http://dx.doi.org/10.23925/2237-9657.2021.v10i1p151-167

Abelhas e GeoGebra: uma parceria na animação da dança do requebrado

Bees and GeoGebra: partnership in animation the waggle dance.

ANA MARIA AMARILLO BERTONE [1]

VÍTOR DIAS DO VALLE TANAJURA [2]

ALINE SILVESTRE BORGES [3]

WALYSSOM MIRANDA MEDEIROS [4]

ROSANA SUELI DA MOTTA JAFELICE [5]

RESUMO

No presente trabalho, através da animação artística, analisa-se o comportamento das abelhas por meio da dança conhecida como dança do requebrado. O objetivo deste trabalho é reproduzir a animação artística da dança do requebrado das abelhas através de curvas paramétricas e funções utilizando o software GeoGebra, de acordo, com a distância da fonte de alimento e direção do sol. O trabalho tem sido realizado por um grupo de estudantes em forma interdisciplinar apoiado por duas professoras entre os meses de agosto a dezembro de 2019. Curvas paramétricas com formato do número oito, foram a forma de idealizar a dança e a dinâmica da comunicação da localização e distância da fonte de alimento, construídas no software GeoGebra para entendimento da animação nas perspectivas do desenvolvimento matemático dentro da colmeia.

Palavras-chave. *Animação Artística, Dança das abelhas, GeoGebra.*

ABSTRACT

In the present work, through artistic animation, the behavior of bees is analyzed through the dance known as the "waggle dance". The aim of this work is to reproduce the artistic animation of the dance of the "waggle dance" of the bees through parametric curves and functions using the software GeoGebra, according to the distance from the food source and the direction of the sun. The work has been carried out by a group of students in an interdisciplinary way supported by two teachers between the months of August and December 2019. Parametric curves with the number eight format, has been the way to idealize the dance and the dynamics of the communication of the location and distance from the food source, built using GeoGebra software to understand animation in the perspective of mathematical development within the hive.

Keywords: *Artistic Animation, Bee Dance, GeoGebra.*

[1] Universidade Federal de Uberlândia – amabertone@ufu.br
[2] Universidade Federal de Uberlândia – vitor.d@outlook.com.br
[3] Universidade Federal de Uberlândia – alinesilvestreborges@gmail.com
[4] Universidade Federal de Uberlândia – walyssom.medeiros@ufu.br
[5] Universidade Federal de Uberlândia – rmotta@ufu.br

Introdução

O objetivo deste trabalho é reproduzir a animação artística da dança do requebrado das abelhas através de curvas paramétricas e funções utilizando o software GeoGebra, de acordo, com a distância da fonte de alimento e direção do sol. O GeoGebra (HOHENWARTER, 2019), introduzido pelo professor Markus Hohenwarter da Universidade de Salzburgo (Áustria) em 2001, é o software escolhido devido sua simplicidade na codificação assim como o imediato acesso aos resultados no processo de construção. A interatividade de um controle deslizante com um ponto percorrendo a curva descrita pela dança do requebrado tem permitido imprimir à animação um aspecto realístico do movimento. Finalmente, a construção de um *applet* que contém botões para iniciar a dança e encerrá-la, permite uma exibição do fenômeno de forma agradável e atraente.

À face do exposto, apresentam-se na Seção 1 os argumentos matemáticos utilizados na animação da dança do requebrado. Posteriormente, na Seção 2 é exibido o processo de criação da animação artística realizada no *software* GeoGebra, o protocolo de construção e suas etapas. Finalmente, na Conclusão, refletimos sobre a importância da animação artística na dança do requebrado das abelhas e sua contribuição para o enriquecimento dos estudantes envolvidos.

Excelentes polinizadores e de extrema importância para a flora mundial, as abelhas desempenham um papel fundamental na manutenção do ecossistema do planeta. As abelhas evoluíram após o surgimento das primeiras plantas com flores (entre 135 e 140 milhões de anos atrás), há aproximadamente 125 milhões de anos e, desde então, são responsáveis pela maior parte da polinização de diversas plantas. A abelha mais comum, *Apis melífera,* por exemplo, consegue polinizar até 40.000 flores por dia. As Abelhas Sem Ferrão (ASF) são as mais comuns em território brasileiro. Dentre as 400 espécies espalhadas pelo mundo, 300 são nativas do Brasil, divididas entre abelhas da espécie Meliponas e as Trigonas (WINSTON, 2003). Outras espécies chegaram ao Brasil vindas da Europa e da África, ocasionando vários cruzamentos destas espécies.

Durante o processo evolucionário, assim como outros animais sociais, as abelhas desenvolveram técnicas para se comunicar com os demais membros da colmeia. A comunicação pode ser por meio de sons, toques, cheiros ou movimentos. Quando se trata de fontes de alimento, as abelhas elaboram danças diferentes conforme aumenta a distância entre a colmeia e o alimento. Estudos apontam a importância da dança como indicador de fontes de alimento, conhecendo assim a flora de determinada região apenas por meio desta comunicação, além de indicar fontes de alimento e se estes estão próximos ou distantes da colmeia (COUVILLON, SCHÜRCH e RATNIEKS, 2014; GRÜTER e LEADBEATER, 2014).

Cada tipo de dança transmite uma distância da fonte de alimento, sendo decodificada pelas outras abelhas. A dança circular indica que o alimento se encontra a uma distância menor que 100 metros da colmeia, já em foice (lua) em até 100 metros e a do requebrado alimentos acima de 100 metros (WINSTON, 2003). A intensidade da vibração da dança do requebrado também está relacionada com a distância ao alimento, quanto mais o corpo da abelha bramir, mais distante será a fonte de recursos.

