http://dx.doi.org/10.23925/2237-9657.2023.v12i1p090-106

O Jogo Múltiplos e Divisores: uma abordagem híbrida para encontrar o caminho máximo

The Game *Múltiplos e Divisores*: a hybrid approach to find the maximum path

ALEXANDRE DE MATTOS TEIXEIRA[1]

https://orcid.org/0000-0002-2006-9625

DANIELE SIMAS PEREIRA ALVES [2]

https://orcid.org/0000-0003-1009-2618

JOÃO DOMINGOS GOMES DA SILVA JUNIOR[3]

https://orcid.org/0000-0002-1745-0302

LILIANA MANUELA GASPAR CERVEIRA DA COSTA[4]

https://orcid.org/000-0002-5258-1447

RESUMO

O jogo Múltiplos y Divisores desenvolvido por Ceferino e que consta do repositório do GeoGebra.org apresenta algumas inconsistências, em particular sobre a quantidade máxima de números em sequência que podem ser retirados, de acordo com as regras propostas. A determinação da referida quantidade foi um dos aspectos geradores do presente trabalho, que se enquadra na descrição de uma pesquisa qualitativa de cariz exploratório e que engloba dois tipos de procedimentos: a vertente bibliográfica e a experimental. No decorrer da pesquisa algumas características dessas sequências são mostradas e, a partir delas, são formuladas algumas perguntas, cujas respostas serão obtidas por abordagens complementares: numérica e combinatória. O recurso a meios computacionais associados à Teoria dos Grafos foi fundamental para a obtenção de alguns resultados que são aqui apresentados. A correção das inconsistências de programação presentes no applet levou à construção de um novo jogo, mais elaborado do que a proposta original.

Palavras-chave: *GeoGebra; jogo; múltiplos; divisores; grafos.*

ABSTRACT

The game Múltiplos y Divisores developed by Ceferino and available in the GeoGebra.org repository presents some inconsistencies, particularly about the maximum amount of numbers in sequence that can be removed, according to the proposed rules. Determining this quantity was one of the aspects that generated this work, which fits the description of

[1] Núcleo de Estudos e Pesquisa em Ensino de Matemática (NEPEM), Colégio Pedro II - RJ – ale.m.teixeira@gmail.com
[2] Núcleo de Estudos e Pesquisa em Ensino de Matemática (NEPEM), SME São Gonçalo - RJ – daniele.simas@gmail.com
[3] Núcleo de Estudos e Pesquisa em Ensino de Matemática (NEPEM), Colégio Pedro II - RJ – joao.dgomes@gmail.com
[4] Núcleo de Estudos e Pesquisa em Ensino de Matemática (NEPEM), Colégio Pedro II - RJ – lmgccosta@gmail.com

a qualitative exploratory research that includes two types of procedures: the bibliographic and the experimental. During the research some characteristics of these sequences are shown, and, from them, some questions are formulated, whose answers Will be obtained by complementary approaches: numerical and combinatorial. The use of computational resources associated with Graph Theory was fundamental to obtain some results that are presented here. The correction of the programming inconsistencies presents in the applet led to the construction of a new one, more elaborate than the original proposal.

Keywords: *GeoGebra; game; multiples; divisors; graphs.*

Introdução

O tratamento de um mesmo assunto recorrendo a processos diferentes é uma das chaves de aprendizagem daqueles que estudam matemática. Segundo Jo Boaler, a quarta chave de aprendizagem consiste no seguinte: “As rotas neurais e a aprendizagem são otimizadas quando as ideias são consideradas com uma abordagem multidimensional” (BOALER, 2020, p.79). Por isso, o estabelecimento de conexões entre os diversos temas/áreas da Matemática tem se tornado uma ferramenta cada vez mais utilizada em práticas ligadas ao seu ensino e suas aplicações, afinal, sendo dinâmica, ela permite sua inserção em diferentes perspectivas.

Há evidências científicas que mostram que ao estabelecer conexões entre os diversos conceitos matemáticos e usando diversos meios além dos números (palavras, imagens, modelos, algoritmos, jogos, tabelas e gráficos), as rotas neurais se fortalecem, ou seja, "(...) quando aprendemos usando dois ou mais desses meios e as diferentes áreas cerebrais responsáveis por eles se comunicam, a experiência de aprendizagem é maximizada" (BOALER, 2020, p. 81), e, por isso, tais práticas devem estar presentes no nosso cotidiano, o que também vai ao encontro do preconizado nos documentos oficiais.

