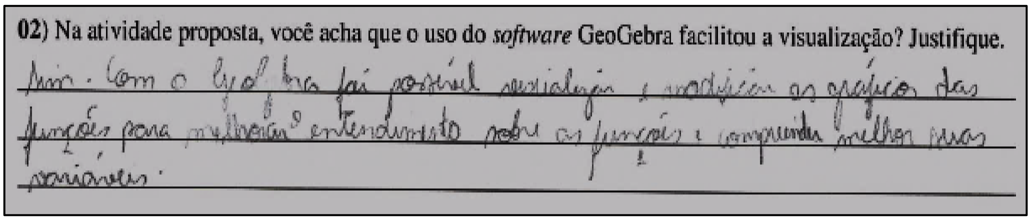
Acreditamos que o uso do *software* GeoGebra possa ter contribuído para esta compreensão, como se pode ver no relato abaixo.


01) Em sua opinião, utilizar *softwares* durante as aulas pode facilitar a compreensão dos conceitos matemáticos envolvidos nos conteúdos abordados? Justifique.

Sim. Com softwares é possível visualizar e entender conceitos que podem não ser compreendidos na teoria.

Figura 7: Resposta do aluno 7 à pergunta 1 do questionário final
Fonte: Imagem digitalizada pelos autores.

Este resultado pode ser um indício da necessidade de propor, em sala de aula, trabalhos que possibilitem a conceitualização dos objetos matemáticos presentes na trigonometria, conforme sugerem Dionízio e Brandt (2011). Os autores ainda apontam para "necessidade de uma mudança na maneira como o conteúdo de Trigonometria é apresentado aos alunos em sala de aula, para que haja a superação dos fracassos encontrados" (DIONÍZIO; BRANDT, 2011, p. 4420). Neste sentido, acreditamos que o uso das tecnologias possa ser uma alternativa. E o *software* GeoGebra tem se tornado uma opção muito utilizada no ensino, pois, além de permitir as diversas manipulações, facilita a visualização (BRAZ; CASTRO, 2017).


02) Na atividade proposta, você acha que o uso do *software* GeoGebra facilitou a visualização? Justifique.

Sim. Com o GeoGebra foi possível visualizar e modificar os gráficos das funções para melhorar o entendimento sobre as funções e compreender melhor suas variáveis.

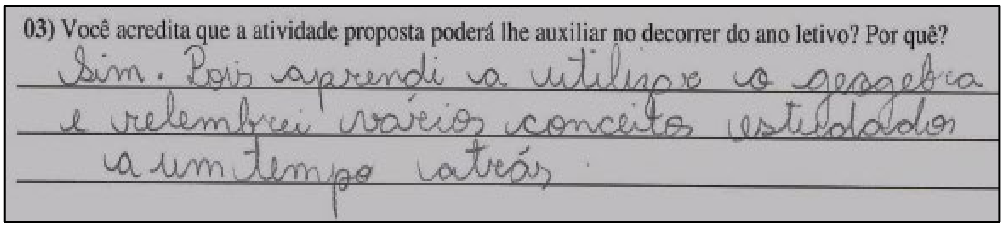
Figura 8: Resposta do aluno 20 à pergunta 3 do questionário final
Fonte: Imagem digitalizada pelos autores.

[13] Os critérios para a escolha das respostas apresentadas pelos discentes foram: a) Respostas com justificativas; b) Respostas que permitissem fazer conexão com o levantamento bibliográfico apresentado no relato de experiência; c) Coerência da resposta do discente à pergunta feita.