Observar o comportamento das abelhas por meio da dança com relação à indicação de fontes de alimento, foi analisada pela primeira vez por Karl Von Frisch e colaboradores em 1920 por meio de colmeias com laterais de vidro. Foi observado que ao retornar de uma coleta, as abelhas forrageiras[6] executavam uma espécie de dança. Esses movimentos frenéticos possuíam um padrão, seguidos de pausas para a troca de informações através das antenas e para provar o néctar da abelha dançarina. A princípio, acreditava-se que as operárias receptoras tomavam conhecimento da fonte de alimento através do odor, o que explicaria a dança realizada pelas campeiras. Existem danças que envolvem empurrões, zumbidos, vibrações, entre outras e as mais comuns são: a dança do requebrado, a dança circular, dança em foice (lua) e a dança da vibração dorsiventral abdominal. Consequentemente, foram realizadas diversas pesquisas para identificar os vários tipos de danças existentes e àquelas que ainda não são compreendidas (VON FRISCH e LINDAUER, 1956; VON FRISCH, 1967; WINSTON, 2003).

Os autores, motivados em interpretar a comunicação entre as abelhas, quando a fonte de alimento estiver a mais de 100 metros da colmeia, decidiram representar a geometria da dança das abelhas através de curvas paramétricas e funções. Desta forma, realizou-se uma animação artística.

Aprimorando e inovando o ensino e aprendizagem dentro das salas de aula, os educadores atualmente, buscam novos procedimentos educacionais com *softwares* que podem ser incorporados como recursos pedagógicos, como ferramentas para o ensino, facilitadores da aprendizagem, promovendo o desenvolvimento de habilidades e estimulando a construção de novos conhecimentos. O uso das Tecnologias Digitais de Informação e Comunicação (TDICs), como em qualquer processo educacional, deve sempre privilegiar os objetivos traçados, tomando o cuidado para que seu uso não seja feito de forma incorreta se tornando uma ferramenta obsoleta e sem adequação dentro do processo

[6] Forrageiras (ou campeiras): abelhas operárias que realizam atividades externas à colmeia, coletar néctar, pólen e outros materiais.

de ensino e aprendizagem (CYSNEIROS, 1999). Dentro deste contexto o GeoGebra se torna uma ferramenta muito importante que subsidia as práticas pedagógicas e transforma em um rico recurso, apresentando os conceitos matemáticos num sistema dinâmico.

A produção da animação artística desenvolvida no GeoGebra se apresenta como uma linguagem que faz o uso de recursos midiáticos para produzir os movimentos nas imagens, atraindo a atenção dos estudantes, além de contribuir a visualização de situações que antes eram consideradas como hipóteses. Um recurso que passa a fazer parte do contexto educacional aproximando o ambiente escolar da realidade social, principalmente em relação à construção do conhecimento.

1. A dança do requebrado

Assim descreve Thomas Seeley no prólogo de uma edição do livro de von Frisch, que recebeu o prêmio Nobel em Medicina pela sua longa trajetória de pesquisa:

> Até sua morte em 1982, Karl von Frisch era a autoridade mais renomada do mundo em abelhas. A Linguagem de Dança e a Orientação das Abelhas é sua obra-prima - o culminar de mais de cinquenta anos de pesquisa. Ele descreve em linguagem não técnica o que ele descobriu em uma vida inteira de estudos sobre abelhas - seus métodos de orientação, suas faculdades sensoriais e sua notável capacidade de se comunicar (VON FRISCH, 1967).

Nos primeiros desenhos da dança das abelhas descrita por von Frisch, feitos por biólogos especialistas nesse tipo de desenhos, aparecem as curvas descritas pelas abelhas e documentada na página 117 do livro, mostrada na Figura 1.

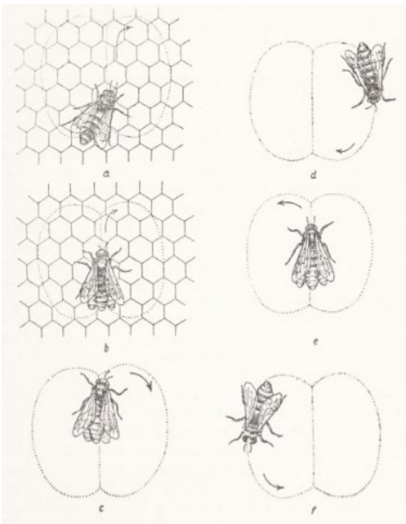

Figura 1: Dança do requebrado.
Fonte: Livro de Karl von Frisch (1955).

Com relação ao trajeto da dança que a abelha que executa, pode-se afirmar que:

> Nessas danças, a abelha executa um semicírculo estreito, realiza uma curva acentuada, e então retorna a seu ponto de partida em uma linha reta. Após isso, ela descreve outro semicírculo, desta vez na direção oposta, realizando um círculo completo e retornando, mais uma vez, a seu ponto inicial em uma linha reta. Ela executa todo esse percurso durante vários minutos permanecendo no mesmo local o tempo todo: semicírculo para a esquerda, retorna em linha reta, semicírculo para a direita, retorna em linha reta e, assim, indefinidamente. (VON FRISCH, 1955, p. 117).

Desde que von Frisch publicou seus primeiros artigos sobre o assunto, muitos autores têm feito pesquisas que confirmam as suas descobertas. De acordo com Barron e Plath (2017), as abelhas *Apis melífera* são as únicas a realizarem esta dança, a qual, ao ponto de vista dos autores dessa animação, o trajeto percorrido pelas abelhas na dança assemelha-se com o da curva denominada nefroide. No seu livro, Proctor (1878) após observações nos seus estudos e desenhos geométricos, sugeriu o nome de nefroide ao epicicloide de duas cúspides por associá-lo ao formato de um néfron de um rim. Richard A. Proctor (1837-1888) foi um famoso matemático inglês que em 1878 publicou o livro *The Geometry of Cycloids*, em Londres, mencionando a curva.