> O critério central é o da contextualização e da interdisciplinaridade, ou seja, é o potencial de um tema permitir conexões entre diversos conceitos matemáticos e entre diferentes formas de pensamento matemático, ou, ainda a relevância cultural do tema, tanto no que diz respeito às suas aplicações dentro ou fora da Matemática, como à sua importância histórica no desenvolvimento da própria ciência. (BRASIL, 2000, p.43)

Aliado à contextualização e à interdisciplinaridade é inevitável inserir o ensino investigativo, que quase sempre parte de uma situação problema. Partindo dessa situação o aluno se transforma num elemento ativo no processo de aprendizagem construindo seu conhecimento numa sequência que, desencadeando raciocínios por vezes não tão triviais, agrega ao processo de resolução do problema o surgimento de outros conceitos matemáticos. Isto posto, a escola deve proporcionar uma reflexão e um entendimento da realidade que cerca o aluno, tendo presente, também, que "considerando o conhecimento em uma abordagem multidimensional, nossos cérebros são fortalecidos e a aprendizagem é maximizada"(BOALER, 2020, p.82)

A necessidade de desenvolver nos alunos a capacidade de investigação está proposta em documentos oficiais que direcionam a Educação brasileira, como por exemplo os Parâmetros

Curriculares Nacionais (PCN) de Matemática para os anos finais do Ensino Fundamental. Nele está explícito que o aluno deve

> Identificar os conhecimentos matemáticos como meios para compreender e transformar o mundo à sua volta e perceber o caráter de jogo intelectual, característico da Matemática, como aspecto que estimula o interesse, a curiosidade, o espírito de investigação e o desenvolvimento da capacidade para resolver problemas. (BRASIL, 1998, p.47)

É nesse ambiente investigativo que se pode encontrar um terreno fértil para a introdução de conceitos matemáticos que, indo contra as tendências atuais de currículo em matemática, não são estudados nem no Ensino Fundamental (EF) nem no Ensino Médio (EM), mas que se encaixam perfeitamente na modelagem de determinados tipos de situação problema.

> As tarefas de investigação são classificadas como um tipo específico de problema que parte de enunciados menos estruturados, que permite a formulação de diversos tipos de questões e possibilita a realização de explorações em diferentes direções. Nesse tipo de atividade, o interesse principal reside nas ideias matemáticas e nas suas relações e o aluno assume o papel de protagonista de sua aprendizagem, pois cabe a ele definir quais questões investigar e quais caminhos percorrer. (VIEIRA E ALEVATTO, 2012, p.10)

Um exemplo disso é o recurso à teoria dos grafos que se mostra uma ferramenta eficaz para resolver problemas que surgem em outros contextos, como o que será apresentado no decorrer deste artigo.

O estudo dos grafos abre caminho para transpor barreiras criadas pelos alunos sobre algumas crenças ainda enraizadas, sendo a principal delas a não aplicabilidade dos conceitos matemáticos em situações problema. Diversos trabalhos presentes na literatura fazem referência à utilização dos grafos na Educação Básica, abrangendo os mais diferentes temas. Atividades que fazem uso dos Grafos podem ser vistas em: (BALTAZAR e PEREIRA, 2018), (CARDOSO, 2017), (MÜLLER e BAIER, 2021), além de tantos outros presentes na literatura.

Os grafos são estruturas que estudam as relações entre objetos de um conjunto e não são exploradas no cotidiano escolar brasileiro, contudo trata-se de uma ferramenta poderosa que modela e soluciona diversas situações problema, não só na matemática, como em diversas outras áreas.

Desta forma, o presente trabalho reforça a importância da inserção da Teoria dos Grafos no contexto da Educação Básica, como uma ferramenta poderosa na resolução de problemas de otimização combinatória de uma forma agradável e contextualizada. Na Teoria dos Grafos, em muitos casos, se faz necessário a utilização de recursos computacionais, para tomar determinadas decisões ou até mesmo testar todos os casos possíveis, situações pouco viáveis de se fazer sem esse recurso quando se estudam grafos com grande número de vértices. Um exemplo desta situação é o Teorema das Quatro Cores, que foi o primeiro teorema importante a ser provado usando um computador (SWART, 1980). Destarte, neste trabalho, foi utilizado o SageMath[5] (SM) para auxiliar na obtenção de caminhos entre vértices do grafo.