Durante as apresentações, percebemos dificuldades, em algumas duplas, de se expressarem oralmente. Nesse sentido, Braz e Castro (2018, p.17) acreditam que isso pode ser:

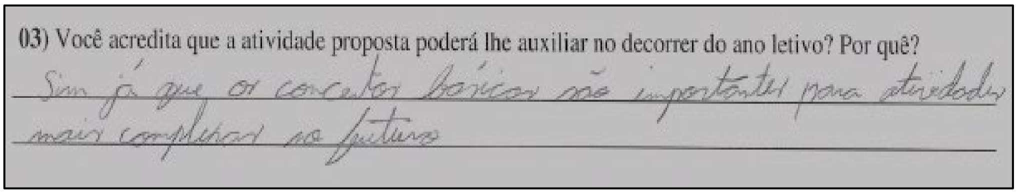
> (...) indício de uma falta de hábito dos alunos em escreverem e expressarem oralmente suas ideias, o que nos faz refletir sobre as aulas de Matemática, onde os discentes, normalmente, resolvem exercícios sem a necessidade de representar e/ou explicar, através de palavras, seus raciocínios.

Ao propor as investigações das funções trigonométricas, desejávamos poder contribuir com o estudo da disciplina Cálculo Diferencial e Integral I, cujos envolvidos iriam cursar logo no primeiro semestre do curso de Engenharia Elétrica. Neste sentido, questionamos os alunos se eles acreditavam que a proposta poderia lhes auxiliar ao longo do ano letivo. As imagens abaixo ilustram algumas respostas:


03) Você acredita que a atividade proposta poderá lhe auxiliar no decorrer do ano letivo? Por quê?

Sim. Pois aprendi a utilizar o geogebra e relembrei vários conceitos estudados a um tempo atrás.

Figura 9: Resposta do aluno 1 à pergunta 3 do questionário final
Fonte: Imagem digitalizada pelos autores.


03) Você acredita que a atividade proposta poderá lhe auxiliar no decorrer do ano letivo? Por quê?

Sim já que os conceitos básicos são importantes para atividades mais complexas no futuro

Figura 10: Resposta do aluno 12 à pergunta 3 do questionário final
Fonte: Imagem digitalizada pelos autores.

Enquanto docentes, acreditamos que as respostas apresentadas pelos alunos acerca da intervenção realizada e a análise feita dos registros e da socialização, nos incentiva a inserir as tecnologias no ensino de Matemática.

Considerações finais

Consideramos que o uso do *software* GeoGebra no estudo das funções trigonométricas gerou resultados satisfatórios. O objetivo principal da atividade – estudar as funções trigonométricas e suas propriedades fazendo uso do GeoGebra – foi alcançado.

Os questionários aplicados foram essenciais para a elaboração e a avaliação, por parte dos alunos, das atividades propostas. No primeiro questionário identificamos que a maioria dos participantes não conheciam o *software* GeoGebra e, então, reservamos um momento inicial para familiarização dos alunos com ele.

Já no segundo, ao serem questionados se *utilizar softwares durante as aulas pode facilitar a compreensão dos conceitos matemáticos envolvidos nos conteúdos abordados*, todos os alunos se manifestaram positivamente, inclusive os discentes que apresentaram dificuldades iniciais conceituais. Em relação a esse grupo de alunos, acreditamos que tal atitude se justifica pela oportunidade de tirar dúvidas com o colega e de poder visualizar as propriedades das funções nas construções feitas no GeoGebra. Um dos alunos respondeu, nesta pergunta: "*Sim, pois visualizando fica melhor para analisar, interpretar e compreender*."

Consideramos que os registros feitos pelos alunos durante a realização das atividades e o momento de socialização das conjecturas foram de extrema importância para que os pesquisadores pudessem analisar se o objetivo das atividades havia sido atingido. Como vimos, alguns alunos fizeram registros errados e, com as discussões oportunizadas pela socialização das conjecturas, foram compreendo melhor os conceitos e, então, percebendo que seus registros estavam incorretos. Também acreditamos que, com a socialização, proporcionamos um momento de possibilidade e melhoria da capacidade de argumentação e comunicação.

Os benefícios detectados com esta experiência instigam-nos a propor novas atividades que façam uso das tecnologias em sala de aula, sejam em atividades extraclasse, como a proposta neste relato, ou em futuras oportunidades no ofício de professores. Além disso, espera-se que este relato possa oportunizar discussões e reflexões acerca do uso das tecnologias no ensino de Matemática.