Mas, como as abelhas, a partir da dança, encontram a fonte de alimento?

Segundo o vídeo **Vetores e A Dança das Abelhas**[7], por possuírem a habilidade de ver a luz ultravioleta e polarizada do sol a partir de seus olhos, as abelhas conseguem determinar a localização e orientação precisa do sol o tempo inteiro (pode-se dizer que possuem um tipo de compasso solar). Outra característica interessante é que a duração da dança não dá uma indicação absoluta da distância pois informações como direção do vento (a favor ou contra) influenciam na dança.

Além disso, em seu brilhante estudo, von Frisch (1955) descobriu que quando uma abelha viaja do ninho à fonte de alimento, tomando a angulação que o sol faz com ela como referência, realiza a dança do requebrado apontando diretamente para a fonte de alimento. As outras abelhas, ao perceberam a dança, seguem a direção do requebrado que a primeira abelha realizou, mantendo sempre sua angulação com respeito ao sol (devido as suas capacidades de reconhecerem e

[7] Vídeo disponível em: https://www.youtube.com/watch?v=RGXyhqKsKQk&ab_channel=ULAGeometria.

localizarem a luz solar). Von Frisch (1955) ressalta que esse processo se aplica somente se a abelha que realizou a dança puder ver o sol ou, no mínimo, o céu azul.

Para melhor compreensão, a Figura 2 descreve essa dinâmica supondo que o sol e a fonte de alimento estão à direita: primeiro a abelha realiza a dança na parte superior do nefroide no sentido anti-horário. Em seguida, ela realiza o requebrado indicando a direção do alimento. Após isso, ela realiza a dança na parte inferior do nefroide no sentido horário. Por fim, ela realiza, novamente, o requebrado, voltando ao estado inicial da dança. As abelhas que percebem a dança seguem a direção do requebrado até a fonte de alimento tomando sempre como referência a luz solar (ou a angulação que o sol faz com o alimento).

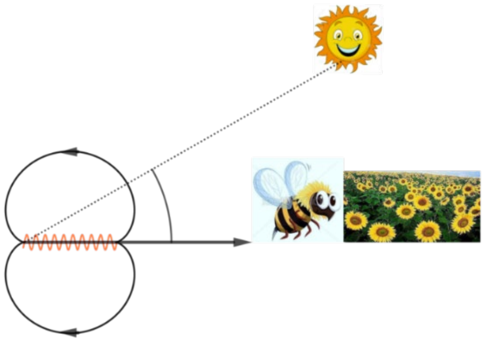

Figura 2: A posição da fonte de alimento em relação ao sol e a direção da dança do requebrado.
Fonte: Imagem da fonte de alimento (girassol) extraída do site: https://sv.ripleybelieves.com/top-sunflower-seed-producing-countries-in-world-2055. Imagem de sol extraída do site: https://docplayer.me/127408613-Forvaltning-av-kortnebbgas-jakt-er-et-viktig-verktoy-ingunn-tombre-camilla-brattland.html.

A dinâmica da Figura 3 é análoga à da Figura 2, supondo, agora, que o sol e a fonte de alimento estão à esquerda da colmeia.

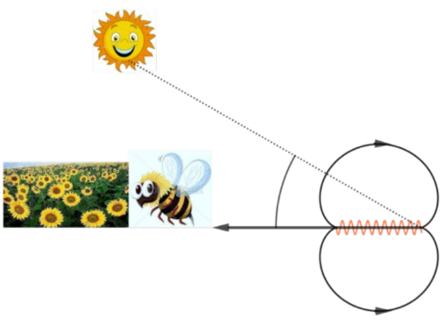

Figura 3: A posição da fonte de alimento em relação ao sol e a direção da dança do requebrado.
Fonte: As mesmas imagens da Figura 2.

Além disso, há uma relação entre o requebrado e a distância do alimento à colmeia, a partir dos 100 metros que corresponde ao início da dança do requebrado. A partir dessa distância, a abelha dá mais informação com relação à localização e a distância que resta a partir desses 100 metros até a fonte de alimento:

> Com uma distância de cem jardas entre o ninho e a fonte de alimento, as danças são rapidamente performadas, as voltas separadas são feitas, seguidamente uma da outra, em rápidas sucessões. Mas à medida que a distância do alimento aumenta, essas voltas são realizadas, seguidamente uma da outra, em intervalos mais longos, fazendo as danças aparecerem mais e mais majestosas, a dança do requebrado na parte reta, ao mesmo tempo, se torna gradualmente mais prolongada e mais vigorosa. (VON FRISCH, 1955, p. 118).

Analisando tanto essas informações de von Frisch (1955) como as informações do vídeo ***Figure 8 Dance - How do bees communicate?***[8], percebe-se que essa distância se reflete no número de "ondas" do requebrado que, nessa animação artística, está representado pelo senoide. Segundo o vídeo ***Figure 8 Dance - How do bees communicate?***, cada "onda", isto é, um máximo do senoide, representa um pé de distância da fonte de alimento ao ninho, ou seja, realizando a devida conversão de medida, uma "onda" equivale a 0.3048 metros ou, aproximadamente, 0.3 metros.

Assim, para exemplificar esse processo, têm-se as Figuras 4, 5 e 6, as quais, respectivamente, representam: o requebrado com três "ondas" que indica que a fonte de alimento está a 100.9 metros da colmeia, o requebrado com cinco "ondas" que indica que a fonte de alimento está a 101.5 metros da colmeia e o requebrado com doze "ondas" que indica que a fonte de alimento está a 103.6 metros da colmeia.