Além do SM, o GeoGebra (ggb)[6] foi um outro software livre que esteve na gênese deste trabalho. Nele, foi utilizado o applet que consiste no jogo "Múltiplos y Divisores”[7], construído por Ceferino, e que serviu de base para a elaboração deste artigo. A utilização de um jogo como ponto de partida, permite a construção de ideias que conduzem ao desenvolvimento de diversos processos algorítmicos. Dessa forma, Tarouco et. al. (2004) esclarece que, “(...) os jogos podem ser ferramentas eficientes, pois eles divertem enquanto motivam, facilitam o aprendizado e aumentam a capacidade de retenção do que é ensinado, exercitando as funções mentais e intelectuais do jogador.”

Vale destacar que alguns “*bugs*” foram encontrados no applet original proposto. A indicação de uma cota superior que se mostrou incorreta ao ser por nós ultrapassada e a impossibilidade de clicar num número e retornar para algum dos seus divisores foram questões relatadas ao autor através de diversos e-mails. Por falta de retorno, e atendendo à natureza e complexidade do problema encontrado, a pesquisa do valor da referida cota superior foi efetuada pelos presentes pesquisadores. Optou-se, também, por refazer o jogo corrigindo os problemas detectados.

Assim, o objetivo principal do presente trabalho é apresentar os procedimentos efetuados pra encontrar o comprimento máximo das sequências a serem retiradas durante a execução do jogo. E, em também, apresentar uma versão do jogo com um novo layout (https://www.geogebra.org/m/mzhfukcv). No novo applet, que será apresentado na seção seguinte, consta a opção de realizar o jogo com diferentes níveis, ou seja, com 16 números (4x4), 25 números (5x5), 36 números (6x6) ou 49 números (7x7), contemplando, assim, níveis graduais de dificuldade. Além disso, optou-se por não divulgar, a priori, a maior quantidade possível de números a serem retirados em cada nível. Com isso se pretende tornar o jogo mais instigante, pois o jogador vai sendo informado de que ainda não atingiu o máximo, no entanto, ele desconhece qual é esse mesmo valor. O jogo ainda registra e transcreve a sequência de números clicados pelo usuário à medida que estes são retirados e, caso o usuário perceba que não tomou o melhor caminho, para a retirada dos números, poderá reiniciar o jogo a qualquer momento.

Estamos perante uma pesquisa qualitativa de cariz exploratório que engloba dois tipos de procedimentos: a vertente bibliográfica e a experimental. Esta pesquisa seguiu as etapas tradicionais descritas na literatura ao percorrer “um caminho que é constituído de três momentos intimamente relacionados e que, muitas vezes, sobrepõem-se: planejamento, execução e comunicação dos resultados.” (ZANELLA, 2013, p.45)

Na seção seguinte, é feita a descrição do jogo, contextualizando a problemática por ele originada. Para responder aos questionamentos levantados, são apresentadas nas seções 3 e 4, respectivamente, abordagens numéricas e combinatórias. E, a finalizar, algumas considerações são tecidas.

[5] https://www.sagemath.org/pt/ último acesso em 10 de fevereiro de 2022.
[6] https://www.geogebra.org/about?lang=pt-PT último acesso em 10 de fevereiro de 2022.
[7] https://www.geogebra.org/m/YfXZjNaU último acesso em 10 de fevereiro de 2022.

2. O jogo “Múltiplos e divisores”

Com o isolamento social decorrente da pandemia, testemunhou-se que muitas instituições de ensino se viram obrigadas a inserir atividades remotas no quotidiano escolar. A vivência dessa situação inusitada teve como consequência não só a busca por tarefas/atividades que pudessem instigar e despertar a prática investigativa nos alunos, como também que trouxessem o lúdico e a aplicação de conceitos matemáticos para dentro dos ambientes virtuais de aprendizagem, afinal basta observarmos nossas ocupações diárias e verificar a quantidade de práticas lúdicas e matemáticas nos envolvendo a todo instante. Como consequência do momento vivido, diversas atividades diferenciadas foram criadas e pesquisadas de forma a se encaixar no planejamento de cada instituição.

