ISSN 2177-9309

em teia
Revista de Educação Matemática e Tecnológica Iberoamericana

Universidade Federal de Pernambuco

Pós-Graduação em Educação Matemática e Tecnológica
EDUMATEC

RACIOCÍNIO INTUITIVO E EQUAÇÕES DE RECORRÊNCIA:

Um instrumento para o aprendizado de Indução Finita no Ensino Médio

Ednaldo Hermes da Silva
Mestre em Matemática
UNIVASF – Bahia – Brasil
ednaldo.silva@univasf.edu.br

Resumo

Este artigo apresenta uma metodologia de ensino de Indução Finita e tem como objetivo mostrar a existência de conteúdos que são prazerosos e revelam uma nova face da Matemática. O raciocínio intuitivo é a principal ferramenta empregada na abordagem desse conteúdo, o qual é desenvolvido por meio de analogias com fatos concretos, através de atividades intrinsecamente ligadas ao campo da experimentação e da participação ativa do educando no seu processo de formação, tornando esse processo mais significativo, e estimulando a formação de conjecturas a partir do trabalho com padrões. Esta proposta é ancorada na perspectiva da Engenharia Didática apresentada por Carneiro (2009).

Palavras-Chave: Intuição, Padrões. Conjectura, Sequências.

INTUITIVE THINKING AND RECURRENCE EQUATIONS:

An instrument for learning of Finite Induction in High School

Abstract

This article presents a methodology for teaching Finite Induction and aims to show the existence of contents that are pleasurable and that reveal a new face of mathematics. Intuitive reasoning is the main tool used to approach this content, which is developed through analogies with concrete facts, through activities intrinsically linked to the field of experimentation and the active participation of the student in their training process, making this process more significant, and stimulating the formation of conjectures from the work with standards. This proposal is anchored in the perspective of didactic Engineering presented by Carneiro (2009).

Keywords: Intuition, Standards. Conjecture. Sequences.

Introdução

É inegável a grande utilidade da Matemática em outras áreas do conhecimento científico, no momento em que a sistematização e a modelagem de problemas diversos são feitas através da linguagem matemática. Mas será que essa disciplina tem alguma função extra, além de ser uma ferramenta para outras ciências? Qual o objetivo do Ensino e Aprendizagem dessa disciplina no Ensino Básico? Devemos fazer sempre uma abordagem pragmática e utilitarista?

Segundo os Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL, 1998), um dos objetivos do ensino de Matemática é desenvolver o raciocínio lógico. No entanto, o que observamos frequentemente é um ensino voltado para o aprendizado das técnicas de resolução de problemas e aplicações imediatas na ciência e tecnologia. Essa ideia pragmática está diretamente relacionada com o conceito que temos dessa disciplina. Sobre o que é a Matemática bem como o seu enfoque, Janos (2009, introdução) descreve o seguinte:

> Matemática não é sobre símbolos nem cálculos. Símbolos são ferramentas e, assim como a música não é uma sequência de notas, a Matemática não é sobre símbolos. Matemática também não é sobre cálculos. Cálculos são processos que levam a algum resultado. De fato, atualmente, quase todos os cálculos ficam para as máquinas. Genericamente podemos dizer que a Matemática é sobre ideias.

Nessa perspectiva, ensinar técnicas de resolução de problemas e aplicação de fórmulas, além de fazer do aprendizado um processo mecânico, desestimula e tolhe a imaginação do estudante, tirando o direito do mesmo de vivenciar o conhecimento e saborear o prazer da descoberta. Conforme nos assegura Janos (2009), a maneira como a Matemática é ensinada nas escolas não desperta o interesse da maioria dos estudantes pela simples razão de que o que se ensina não são ideias. E acrescenta afirmando que o teor ensinado na escola é uma série de habilidades para resolver problemas práticos e dicas para passar nas provas de vestibulares, ou seja, um treinamento e não uma educação em Matemática.

É adotando essa metodologia que se deixa de abordar conteúdos que são a base da Matemática, ou do que ela é, em essência. Um desses conteúdos é Indução Finita, também denominada de Indução Matemática. Segundo Hefez (2011), é com o conceito de Indução que se estabelece o primeiro contato com a noção de infinito em Matemática. Todos os conjuntos numéricos, por exemplo, contêm infinitos elementos. Como exemplo de conjuntos e infinidade, Courant e Robins (2000, p. 12) asseguram que "a sequência de inteiros representa o exemplo mais simples e natural do infinito matemático, que desempenha um papel dominante na Matemática moderna". No Ensino Médio, aparecem as Sequências e a soma de Progressões Geométricas infinitas. Muitas questões das Olimpíadas Brasileiras de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP) abordam questões onde o estudante precisa generalizar uma lei de formação que gere números ou figuras sob determinado padrão.

Diante de tudo isso, julgamos oportuno abordar Indução Finita no Ensino Médio. Para que seu aprendizado se torne mais natural, o conteúdo é desenvolvido por meio de atividades didáticas que explorem a observação de sequências numéricas e de figuras, para que os estudantes percebam os padrões encontrados em uma quantidade de casos isolados e, consequentemente, possam induzir o comportamento geral. De acordo com Vale (2013), devemos evidenciar a resolução de atividades baseadas na exploração de padrões através de múltiplas representações, privilegiando contextos visuais e figurativos, para que se possa emergir a generalização, sendo uma das componentes mais importantes do conhecimento matemático e a base do pensamento algébrico.

Além disso, para adquirir o conhecimento matemático, Vale (2013) afirma que se deve recorrer a uma ferramenta inata que crianças e jovens adultos possuem, que é uma forte intuição visual de ideias e conceitos matemáticos. Para completar, Janos (2009, p. 40) nos assegura que "a intuição está presente em toda parte na matemática e nenhuma filosofia pode ignorá-la", e para que isso ocorra, Lorenzato (2010, p. 20) afirma que "assim como é preciso abrir mão do rigor para se conseguir o rigor, para se alcançar a abstração, é preciso começar pelo concreto". Ainda sobre o caminho a ser percorrido para adquirir o aprendizado, Lorenzato (2010, p. 72) descreve: "Na escola, a experimentação é um processo que permite ao aluno se envolver com o assunto em estudo, participar das descobertas e socializar-se com os colegas".