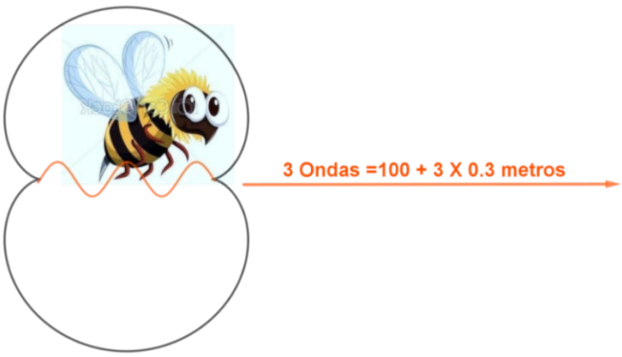

Figura 4: O requebrado com três "ondas" que indica que a fonte de alimento está a 100.9 metros da colmeia.

[8] Vídeo disponível em: https://www.youtube.com/watch?v=PMOUaoQ_9aI.

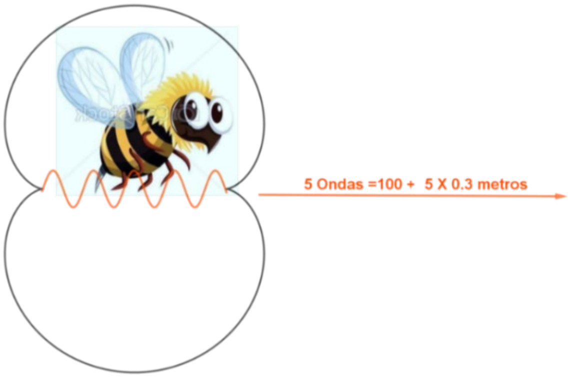

Figura 5: O requebrado com cinco “ondas” que indica que a fonte de alimento está a 101.5 metros da colmeia.

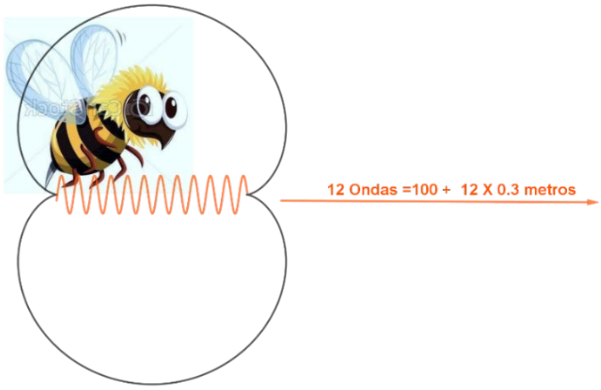

Figura 6: O requebrado com doze “ondas” que indica que a fonte de alimento está a 103.6 metros da colmeia.

Inspirados pelos belos desenhos do livro de von Frisch mostrados na Figura 1, nos comentários de Barron e Plath (2017) e no vídeo **Vetores e A Dança das Abelhas** inicia-se a construção da animação artística da dança do requebrado no *software* GeoGebra, explanada na Seção 2 a seguir.

2. Animação Artística da dança do requebrado no GeoGebra

Partiu-se para a animação construindo o nefroide definido a partir de um ponto $\boldsymbol{P}$ da circunferência $\boldsymbol{C_1}$ que rola sem deslizar sobre o círculo $\boldsymbol{C}$. Sejam $\boldsymbol{r}$ o raio da circunferência menor ($\boldsymbol{C_1}$) e $\boldsymbol{R}$ o raio da circunferência maior ($\boldsymbol{C}$).

Tomando $\boldsymbol{r} = \frac{1}{2}\boldsymbol{R}$, obtêm-se as equações paramétricas do nefroide como sendo:

$$\boldsymbol{x(t) \ = \ (R+r)cos(t) - rcos\left(t\left(\frac{r+R}{r}\right)\right), \ y(t)}$$
$$\boldsymbol{= \ (R+r)sen(t) - rsen\left(t\left(\frac{r+R}{r}\right)\right),}$$

em que $\boldsymbol{t} \in [\boldsymbol{0}, \boldsymbol{2\pi}]$**.** Ao tomar $\boldsymbol{R = 2}$, obtém-se o nefroide mostrado na Figura 7.

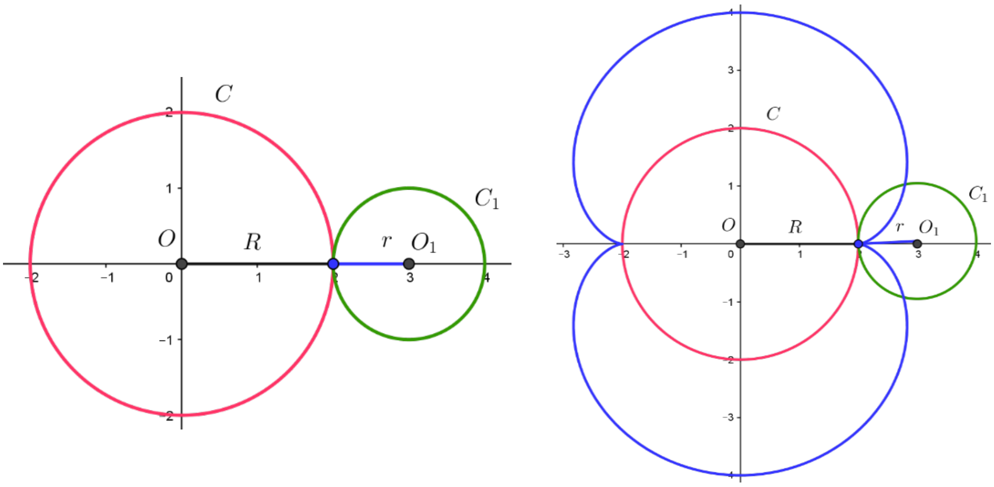

Figura 7: Na imagem (a) mostra-se o desenho do início da construção do nefroide e em (b) a construção finalizada.