È notório que os jogos digitais invadiram o quotidiano dos nossos alunos, despertando um interesse ímpar, possuindo diferentes aspectos e finalidades além de diversas propostas de entretenimento. Segundo Menezes (2003, p. 3), os jogos digitais normalmente possuem desafios a serem vencidos através de um conjunto de regras e situações dinâmicas que vão sendo apresentadas ao jogador. Sendo assim, o ato de jogar é exercido de maneira voluntária e, inevitavelmente, proporciona um ambiente lúdico além de permitir que o usuário possa aprender e brincar como se fizesse parte do próprio jogo.

Assim sendo, durante o planejamento do ano letivo de 2020 a equipe responsável pelo sexto ano do ensino fundamental de uma escola pública do Rio de Janeiro, selecionou no portal *GeoGebra.org* o jogo “Múltiplos y Divisores” como atividade a ser integrada como um recurso didático para auxiliar na aprendizagem e consolidação dos objetos de conhecimento, e a ser executada pelos alunos durante esse ano letivo.

O jogo original, elaborado em espanhol, foi desenvolvido como um applet por Ceferino A. Nele é apresentada uma tabela com os inteiros de 1 a 36 dispostos em seis linhas e seis colunas. O objetivo do jogo consiste em retirar a maior quantidade possível de números com a condição de que cada número extraído seja múltiplo ou divisor do retirado anteriormente. Dessa forma, para iniciar o jogo, deve selecionar-se um número qualquer. Após a seleção, o segundo número escolhido deve ser um divisor ou múltiplo desse primeiro e cada número escolhido não poderá ser mais utilizado. O terceiro número deve ser divisor ou múltiplo do segundo e assim sucessivamente. Essa relação do número seguinte com o seu predecessor deve ser mantida até que não mais seja possível continuar com a sequência.

Este jogo é uma versão reduzida de “Factors and Multiples Game[8]” que se encontra no portal Nrich[9] da Faculdade de Matemática da Universidade de Cambrigde, UK, atividade que também se pode encontrar no site da AIMING HIGH Teacher Network [10] e que resulta do problema[11] proposto por Itay

[8] https://nrich.maths.org/factorsandmultiples último acesso em 10 de fevereiro de 2022.
[9] https://nrich.maths.org/ último acesso em 10 de fevereiro de 2022.
[10] https://aiminghigh.aimssec.ac.za/factors-and-multiples-game/ último acesso em 10 de fevereiro de 2022.
[11] https://fivethirtyeight.com/features/pick-a-number-any-number/ último acesso em 10 de fevereiro de 2022.

Bavly, no blog FiveThirtyEigth em 28 de julho de 2017 e cuja solução[12] se pode encontrar numa nota de autor desconhecido.

Como se pode observar, o jogo em si possui uma ideia bem simples e possível de ser executada em sala de aula. Ao abrir o applet, da versão proposta por Ceferino, encontra-se a informação de que é possível extrair até 26 números, ficando implícita a informação de que este seria o número máximo de números a serem retirados.

Durante o processo de solução da atividade, com esse applet, ao desenvolver exemplos para apresentar aos respectivos alunos, foram encontradas pelos pesquisadores sequências com mais de 26 elementos, pondo em causa a informação que consta no applet e dando origem a algumas reflexões:

- *Será possível encontrar uma sequência usando a relação descrita com os 36 números?*
- *Caso não seja possível extrair todos os números, qual será o maior número de termos dessa sequência?*
- *Quantas sequências de comprimento máximo existem?*

Responder a esses questionamentos foi também um dos elementos motivadores para a pesquisa que originou este artigo. Perante eles, algumas estratégias foram pensadas a fim de obter, o valor máximo de elementos em uma sequência que satisfizesse as regras do jogo. E, consequentemente, foram elaboradas duas abordagens com o objetivo de lhes dar resposta. As abordagens utilizadas foram: abordagem numérica e abordagem combinatória.