O trabalho tem como objetivo evidenciar, a partir da apresentação dos resultados obtidos por meio de uma experiência com o emprego do raciocínio intuitivo no ensino de Indução Finita na educação básica, a eficácia de abordagens que levem em consideração aspectos capazes de tornar o ensino-aprendizagem da matemática muito mais prazeroso e significativo.

Metodologia

Para guiar questões relativas à sistematização de um trabalho teórico e experimental, nos baseamos no método Engenharia Didática. Carneiro (2009) descreve que esse método está relacionado com o movimento de valorização do saber prático do professor, justificado pela insuficiente teoria desenvolvida fora da sala de aula para captar a complexidade do sistema.

> A Engenharia Didática foi criada para atender a duas questões: a) das relações entre pesquisa e ação no sistema de ensino; b) do lugar reservado para as realizações didáticas entre as metodologias de pesquisa. É uma expressão com duplo sentido. Designa produções para o ensino, derivadas de resultados de pesquisa, e também designa uma específica metodologia de pesquisa baseada em experiências de sala de aula. (CARNEIRO, 2009, p. 91).

Segundo Artigue (1996 *apud* CARNEIRO, 2009), o processo experimental da metodologia da Engenharia Didática inclui quatro fases:

1. análises prévias;
2. concepção e análise *a priori* de experiências didático-pedagógicas a serem desenvolvidas na sala de aula de matemática;
3. implementação da experiência;
4. análise *a posteriori* e validação da experiência.

O trabalho é organizado por meio de um encadeamento dos conteúdos que fazem parte de Indução Finita, e, nessa perspectiva, a definição de um percurso, uma sequência didática para conduzir a ação em sala de aula, se faz necessária. O conceito de Sequência Didática é definido por Zabala (1998, p. 18) como "um conjunto de atividades ordenadas, estruturadas e articuladas para a realização de certos objetivos educacionais, que têm um princípio e um fim conhecidos tanto pelos professores como pelos alunos".

Nesse sentido, planejamos uma sequência didática sobre Indução Finita a qual é composta de cinco etapas, elaboradas de forma que um conteúdo, tipicamente de nível superior, pudesse ser abordado na educação básica, tornando a interação com os saberes matemáticos mais significativa.

Cada etapa da sequência foi composta por um grupo de atividades: o primeiro grupo, *Descobrindo Padrões*, teve a finalidade de permitir a descoberta e a organização de padrões existentes em objetos matemáticos. O segundo grupo, *Relações de Recorrência*, permitiu que os alunos descobrissem uma fórmula para determinar um valor numérico em função dos valores precedentes, base do pensamento intuitivo. O terceiro, intitulado *Introdução à Indução Finita*, permitiu que o aluno concebesse a ideia de Indução. Os grupos quatro e cinco, *Demonstrando proposições* e *Aplicações de Indução Finita*, tiveram a finalidade de consolidar e aprofundar o aprendizado do tema.

A realização de cada uma dessas atividades seguiu um encaminhamento que foi do lúdico ao sistemático: primeiro, fazia-se algum experimento, mostrava-se um vídeo, contava-se uma história ou promovia-se um jogo; em seguida, construía-se o processo de sistematização, ligando a situação real mostrada inicialmente à sua representação matemática; por fim, sucedia-se o desenvolvimento do conceito puramente matemático do assunto em questão e suas respectivas aplicações.

Esta sequência foi destinada a duas turmas de estudantes do 1º ano do Ensino Médio com idades entre 15 e 18 anos em um colégio de Ensino Técnico Integrado ao Ensino Médio de Juazeiro. A primeira turma, composta por 22 alunos, cognominamos Turma A, e a segunda turma, com 16 alunos, por Turma B.

Resultados

GRUPO DE ATIVIDADES 1: DESCOBRINDO PADRÕES

Análise prévias e análise *a priori* de experiências didático-pedagógicas

Esse tema não é parte integrante da componente curricular do ensino básico, nem faz parte do plano de ensino da escola em que os alunos participantes dessa pesquisa estudam. Foi uma atividade dedicada à observação de padrões encontrados em sequências de números e de figuras. Os pré-requisitos para a compreensão dessa atividade já fazem parte dos conhecimentos de ciclos anteriores dos estudantes, a saber: operações aritméticas com números inteiros, áreas de figuras planas e noções iniciais de análise combinatória.

As atividades tiveram como objetivo induzir intuitivamente a validade geral dos padrões observados nos primeiros casos para todo o conjunto de números ou figuras da sequência em questão. Esperava-se que os estudantes compreendessem que os números que formam as sequências seguem um estilo fixo de formação, e que eles determinassem os próximos números da sequência. Como consequência, esperava-se que eles conseguissem conjecturar o processo genérico de formação através de uma expressão matemática.

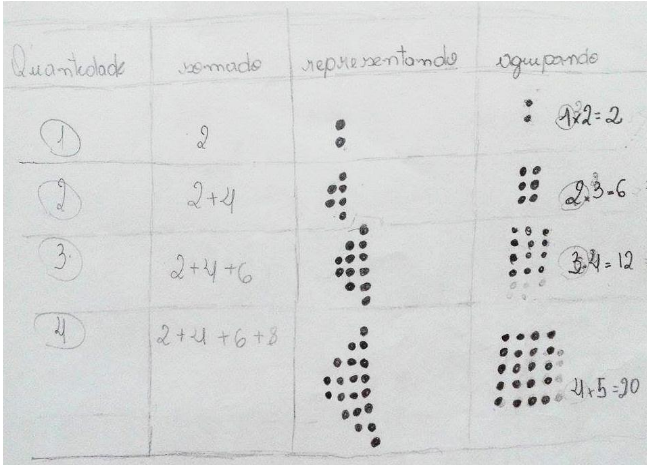
Implementação da experiência

Atividade 01: Soma dos primeiros números pares.