Ao realizarem o suposto percurso da dança do requebrado, as abelhas realizam uma vibração rápida através de seus abdomens somente durante sua trajetória intermediária em linha reta, de acordo com von Frisch (1955, p. 116-117). Para facilitar sua visualização, a vibração foi idealizada pelos autores dessa animação como um traço ondulado. A representação desta ondulação é feita através de uma curva senoide em um intervalo determinado como é mostrado na Figura 8:

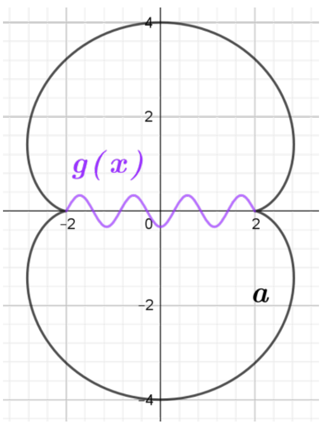

Figura 8: O nefroide (curva $\boldsymbol{a}$) junto com a curva senoide $\boldsymbol{g(x)}$ completando a trajetória da dança.

A função que tem sido escolhida para construir a curva ondulada é dada por:

$$\boldsymbol{g(x)} = \frac{\boldsymbol{sen[(x+2)*\alpha]}}{\boldsymbol{3}}, \boldsymbol{x} \in [\boldsymbol{-2}, \boldsymbol{2}],$$

em que $\boldsymbol{\alpha}$ é um parâmetro a determinar. Na Figura 9, o valor de $\boldsymbol{\alpha = 5.5.}$

Para que a abelha fique com o corpo no meio da curva ao percorrê-la na sua totalidade, há certa dificuldade na animação que tem sido resolvido utilizando duas curvas auxiliares ($\boldsymbol{a'}$ e $\boldsymbol{b'}$) congruentes com a curva principal, através de translações escolhidas convenientemente para alcançar esse objetivo, como mostra a Figura 9.

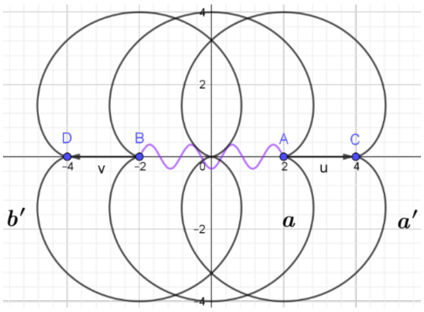

Figura 9: As curvas auxiliares ($\boldsymbol{a'}$ e $\boldsymbol{b'}$) construídas pela translação da curva $\boldsymbol{a}$ através dos vetores **v** = BD e **u** = AC.

A seguir, cria-se um controle deslizante, que nessa animação é denominado de "danca" e definido no intervalo $(\boldsymbol{0}, \boldsymbol{\pi})$ com incremento de $\boldsymbol{0.1}$. O seguinte passo é escolher uma imagem de abelha para sobre os pontos de coordenadas

$$\boldsymbol{P} = \Big(\boldsymbol{x}\big(\boldsymbol{a'}(\boldsymbol{danca})\big), \boldsymbol{y}\big(\boldsymbol{a'}(\boldsymbol{danca})\big)\Big) \; e \; \boldsymbol{Q} = \Big(\boldsymbol{x}\big(\boldsymbol{b'}(\boldsymbol{danca})\big), \boldsymbol{y}\big(\boldsymbol{b'}(\boldsymbol{danca})\big)\Big),$$

em que, $\boldsymbol{a'}$ e $\boldsymbol{b'}$ são as curvas auxiliares construídas como na Figura 10. Escolhe-se com o objetivo de iniciar a animação, uma imagem realística de uma abelha, como exibida na Figura 10.

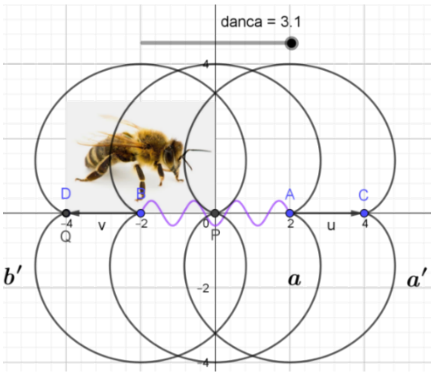

Figura 10: A imagem da abelha apoiada nos pontos P e Q das curvas auxiliares ($\boldsymbol{a'}$ e $\boldsymbol{b'}$).
Fonte: Imagem da abelha disponível em: https://apisantos.com/corpo-da-abelha/.

Depois de várias tentativas percebe-se que os vetores **u** e **v** não são necessariamente os que realizam o movimento almejado. Concluindo-se que a melhor escolha para esses vetores são os expostos na Figura 11.

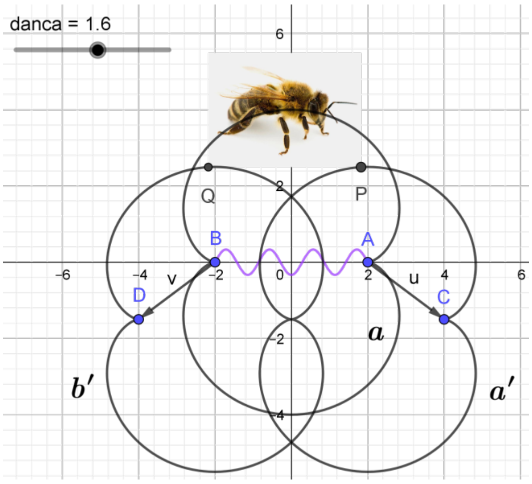

Figura 11: A nova escolha dos vetores **u** e **v** para determinar as novas curvas auxiliares ($\boldsymbol{a'}$ e $\boldsymbol{b'}$) em que a imagem da abelha é inserida.