Paralelamente a esta reflexão, foram efetuadas as alterações necessárias de forma a resolver os sucessivos problemas encontrados no applet do jogo. Assim, o "novo" applet do jogo, com as devidas correções em relação ao elaborado por Ceferino, segue o mesmo raciocínio e o seu layout pode ser observado na Figura 1.

(a) (b)

FIGURA 1: Imagem da tela inicial do novo jogo
FONTE: Os autores

[12]https://theorie.ikp.physik.tu-darmstadt.de/qcd/numchain.pdf último acesso em 10 de fevereiro de 2022.

3. Abordagem numérica

A primeira abordagem do problema foi de natureza numérica. Antes de passar à sua explanação, vamos definir os principais conceitos envolvidos.

Os primeiros conceitos importantes e necessários são o de múltiplo e, complementarmente, o de divisor de um número. Segundo Aires (2015, p. 35) "O número natural a divide o número natural b se, e somente se, existe pelo menos um número natural q tal que $a \cdot q = b$. Neste caso, se diz ainda que a é divisor de b, b é múltiplo de a e que b é divisível por a".

Outra noção importante, que está presente no problema é o de número primo. Segundo o site Mathworld Wolfram, um número primo[13] é "um inteiro positivo $p > 1$ que não possui outros divisores inteiros positivos além de 1 e do próprio p". Em outras palavras, um número primo p possui exatamente dois divisores inteiros positivos e distintos: 1 e p.

Por outro lado, ainda de acordo com Mathworld Wolfram "um número é dito semiprimo[14], também chamado 2-quasi primo, biprimo ou pq-número, se é um número composto que é produto de dois números primos (possivelmente iguais)".

Uma vez apresentados os conceitos necessários, passamos à descrição das estratégias utilizadas:

- A_1) Buscar equilíbrio quantitativo ao longo das escolhas dos números que são maiores ou menores do que 18, já que os primeiros não possuem nenhum múltiplo no conjunto;
- A_2) Escolher o número 1 somente antes ou após um número primo;
- A_3) Observar se é possível inserir números em uma sequência finalizada;
- A_4) Pensar em termos de subsequências inseridas na sequência principal e movê-las;

A primeira sequência obtida com mais de 26 números foi a seguinte:

34, 17, 1, 22, 11, 33, 3, 21, 7,14, 28, 4, 20, 5, 15, 30, 10, 2, 32, 16, 8, 24, 12, 6, 36, 9, 27.

Ao exibir esta sequência, com 27 elementos, a cota superior estabelecida por Ceferino A. foi posta em causa abrindo precedente para a colocação de questionamentos, alguns já propostos anteriormente.

Note-se que ao escrever a sequência anterior houve a preocupação de usar os maiores números primos que possuem múltiplos inferiores a 36, mas procurando ter presente o equilíbrio entre as quantidades de números usados inferiores a 18 e superiores a 18, respectivamente, como referido na estratégia (A_1). Além disso, logo no início, ao escolhermos o número 17, usamos a estratégia (A_2).

Usando como base esta sequência e mantendo a ordem dos seus nove termos iniciais, introduzindo dois novos números construiu-se a primeira sequência de 29 elementos (S_{29}) representada a seguir:

34, 17, 1, 22, 11, 33, 3, 21, 7, 35, 5, 15, 30, 10, 20, 2, 14, 28, 4, 32, 16, 8, 24, 12, 6, 36, 18, 9, 27.

[13] https://mathworld.wolfram.com/PrimeNumber.html último acesso em 10 de fevereiro de 2022.
[14] https://mathworld.wolfram.com/Semiprime.html último acesso em 10 de fevereiro de 2022.

Esta sequência resulta das seguintes alterações: acrescentou-se o número 35 após o 7 e, em seguida foi inserida a subsequência 5, 15, 30, 10; a subsequência 14, 28, 4 foi colocada entre o 2 e o 32 (A_4) e acrescentou-se o 18 entre o 36 e o 9 (A_3).

Paralelamente às estratégias de abordagens numéricas citadas anteriormente, iniciaram-se análises quantitativas de números primos e semiprimos.

Verifica-se que há 11 números primos menores que 36, a saber: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29 e 31. Destes, os maiores que 18, merecem especial atenção, uma vez que não possuem múltiplos de 1 a 36 e, consequentemente, só dois deles poderão ser usados simultaneamente.