Considere a sequência de números pares, a partir do primeiro: 2, 4, 6, 8, 10, ...

É possível determinar uma relação entre a quantidade de números somados e o seu resultado dos primeiros n números pares? Para melhor enxergar o problema, abordamos por partes: com um único número par, qual o resultado para a soma? E com os dois primeiros? Da mesma maneira, observamos o que acontece com as quantidades subsequentes.

Figura 1 - Resolução da soma dos números pares.

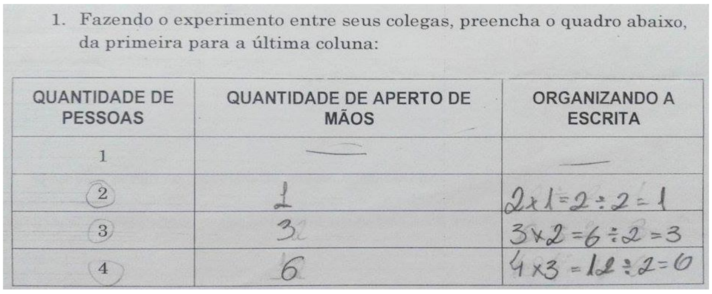


Fonte: Fotografia do próprio autor.

<u>Atividade 02: O teorema do aperto de mãos</u>.

Considere um grupo de pessoas com um número qualquer de integrantes. Quantos apertos de mãos são necessários e suficientes para que cada uma das pessoas cumprimente todas as outras? Analisemos o caso para quantidades crescentes, uma de cada vez.

Figura 2 - Quantidade de apertos de mãos para quatro pessoas



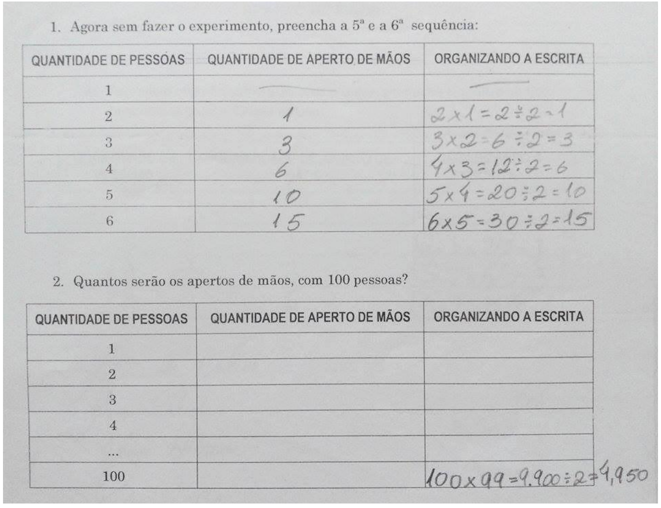
1. Fazendo o experimento entre seus colegas, preencha o quadro abaixo, da primeira para a última coluna:

QUANTIDADE DE PESSOAS	QUANTIDADE DE APERTO DE MÃOS	ORGANIZANDO A ESCRITA
1	—	—
2	1	2x1=2÷2=1
3	3	3x2=6÷2=3
4	6	4x3=12÷2=6

Fonte: Fotografia do próprio autor.

Para verificar se os estudantes realmente conseguiram encontrar um padrão e estavam aptos a determinar o resultado para uma quantidade qualquer, entregamos uma segunda tabela em que eles deveriam preencher sem mais fazer experimentos.

Figura 3 - Quantidade de apertos de mãos para 100 pessoas



1. Agora sem fazer o experimento, preencha a 5ª e a 6ª sequência:

QUANTIDADE DE PESSOAS	QUANTIDADE DE APERTO DE MÃOS	ORGANIZANDO A ESCRITA
1	—	—
2	1	2x1 = 2 ÷ 2 = 1
3	3	3x2 = 6 ÷ 2 = 3
4	6	4x3 = 12 ÷ 2 = 6
5	10	5x4 = 20 ÷ 2 = 10
6	15	6x5 = 30 ÷ 2 = 15

2. Quantos serão os apertos de mãos, com 100 pessoas?

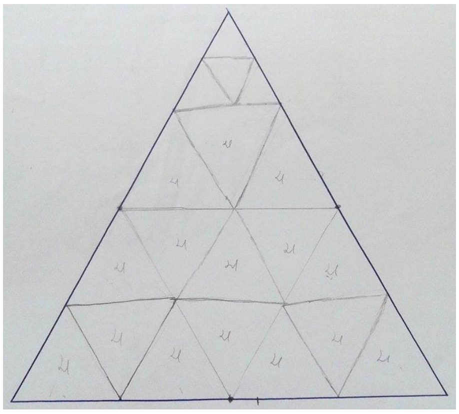
QUANTIDADE DE PESSOAS	QUANTIDADE DE APERTO DE MÃOS	ORGANIZANDO A ESCRITA
1		
2		
3		
4		
...		
100		100x99 = 9.900 ÷ 2 = 4,950

Fonte: Fotografia do próprio autor.

<ins>Atividade 3: Subdividindo triângulos a partir dos pontos médios de seus lados</ins>

Dado um triângulo equilátero, ao marcarmos os pontos médios de cada um de seus lados e unindo-os, quantos novos triângulos teremos?