O mesmo processo que é feito para criar as duas curvas auxiliares a partir da curva principal e dos vetores **u** e **v**, é também utilizado para criar os vetores **w** = SB e **b** = RA que transladam a função $\boldsymbol{g(x)}$ para duas curvas, $\boldsymbol{g_1}$ e $\boldsymbol{g_2}$ para encaixar a imagem da abelha, representando, dessa forma, a parte do requebrado da dança, como mostra a Figura 12. Efetuou-se, ao mesmo tempo, uma primeira escolha para o parâmetro $\boldsymbol{\alpha = 15.5}$.

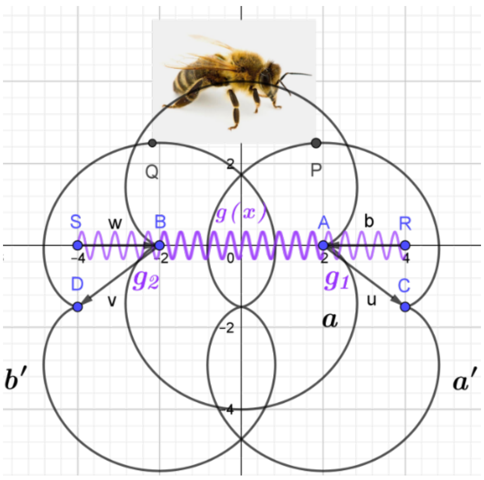

Figura 12: As curvas senoides $\boldsymbol{g_1}$ e $\boldsymbol{g_2}$ auxiliares para a construção da vibração do requebrado.

Um dos maiores desafios da animação tem sido consolidar a dança ao longo das curvas. A solução para que a abelha efetuasse o percurso completo tem sido inserir três outras imagens da mesma abelha. O objetivo é continuar o percurso, na parte superior do nefroide, da primeira abelha, seguido pela “curva de vibração’’, o senoide, depois mudar de sentido e percorrer a parte inferior do nefroide para finalmente voltar a percorrer, no mesmo sentido anterior, a “curva de vibração”. Ou seja, quatro etapas da dança. Feito isso, tem-se que determinar as condições para exibir as imagens de tal forma que não sejam exibidas simultaneamente, de acordo com a variação do controle deslizante. A seguir são descritos os passos realizados durante a construção no GeoGebra para uma melhor compreensão da conclusão da animação:

1º Passo: Criar uma primeira imagem que percorre a parte superior do nefroide com corpo da abelha sobre a curva, como explanada anteriormente. Utilizando as propriedades dessa primeira imagem e o recurso do GeoGebra de “esconder” um objeto, como mostra a Figura 13, o primeiro percurso é concluído.

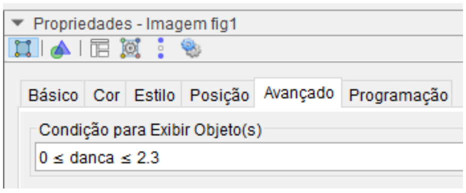

Figura 13: Recurso utilizado para omitir a primeira imagem.

2° Passo: A partir da segunda imagem, há a necessidade de definir um intervalo maior para o controle deslizante “danca” e através de alguns cálculos que determinam esse intervalo, são criados os pontos:

$$\boldsymbol{F} = (\boldsymbol{danca} - \mathbf{6}, \boldsymbol{g_2}\,(\boldsymbol{danca} - \mathbf{6})) \quad e \quad \boldsymbol{E} = (\boldsymbol{danca} - \mathbf{2}, \boldsymbol{g_1}(\boldsymbol{danca} - \mathbf{2})),$$

que dependem do controle deslizante criado inicialmente e das funções senoidais transladadas. Da mesma forma que é feito a omissão da imagem no 1º passo, é realizado para segunda imagem. A Figura 14 mostra como fica a abelha sobre a curva senoide e também se observa o novo valor do controle deslizante.

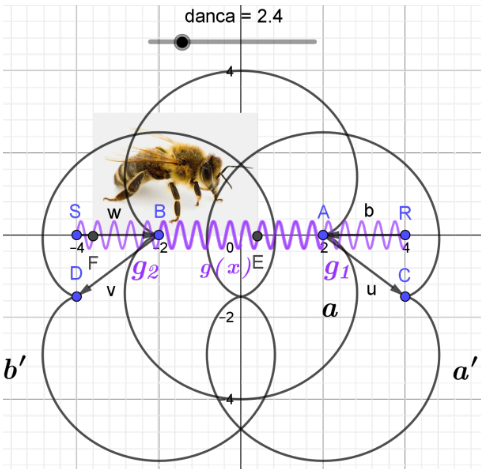

Figura 14: A segunda imagem percorre as senoides g_1 e g_2. O controle deslizante "danca" comanda o percurso no instante 2.4.

3° Passo: A terceira imagem precisa retornar, ao início da "curva de vibração", percorrendo a parte inferior do nefroide no sentido horário. Com o objetivo de obter essa movimentação, realiza-se uma mudança de parametrização da curva nefroide inferior. Assim, criam-se os pontos:

$$\boldsymbol{I} = \left(\boldsymbol{x}\left(\boldsymbol{a}'(\mathbf{2}\boldsymbol{\pi} - (\boldsymbol{danca} - \mathbf{6.1}))\right), \boldsymbol{y}\left(\boldsymbol{a}'(\mathbf{2}\boldsymbol{\pi} - (\boldsymbol{danca} - \mathbf{6.1}))\right)\right) \text{ e}$$

$$\boldsymbol{J} = \left(\boldsymbol{x}\left(\boldsymbol{b}'(\mathbf{2}\boldsymbol{\pi} - (\boldsymbol{danca} - \mathbf{6.1}))\right), \boldsymbol{y}\left(\boldsymbol{b}'(\mathbf{2}\boldsymbol{\pi} - (\boldsymbol{danca} - \mathbf{6.1}))\right)\right).$$

Da mesma forma que no 2º passo, o controle deslizante tem sido estendido com o objetivo de dar continuidade ao movimento, além de omitir a imagem no final do trajeto. Na Figura 15 é mostrado o percurso da abelha na parte inferior do nefroide.