Referências

BALDINI, L. A. F.; CYRINO, M. C. C.T. Função seno - uma experiência com o software GeoGebra na formação de professores de Matemática. **Revista do Instituto GeoGebra Internacional de São Paulo. ISSN 2237-9657**, v. 1, n. 1, 2012.

BORBA, M.C.; PENTEADO, M.G. **Informática e Educação Matemática**. 5. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2016.

BORBA, M.C.; SILVA, R. S. R.; GADANIDIS, G. **Fases das tecnologias digitais em Educação**. Belo Horizonte: Autêntica, 2016.

BRAZ, L. H. C.; CASTRO, G. T. O uso do software GeoGebra no ensino das funções afim e quadrática: uma experiência com alunos do 2o ano do ensino médio. **ForScience:** revista científica do IFMG, Formiga, v. 6, n. 1, e00338, jan./jul. 2018.

DIONÍZIO, F.Q.; BRANDT, C. F. Análise das dificuldades apresentadas pelos alunos do ensino médio em trigonometria. In: CONGRESSO NACIONAL DE EDUCAÇÃO

(EDUCERE), X., 2011, Curitiba. Seminário Internacional de Representações Sociais, Subjetividade e Educação. **Anais...** Curitiba: PUCPR, 2011,14p. Disponível em: <http://educere.bruc.com.br/CD2011/ pdf/4728_2885.pdf >. Acesso em: 21 fev. 2017.

FERREIRA, D. H. L.; BRUMATTI, R. N. M. Dificuldades em matemática em um curso de engenharia elétrica. **Horizontes**, SL, v. 27, n. 1, p. 51-60, 2009.

LIENBAN. D. E.; MÜLLER, T. J. Construção de utilitários com o software GeoGebra: uma proposta de divulgação da geometria dinâmica entre professores e alunos. **Revista do Instituto GeoGebra Internacional de São Paulo**, v. 1, p. 37-50, 2012.

MEC. Conselho Nacional de Educação. Resolução CNE/CES 11 de 11 de março de 2002. **Diretrizes Curriculares Nacionais do Curso de Graduação em Engenharia**. Diário Oficial da União, Brasília, 9 de abril de 2002, seção 1, p. 32.

MICOTTI, M. C. O. O ensino e as propostas pedagógicas. In: BICUDO, Maria Aparecida Viggiani (Org.). **Pesquisa em educação matemática: concepções e perspectivas**. São Paulo: Editora UNESP, 1999, p. 153-167.

MOREIRA, A. M.; MASINI, E. F. S. **A aprendizagem significativa**: a teoria de David Ausubel. 2. ed. São Paulo: Centauro, 2011.

PEREIRA, E.; GUERRA, E. A. A utilização de applets no geogebra para a aprendizagem da trigonometria no ensino médio. Revista de Educação de Ciências e Matemática, v. 7, n. 3, p.53-72, 2016. Disponível em: <http://revistapos.cruzeirodosul.edu.br/index.php/rencima/article/view/1073/828>. Acesso em: 13 maio 2018.

PINHO, A. **Sem preparo e financiamento, 3 em 10 alunos largam cursos de exatas**. Folha de S. Paulo, São Paulo, 03 out. 2016. Disponível em: <http://www1.folha.uol.com.br/educacao/2016/10/1819158-sem-preparo-e-financiamento-3-em-10-alunos-largam-cursos-de-exatas.shtml>. Acesso em: 17 maio 2017.

PONTE, J. P.; BROCARDO, J.; OLIVEIRA, H. **Investigações matemáticas na sala de aula.** 2. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2016.

REZENDE, W. M.; PESCO, D. U.; BORTOLOSSI, H. J. Explorando aspectos dinâmicos no ensino de funções reais com recursos do geogebra. **Revista do Instituto GeoGebra Internacional de São Paulo**, v. 1, p. 74-89, 2012. Disponível em: <https://revistas.pucsp.br/index.php/IGISP/article/view/8370>. Acesso em: 18 mar. 2017.

ZULATTO, R. B. A.(2002). **Professores de matemática que utilizam softwares de geometria dinâmica:** suas características e perspectivas. 2002. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho, UNESP Rio Claro, SP, 2002.