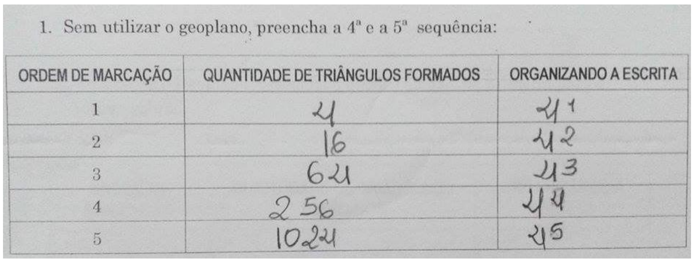
Figura 4 - Formando novos triângulos a partir dos pontos médios



Fonte: Fotografia do próprio autor.

Depois de desenhar, os estudantes deveriam preencher uma tabela informando a quantidade de novos triângulos formados sem o desenvolvimento experimental, para verificar se eles conseguiram conjeturar uma fórmula que produzisse o resultado proposto.

Figura 5 - Determinando o número de triângulos formados


1. Sem utilizar o geoplano, preencha a 4ª e a 5ª sequência:

ORDEM DE MARCAÇÃO	QUANTIDADE DE TRIÂNGULOS FORMADOS	ORGANIZANDO A ESCRITA
1	4	4^1
2	16	4^2
3	64	4^3
4	256	4^4
5	1024	4^5

Fonte: Fotografia do próprio autor.

Análise *a posteriori* e validação da experiência

Na atividade Soma dos pares, 68,2% dos estudantes conseguiram representar as quantidades por meio de retângulos, mas sentiram dificuldade em apresentar uma forma genérica para que o resultado servisse para a soma de 1, 2, 3 ou 4 números. Depois de demandar algum tempo, outros 45,5% dos estudantes conseguiram encontrar o padrão de formação através de retângulos de *n* por *n+1* para os 10 primeiros casos, mostrando que tinham formado uma conjectura. No entanto, ainda não se sentiram seguros se realmente isso aconteceria para todos os números naturais, mostrando que ainda não tinham estruturado a generalização de suas conjecturas. Julguei esse momento como delicado, pois apenas 27,3% deles responderam correta e integralmente essa primeira etapa.

A atividade dos apertos de mão foi produtiva, pois 81,8% dos estudantes conseguiram fazer os agrupamentos corretos, mas novamente foi necessária uma intervenção no sentido de encontrar uma fórmula. Por ter sido um número de acertos maior do que a tarefa anterior, acreditamos estar conseguindo avanço.

Para encontrar o número de triângulos, todos os estudantes conseguiram fazer os agrupamos corretos, sem mais a necessidade de intervenção no sentido de encontrar uma fórmula. Um fato que despertou a nossa atenção no desenvolvimento dessa atividade foi a agilidade com que 45,5% dos estudantes mostraram em encontrar a fórmula de formação dos novos triângulos. Outro fato interessante foi a rapidez com que 22,7% deles demonstraram em descobrir o padrão de formação das figuras, pois ao iniciar a segunda marcação já tinham determinado a quantidade de triângulos que teriam na próxima marcação. Como todos os estudantes conseguiram realizar a tarefa de forma correta julgamos que o trabalho com padrões tenha surtido o efeito desejado.

GRUPO DE ATIVIDADES 2: RELAÇÕES DE RECORRÊNCIA

Análise prévia e análise *a priori* de experiências didático-pedagógicas

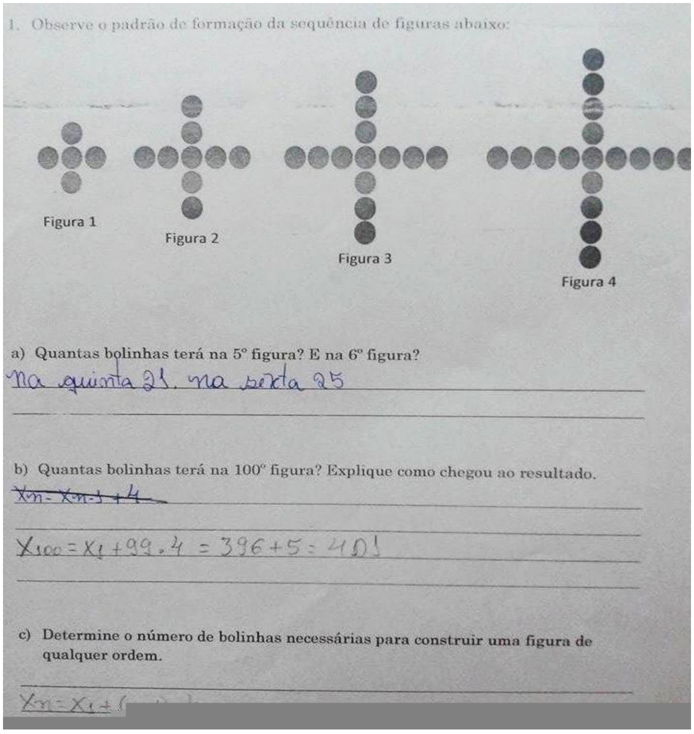
Relações de Recorrência não faz parte do plano de ensino da escola dos nossos estudantes. As ideias que nossos alunos possuem acerca do assunto e que são pré-requisitos para o seu aprendizado, são: funções e sequências numéricas.

Nosso objetivo aqui era fortalecer o trabalho com padrões e abordar sistematicamente a ideia de transferir uma propriedade de um número para seu consecutivo, que é o conceito básico de Indução Finita. Esperava-se que os alunos conseguissem encontrar uma fórmula que generalize as observações iniciais.

Implementação da experiência

Começamos a aula definindo Relação de Recorrência como técnica que permite definir sequências, conjuntos, operações, etc., partindo de problemas particulares para problemas genéricos. Ou seja, por intermédio de uma regra pode-se calcular qualquer termo em função do(s) antecessor(es) imediato(s).

Figura 6 - Resposta do estudante TA05 para a equação de recorrência



Fonte: Fotografia do próprio autor.