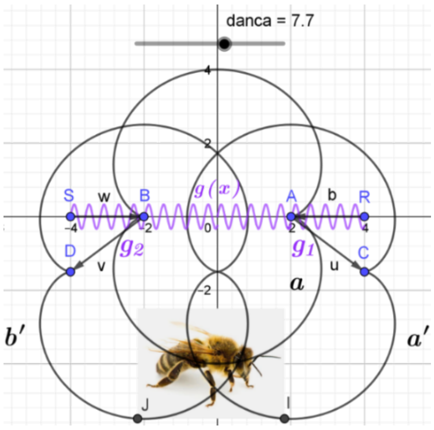

Figura 15: A terceira imagem da abelha percorre a parte inferior do nefroide $\boldsymbol{a}$. O controle deslizante "danca" comanda o percurso no instante 7.7.

4º Passo: Insere-se uma quarta imagem da abelha que deve passar pela senoide para retornar ao ponto de partida da dança. Assim, são definidos os pontos:

$$\boldsymbol{K} = (\boldsymbol{danca} - \mathbf{13}, \boldsymbol{g_2}\ (\boldsymbol{danca} - \mathbf{13})\ )\quad e \quad \boldsymbol{L} = (\boldsymbol{danca} - \mathbf{9}, \boldsymbol{g_1}\ (\boldsymbol{danca} - \mathbf{9})\ ),$$

procedendo-se da mesma maneira que nos passos anteriores, ao ajuste do controle deslizante de forma a dar continuação à dança.

É escolhida como propriedade do controle deslizante a opção “crescente”. São criados dois botões de forma a animar o controle deslizante e parar a dança.

O Protocolo de Construção dessa animação artística pode ser visto em detalhes na Tabela 1. Vale ressaltar que $\boldsymbol{fig1}, \boldsymbol{fig2}$ e $\boldsymbol{fig3}$ são as Figuras da abelhinha utilizadas para a construção no GeoGebra.

Tabela 1: Protocolo da construção da dança do requebrado criado no *software* GeoGebra.

N.	Nome	Descrição	Valor	Legenda
1	Curva a	Curva(3cos(t) - cos(3t), 3sen(t) - sen(3t), t, 0, 2π)	a:(3cos(t) - cos(3t), 3sen(t) - sen(3...	
2	Função f		f(x) = sen((x + 2) * 15.5) / 3	f(x)
3	Função g	g(x) = Se(-2 ≤ x ≤ 2, f(x))	g(x) = Se(-2 ≤ x ≤ 2, sen((x + 2) * ...	g(x)
4	Imagem fig1		fig1	
5	Ponto A		A = (2, 0)	
6	Ponto B		B = (-2, 0)	
7	Ponto C		C = (4, -1.5)	
8	Vetor u	Vetor(A, C)	u = (2, -1.5)	
9	Curva a'	Translação de a por u	a':(3cos(t) - (cos(3t) - 2), 3sen(t) - (...	
10	Ponto D		D = (-4, -1.5)	
11	Vetor v	Vetor(B, D)	v = (-2, -1.5)	
12	Curva b'	Translação de a por v	b':(3cos(t) - (cos(3t) + 2), 3sen(t) - ...	
13	Número danca		danca = 9.2	
14	Ponto P	(x(a'(danca)), y(a'(danca)))	P = (-0.14, -1.46)	
15	Ponto Q	(x(b'(danca)), y(b'(danca)))	Q = (-4.14, -1.46)	
16	Ponto R		R = (4, 0)	
17	Ponto S		S = (-4, 0)	
18	Vetor w	Vetor(S, B)	w = (2, 0)	
19	Vetor b	Vetor(R, A)	b = (-2, 0)	
20	Função g_1	Translação de g por w	g_1(x) = Se(-2 ≤ x - 2 ≤ 2, sen((x - 2 + 2) * 15.5) / 3)	
21	Função g_2	Translação de g por b	g_2(x) = Se(-2 ≤ x + 2 ≤ 2, sen((x + 2 + 2) * 15.5) / 3)	
22	Imagem fig1 $_1$		fig1<sub>1...	
23	Ponto F	(danca - 6, g_2(danca - 6))	F indefinido	

24	Ponto E	(danca - 2, g_1(danca - 2))	E indefinido	
25	Imagem fig1 $_2$		fig1<sub>2...	
26	Imagem fig2		fig2	
27	Imagem fig3		fig3	
28	Ponto I	(x(a'(2π - (danca - 6.1))), y(a'(2π - (danca - 6.1))))	I = (-0.01, -1.5)	
29	Ponto J	(x(b'(2π - (danca - 6.1))), y(b'(2π - (danca - 6.1))))	J = (-4.01, -1.5)	
30	Ponto K	(danca - 13, g $_2$(danca - 13))	K = (-3.8, 0.01)	
31	Ponto L	(danca - 9, g_1(danca - 9))	L = (0.2, 0.01)	

Como o trabalho é gerado em um *software* que utiliza muitas operações matemáticas, a ideia foi procurar uma imagem de uma abelha mais simpática, mesmo que não tão realística. O intuito dessa escolha foi gerar possivelmente um momento de descontração da animação. As Figuras 2, 3, 4, 5 e 6 foram feitas também no ambiente GeoGebra, utilizando controles deslizantes para a rota à fonte de alimento e o número de "ondas" e a animação básica descrita nesta seção.