Análise *a posteriori* e validação da experiência

Tivemos um índice de 45,5% de acertos integrais nessa atividade. Conversando com os outros estudantes, percebemos que 36,4% deles haviam compreendido como a fórmula fechada deveria ser, mas não conseguiram escrevê-la corretamente por meio de uma expressão matemática. Por ser um estudo inicial com métodos de resolução de Equações de Recorrência, acreditamos que o trabalho foi satisfatório.

GRUPO DE ATIVIDADES 3: INTRODUÇÃO À INDUÇÃO FINITA

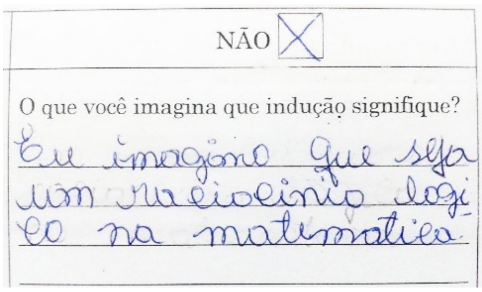
Análise prévia e análise *a priori* de experiências didático-pedagógicas

Indução Finita não é parte integrante da componente curricular do ensino básico. No entanto, faremos apenas uma abordagem introdutória, relativa à compreensão do Princípio de Indução. Os pré-requisitos básicos para o seu domínio são as sequências numéricas, bem como as atividades precedentes com Padrões e Recorrência, as quais servirão de reforço para o aprendizado do conteúdo.

Por ser o tema central da pesquisa fizemos um trabalho de investigação maior, acrescentando um questionário de inspeção para verificar o conhecimento prévio dos estudantes acerca de Indução. Esse questionário continha perguntas relativas ao assunto e pedia que os estudantes descrevessem o que sabiam sobre o conteúdo.

As figuras 7 e 8 mostram as respostas de dois alunos sobre o que julgavam conhecer sobre o assunto. Verificamos que 15,8% dos estudantes imaginaram que Indução tinha alguma relação com Matemática, mas não sabiam sobre o que o assunto abordava.

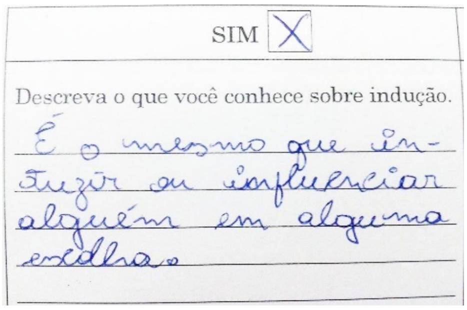
Figura 7 - Resposta do estudante TB09 para o questionário de inspeção



Fonte: Fotografia do próprio autor.

Por outro lado, 18,4% deles já tinham ouvido falar sobre a palavra Indução, mas não com significado matemático.

Figura 8 - Resposta do estudante TA10 para o questionário de inspeção



Fonte: Fotografia do próprio autor.

Por meio dessa atividade os estudantes teriam o primeiro contato com o conceito formal de Indução Finita. Assim, esperava-se que compreendessem o conceito de Indução Finita, cerne desse trabalho.

Implementação da experiência

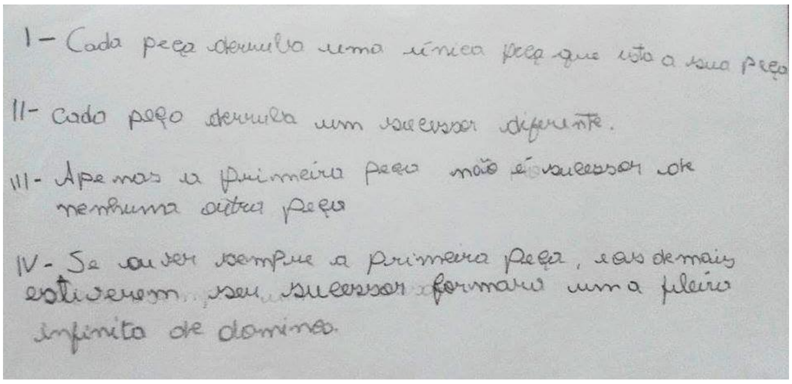
Inicialmente, foi feita uma apresentação geral do Princípio de Indução Finita, descrevendo-o como uma ferramenta capaz de provar que uma quantidade infinita de observações é verdadeira, simplesmente verificando que uma quantidade finita dessas afirmações é verdadeira. Utilizamos como ferramenta a analogia com a brincadeira das peças de dominó. Antes de tudo, temos que observar a característica da fileira: cada uma das peças está uma distância em relação às mais próximas, menor que o tamanho delas. Sem essa característica elas não formarão uma corrente de queda que une todas as peças. Esta característica é equivalente à propriedade concernente aos números inteiros: cada número inteiro tem um sucessor que também é um número inteiro.

Extrapolando o raciocínio e imaginando uma fileira com infinitas peças, completamos a associação entre o conjunto das peças de dominó e o conjunto dos números naturais. De modo semelhante ao feito por Nóbrega (2013), fizemos a brincadeira da fileira com as peças de dominó, com a característica citada, e levantamos alguns questionamentos:

1. *O que ocorre se derrubarmos o primeiro dominó?*
2. *E se o sétimo (7°) for derrubado?*
3. *Imaginando uma fileira com infinitas peças, podemos tirar a mesma conclusão?*

Segundo Nóbrega (2013), uma atividade interessante para fortalecer o entendimento do conceito dos números naturais e de suas propriedades, é transcorrer com as próprias palavras os axiomas de Peano, fazendo a analogia com a brincadeira das peças de dominó. Vejamos a transcrição feita por um grupo de estudantes:

Figura 9 - Analogia de brincadeira das peças de dominó com os Axiomas de Peano



I – Cada peça derruba uma única peça que está a sua peça

II – Cada peça derruba um sucessor diferente.

III – Apenas a primeira peça não é sucessor de nenhuma outra peça

IV – Se ou ver sempre a primeira peça, e as demais estiverem seu sucessor formarão uma fileira infinita de dominós.

Fonte: Fotografia do próprio autor.

Análise *a posteriori* e validação da experiência

A participação em massa e de forma efetiva por parte dos estudantes nos fez acreditar que a aula de introdução à Indução Finita fora produtiva. A resposta aos questionamentos e a resolução das atividades propostas nos fizeram confiar nisso.

Acreditamos que o entendimento inicial do assunto é um passo importante para a compreensão das demonstrações de proposições e fórmulas vistas anteriormente e para as atividades com a aplicação do Princípio de Indução Finita.

GRUPO DE ATIVIDADES 4: DEMONSTRAÇÃO DE PROPOSIÇÕES

Análise prévia e análise *a priori* de experiências didático-pedagógicas

Nessa etapa, aprofundamos o estudo de Indução Finita, fazendo a abordagem sistemática e usando-o para resolver questões. Os pré-requisitos para a compreensão do conteúdo são: funções de 1º e 2º grau, sequências numéricas e expressões algébricas, além do trabalho precedente com Padrões, Recorrência e Introdução à Indução Finita.

O Princípio de Indução Finita consiste na admissão de dois passos:

1. Base de Indução – P(1): estabelecemos a veracidade da propriedade para $n = 1$.
2. Passo de Indução – P(k) acarreta em P(k+1): supomos que a propriedade é válida para algum inteiro $k,\ k > 1$. Provamos que a propriedade é válida para o inteiro seguinte $k + 1$, ou seja, que é válido que P(k) → $P(k + 1)$.

Esperava-se que os estudantes compreendam a utilidade do Princípio e o processo algébrico de demonstração das proposições. Esperava-se ainda que essas exposições servissem de base para que os mesmos também possam desenvolver o procedimento corretamente na resolução de outras questões.

Implementação da experiência

Foi feita a demonstração de algumas conjecturas feitas nos primeiros encontros, utilizando o Princípio de Indução Finita.

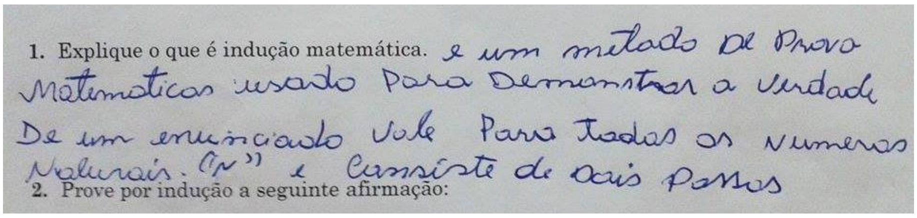
Proposição 1: Para todo n ∈ N, a soma dos n primeiros números ímpares é igual a n^2.

Proposição 2: A soma dos n primeiros números naturais é igual a $\frac{(1+n)\cdot n}{2}$

Foi aplicada uma avaliação com perguntas teóricas relacionadas à necessidade de determinação do significado de indução, além de questões de ordem prática, aquelas nas quais se faz necessário aplicar o Princípio de Indução Finita para respondê-las.

A primeira questão foi de ordem teórica, e pedia que o aluno explicasse o significado de indução matemática. Nesta questão, o número de acertos foi de 18,4%.

Figura 10: Resposta do estudante TB14 sobre o que é indução.



Fonte: Fotografia do próprio autor.

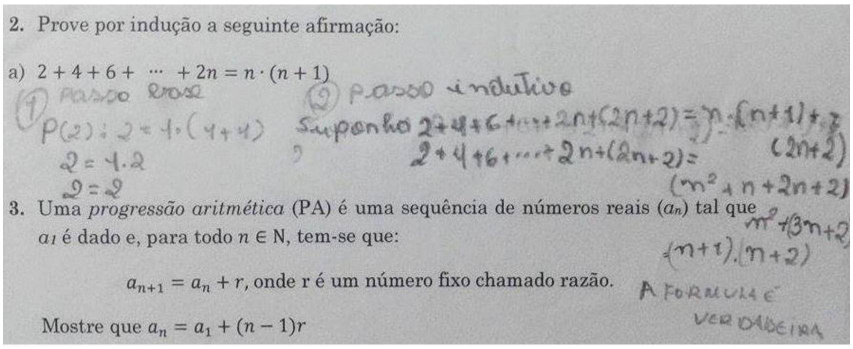
Para melhor compreensão, a análise dos resultados das questões de ordem prática nas duas turmas é feita de duas formas: na primeira forma, a análise foi feita em relação ao número de acertos integrais. Na segunda forma, fizemos em relação aos acertos parciais, detalhando cada um deles. Achamos conveniente colocar esse tópico, pois houve questões em que estudantes desenvolveram o raciocínio corretamente, mas não concluíram a questão por falta de conhecimento relativo de conteúdos precedentes, como fatoração ou desenvolvimento de produtos notáveis.

i. **Acertos integrais:** A tabela 1 mostra o número de acertos integrais.

Tabela 1 - Índice de acertos integrais

QUESTÕES	ÍNDICE DE ACERTOS
2	5,0%
3	5,3%

Figura 11 - Resposta do estudante TA09 para a soma dos pares


2. Prove por indução a seguinte afirmação:

a) $2+4+6+\cdots+2n = n\cdot(n+1)$

(1) Passo base

$P(2): 2 = 1\cdot(1+1)$

$2 = 1\cdot 2$

$2 = 2$

(2) passo indutivo

Suponho $2+4+6+\cdots+2n+(2n+2) = n\cdot(n+1)+(2n+2)$

$2+4+6+\cdots+2n+(2n+2) =$

$(n^2+n+2n+2)$

n^2+3n+2

$(n+1)\cdot(n+2)$

A FORMULA É VERDADEIRA

3. Uma *progressão aritmética* (PA) é uma sequência de números reais (a_n) tal que a_1 é dado e, para todo $n \in \mathbb{N}$, tem-se que:

$a_{n+1} = a_n + r$, onde r é um número fixo chamado razão.