O resultado final para apresentação na sala de aula é mostrado no ambiente GeoGebra junto com os resultados dos cálculos matemáticos para sua realização. Veja a Figura 16:

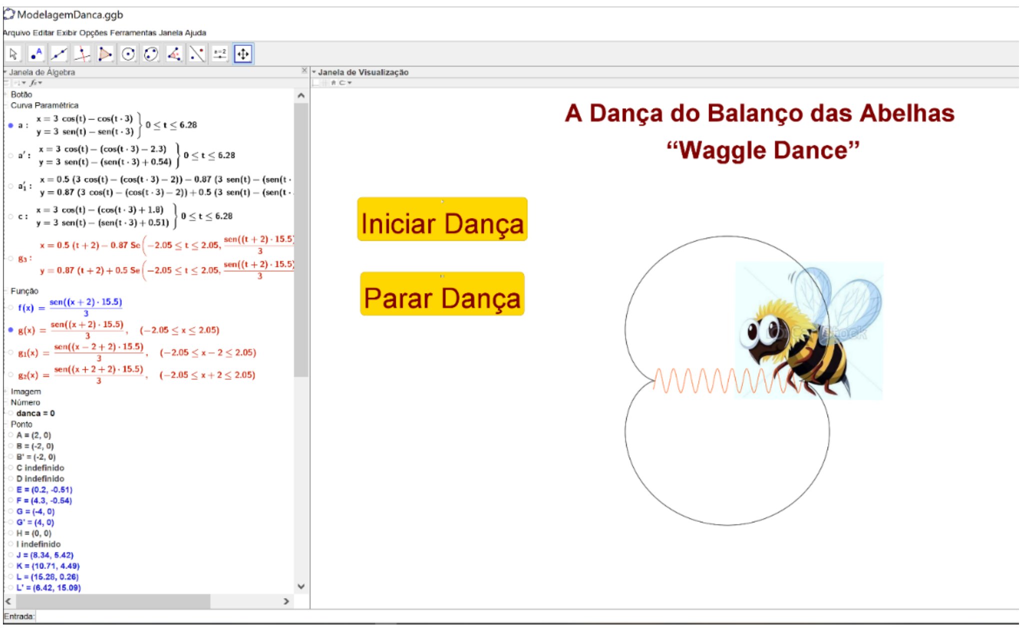

Figura 16: O laboratório da animação artística do GeoGebra com a nova imagem da abelha.

Fonte: Imagem criada no *software* GeoGebra. Imagem da abelha simpática disponível em: https://www.canstockphoto.com/little-bee-flying-on-white-background-36127148.html.

Os *applets* das rotinas em movimento da dança, da direção e localização da fonte de alimento desenvolvida pelos alunos pode ser visto através do link:

https://sites.google.com/site/anamariaufumat/dancaabelhas

Conclusão

A animação artística descrita neste estudo resultou em um trabalho completo de investigação da comunicação das abelhas através da dança do requebrado, que se efetua quando a fonte de alimento está a uma distância maior de 100 metros da colmeia. Uma curva paramétrica escolhida, foi o nefroide, cujas cúspides formam o contorno da parte da dança que termina no requebrado. Os elementos de interatividade do GeoGebra permitiram desenvolver a animação artística de forma simples, comparados com *softwares* que exigem uma maior codificação, mas com eficiência gráfica e robustez computacional.

Do ponto de vista do grupo de estudantes destaca-se o amadurecimento nas diferentes formas de raciocinar que proporcionou à experiência investigativa, assim como no *software* GeoGebra, ambiente no qual os estudantes envolvidos adquiriram conhecimentos de novas ferramentas e recursos. A percepção do coletivo entre os integrantes do grupo, assim como o espírito de equipe, possibilitou a criação de um ambiente de trabalho com a participação ativa de estudantes e professoras, que deram o alicerce, os conhecimentos e o tempo disponível para a elaboração e desenvolvimento desta pesquisa.

Como resultado do estudo da forma como as abelhas realizam sua dança e da influência direta da posição da fonte de recursos até a colmeia, escolheu-se a curva nefroide junto com uma curva senoide. Os elementos de interatividade do GeoGebra, como a inserção de imagem percorrendo as curvas sob um controle deslizante, tem modelado essa dança do requebrado alcançando a expectativa do grupo de pesquisa assim como a audiência dos estudantes em sala de aula.

Referências

BARRON, A. B.; PLATH, J. A. **The Evolution of honeybee dance communication: a mechanistic perspective**. Journal of Experimental Biology. 4339, 2017.

COUVILLON, M. J.; SCHÜRCH, R.; RATNIEKS, F. L.W. *Waggle dance distances as integrative indicators of seasonal foraging challenges*. PloS one, v. 9, n. 4, p. e93495, 2014.

CYSNEIROS, P. G. *Informática Educativa.* Uniandes – Lidie, vol 12, No.1, 1999.

GRÜTER, C., LEADBEATER, E. *Insights from insects about adaptive social information use. Trends in ecology & evolution*, v. 29, n. 3, p. 177-184, 2014.

HOHENWARTER, M. GeoGebra 5.0, 2019. Disponível em: http://www.GeoGebra.org.

PROCTOR, R. A. **The Geometry of Cycloids**. Londres: London, Longmans, Green and Co., 1878.

VON FRISCH, K. **The Dance Language and Orientation of Bees**. New York, Harcourt, Brace. 1955.

VON FRISCH, K.; LINDAUER, M. *The language and orientation of the honeybee*. Annual review of entomology, v. 1, n. 1, p. 45-58, 1956.

VON FRISCH, K. **The Dance Language and Orientation of the Bees**, Harvard University Press, Cambridge, MA. (Second Edition) 1967.

WINSTON, M. L. 2003. **A biologia da abelha**. Tradução de Carlos A. Osowski. Magister. Porto Alegre. 276 p.

Recebido em 22/05/2020