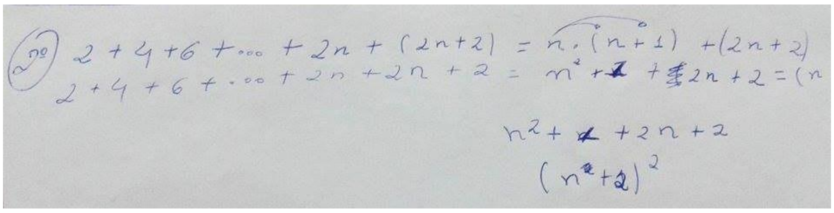
Mostre que $a_n = a_1 + (n-1)r$

Fonte: Fotografia do próprio autor.

ii. Acertos parciais: Seguem abaixo a descrição e os índices relativos a este tópico.

Em relação à terceira questão, 18,2% dos estudantes não conseguiram concluir corretamente a questão, mas aplicaram o procedimento correto para a sua resolução.

Figura 10 - Resposta do estudante TA20 para a soma dos pares


2º

$2+4+6+\cdots+2n+(2n+2) = n\cdot(n+1)+(2n+2)$

$2+4+6+\cdots+2n+2n+2 = n^2+\cancel{1}+2n+2 = (n$

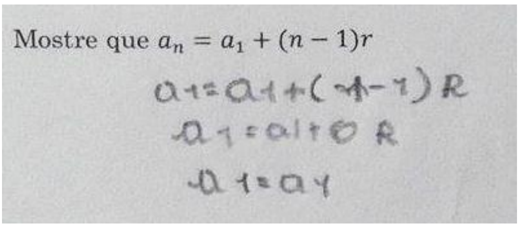
$n^2+\cancel{1}+2n+2$

$(n^2+2)^2$

Fonte: Fotografia do próprio autor.

Em relação à terceira questão da avaliação, 13,2% dos estudantes acertaram o primeiro passo da demonstração.

Figura 11 - Resposta do estudante TA09 para o termo geral de uma PA


Mostre que $a_n = a_1 + (n-1)r$

$a_1 = a_1 + (1-1)R$

$a_1 = a_1 + 0R$

$a_1 = a_1$

Fonte: Fotografia do próprio autor.

Análise *a posteriori* e validação da experiência

Pudemos observar que os estudantes compreenderam o conceito da demonstração e a necessidade dos dois passos da demonstração de Indução, mas percebemos a dificuldade na compreensão algébrica. Apesar de ser um fato preocupante no sentido da resolução prática, esse ponto não diz respeito diretamente ao Princípio de Indução Finita e podemos afirmar que houve compreensão do Princípio e de suas regras.

GRUPO DE ATIVIDADES 5: APLICAÇÕES DE INDUÇÃO FINITA

Análise prévia e análise *a priori* de experiências didático-pedagógicas

Torres de Hanói é um jogo antigo que consiste em uma base de madeira na qual estão firmadas três hastes verticais, e certa quantia de discos de diâmetros diferentes com um furo no meio.

Figura 12 - Torres de Hanói.

Fonte: Fotografia do próprio autor.

Trabalhamos uma série de problemas concernentes ao jogo Torres de Hanói, e lançamos mão do Princípio de Indução Finita para resolvê-los. Os pré-requisitos para a compreensão do conteúdo são as atividades desenvolvidas nas etapas anteriores.

Almejava-se que fosse uma atividade prazerosa para os estudantes e que o jogo fosse uma inspiração para que conseguissem resolver questões mais técnicas. Pretendia-se que eles percebessem de fato que o jogo tem solução para qualquer quantidade de discos, e que ela pode ser encontrada baseada na solução para uma quantidade anterior de discos. A última atividade de aplicação de Indução Finita consistia em encontrar uma fórmula fechada para a quantidade mínima de movimentos. Esperava-se que os estudantes encontrassem a quantidade mínima de movimentos, expressassem por meio de uma fórmula e entendessem a demonstração algébrica.

Implementação da experiência

Atividade 01: Solução por recorrência

Inicialmente, apresentamos o jogo e suas regras. A fim de que o Princípio fosse usado corretamente, resolvemos o jogo por partes: primeiro, resolvemos com um único disco; depois com dois discos, e em seguida com três discos. Desse modo, a solução em cada etapa é encontrada em relação ao resultado anterior, e estaremos usando o raciocínio recursivo.

Após resolver manualmente o jogo para diferentes quantidades de discos, abordamos o resultado formalmente, através do Princípio de Indução Finita. Reiteramos aos estudantes que a resolução teórica do jogo nada mais é do que a representação matemática da resolução feita na prática.

Figura 13 - Estudante TB12 resolvendo o jogo Torres de Hanói

Fonte: Fotografia do próprio autor.

Por questões didáticas, nomeamos os discos por números naturais e associamos a eles os números naturais de 1 para o menor no topo, até o n-ésimo número natural ao maior deles, na base. Ainda por motivos didáticos, denominaremos cada uma das torres por meio das letras X, Y e Z. Os dois problemas resolvidos por meio de indução finita foram:

Proposição 3. A Torre de Hanói com n discos tem solução para todo $n \in \mathbb{N}$.

Proposição 4. O número mínimo de movimentos (M_n) para resolver a Torre de Hanói com n discos é dada por $M_n = 2 \cdot M_{n-1} + 1$.

Atividade 02: Encontrando uma fórmula fechada

A brincadeira de resolver o jogo com uma quantidade de discos em função da quantidade anterior auxiliou os estudantes a perceber a quantidade mínima de movimentos. Fizemos a projeção da tabela 2 no quadro negro, e pedimos para que os estudantes determinassem as quantidades que deveriam preencher a tabela. A conclusão dos resultados não foi difícil de ser obtida. Com alguma ajuda, até mesmo a organização da escrita em forma de potência foi determinada por eles.

Tabela 02 - Expressão para a quantidade mínima de movimentos

Quantidade de discos	Quantidade mínima de movimentos	2^n	$2^n - 1$
1	1	2	1
2	3	4	3
3	7	8	7
4	15	16	15
5	31	32	31

6	63	64	63

Fonte: Nóbrega (2013), Princípio de Indução Matemática no Ensino Médio.

Proposição 5. A solução da Hanói com n discos é feita com o mínimo de $2^n - 1$ movimentos.

Análise *a posteriori* e validação da experiência

Apesar da imposição de uma forma de resolução do jogo, a primeira atividade desse grupo não deixou de ser descontraída, contando com a participação efetiva de todos os estudantes. Eles puderam observar que fica fácil resolver o jogo com n discos se souberem como fazer para $n-1$ discos. De modo geral, a comparação entre o raciocínio recursivo usado no procedimento prático e teórico foi compreendida, bem como o sentido ao qual se propunha o uso Princípio de Indução Finita nos problemas.

Na demonstração da segunda atividade desse grupo, percebemos que os estudantes estavam mais familiarizados com a ideia de usar o raciocínio recursivo para encontrar a solução seguinte. Durante a resolução teórica, percebemos a dificuldade na compreensão algébrica. Mas de modo geral, a comparação entre o raciocínio recursivo usado no procedimento prático e teórico foi compreendida, bem como o sentido ao qual se propunha o uso Princípio de Indução Finita na solução dos problemas.

Considerações Finais

Ao realizar esse trabalho, desenvolvemos uma proposta didática para estudantes do primeiro ano do Ensino Médio, abordando o Princípio de Indução Finita e aplicações desse princípio. O envolvimento e comprometimento crescente dos estudantes foram importantes para o desenvolvimento do trabalho e mostraram que existem conteúdos matemáticos que são prazerosos e mostram a Matemática sob um novo aspecto. A cada encontro, a turma ganhava mais confiança e se empenhava em resolver todas as atividades propostas.

Mesmo ao estudar conteúdos que já fazem parte da base curricular do Ensino Médio, como Sequências Numéricas e Progressões Aritméticas, percebemos que ainda é possível modificar o enfoque que hoje é dado ao assunto, tornando-os mais dinâmicos e ampliando os conceitos apresentados pelos livros didáticos. Conteúdos mais abstratos como Relações de Recorrência e Indução Finita também podem ser abordados no Ensino Médio, com a necessidade de um problema motivador, ou até um enfoque que auxilie a compreensão dos conceitos abordados. Por isso, a fim de que pudéssemos desenvolver esse conteúdo, optamos por ensiná-lo por meio de analogias com fatos concretos e através da formação de conjecturas dadas pelo trabalho com padrões. Na aplicação da avaliação, verificamos que apesar de haver um pequeno índice de estudantes que acertaram as questões de aplicação do Princípio de Indução, questões mais internas foram observadas: estudantes que começaram a resolver corretamente as questões propostas tiveram dificuldade em resolver expressões matemáticas como fatorar produtos notáveis. Um indício de que eles compreenderam o método, mas careciam de uma base mais sólida sobre tópicos básicos da matemática. De maneira geral, o Princípio de Indução Finita é um conteúdo abstrato, e carece de maior tempo para que o estudante se familiarize.

A observação do entendimento dos estudantes acerca de demonstrações nos deve servir de alerta sobre as muitas vezes que subestimamos nossos estudantes, achando que uma prova só iria complicar o entendimento deles. Por isso, acreditamos que o aprendizado de Matemática deve ser aprofundado no sentido da explicação de toda sua fundamentação, e defendemos um ensino que estimule o senso crítico, pois acreditamos que o quanto antes os estudantes forem instigados a questionarem a veracidade de fórmulas impostas como verdadeiras, mais efetivo será o processo de ensino e aprendizagem. Cremos que a busca de método de ensino e aprendizagem não se exaure durante uma única abordagem, e a busca pelo aprimoramento deste mecanismo deve ser contínua. Contudo, esperamos ter contribuído de alguma forma na maturação das ideias inerentes ao ensino deste tópico, e que tenhamos permitido aos interessados uma breve experiência que possibilite nortear trabalhos mais aprofundados sobre o tema.

Para professores ou pesquisadores interessados em ensinar Indução Finita no Ensino Médio com essa mesma abordagem, sugerimos que façam aulas de reforço com expressões algébricas e demandem mais tempo fazendo um número maior de atividades com Padrões e Recorrências, para que exista um amadurecimento maior com a noção de Indução e do processo indutivo.

Referências

BRASIL. Ministério da Educação e Cultura. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais**, 5ª a 8ª séries. Brasília, 1998.

CARNEIRO, V. C. G. Engenharia didática: um referencial para ação investigativa e para formação de professores de matemática. **Zetetike**, Campinas, v. 13, n. 1, p. 87-120, fevereiro 2009.

COURANT, R.; ROBINS, H. **O que é matemática**. 4. ed. São Paulo: Ciência Moderna Ltda., 2000.

HEFEZ, A. **Aritmética**. Rio de Janeiro: SBM, 2011.

JANOS, M. **Matemática e natureza**. São Paulo: Livraria da Física, 2009.

LORENZATO, S. **Para aprender matemática**. 3. ed. Campinas, SP: Autores Associados, 2010.

NÓBREGA, L. X. G. **Princípio da Indução Matemática no Ensino Médio**. 2013. 61 f. Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional, SBM. UFRN, Centro de Ciências Exatas e da Terra. Natal, 2013.

VALE, I. Padrões em contextos figurativos: um caminho para a generalização em matemática. **REVEMAT**. Florianópolis, v. 08, n. 2, p. 64-81, 2013.

ZABALA, Antoni. **A prática educativa**: como ensinar. Porto Alegre: Artmed, 1998.