Tendo em atenção este fato, estamos em condições de responder negativamente à primeira pergunta colocada, sobre as possibilidades de usar todos os 36 números numa mesma sequência. Vejamos o que ocorre ao incluir estes quatro números numa sequência. Como estes números apenas possuem o 1 como possível divisor e não possuem múltiplos, terão que iniciar ou terminar a sequência.

Caso I: usando dois dos números 19, 23, 29 e 31.

Escolhe-se um destes números primos para iniciar uma sequência. O segundo elemento será necessariamente 1 e na terceira posição ter-se-á um dos elementos restantes. Há 12 possibilidades.

Ao proceder desta forma, são obtidos blocos de 3 elementos que não é possível acrescentar de nenhum outro número inferior a 36, nem alocar em nenhuma sequência que já exista. Deste modo, estas 12 sequências terão exatamente três elementos e exatamente dois desses primos.

Caso II: usando apenas um dos números 19, 23, 29 e 31.

Escolhendo um dos quatro números para primeiro elemento da sequência, o segundo será necessariamente 1 e o terceiro elemento será diferente de 19, 23, 29 ou 31.

Não será possível colocar, a partir do 4º termo da sequência, um dos três primos que sobraram, uma vez que cada um deles não possui múltiplo menor ou igual a 36 e o seu único divisor próprio, o 1, já foi listado. Do que foi visto podemos concluir que a sequência terá no máximo 33 elementos.

Paralelamente, procurando dar resposta à segunda questão, na procura do número máximo de 33 elementos da sequência, fez-se a análise da quantidade de primos e semiprimos de 1 a 36. Verificou-se uma quantidade fixa desses tipos de números ausentes em outros exemplos da sequência de 29 termos. Os semiprimos maiores que 18: 21, 22, 25, 26, 33, 34 e 35 não têm múltiplos inferiores a 36 e têm apenas 1 ou 2 divisores próprios diferentes de 1. Assim, a sua colocação na sequência requer especial atenção.

Observou-se, que na sequência de 29 termos: 13, 26, 2, 22, 11, 33, 3, 21, 7, 14, 28, 4, 32, 16, 8, 24,12, 36, 9,18, 6, 30,15, 5, 20, 10, 1, 34, 17 não fazem parte quatro primos e dois semiprimos, além do 27, que em termos do número de múltiplos e divisores tem o comportamento dos semi-primos maiores do que 18. Enquanto que na sequência (S_{29}), listada anteriormente, não havia cinco primos e dois semiprimos. Esse resultado, obtido manualmente a partir da inclusão de mais um primo na suposta maior sequência, nos fez intuir que poderíamos ainda encontrar uma sequência de 30 termos ou mais.

Repare-se que na sequência anterior, a estratégia A2 não foi respeitada, no entanto, ela permanece válida, ao se efetuar a troca do 34 com o 17.

Com esta abordagem, não se obtiveram novos resultados que possibilitassem responder às perguntas (2) e (3). Assim, partiu-se para outra abordagem que será apresentada na seção seguinte.

4. Abordagem combinatória

A modelagem na resolução de problemas tem um papel essencial em todos os níveis de ensino de Matemática. Neste sentido, a utilização de diferentes vieses ao olhar determinado problema pode originar que mude completamente o enfoque da solução. O que é enriquecedor, não só para o professor, como também para os alunos envolvidos.

Diante disto, se pode notar que o problema proposto pelo jogo pode ser inserido numa abordagem combinatória, ou seja, pode ser modelado e resolvido utilizando a Teoria dos Grafos. O estudo de combinatória na Educação Básica tem um foco principal voltado para a contagem, por conseguinte, o recurso à combinatória de existência e/ou otimização não é muito usual.

Começaremos por apresentar alguns conceitos básicos sobre grafos necessários para o entendimento do trabalho, presentes em (MERRIS, 2001) que é também sugerido para maiores aprofundamentos sobre a Teoria dos Grafos.

Um grafo G é uma estrutura formada por um conjunto não vazio de vértices (ou nós) e um conjunto de pares de elementos do conjunto de vértices, chamados de arestas. Como notação, para o conjunto de vértices será usado $V(G)$ ou apenas V e para o conjunto de arestas será usado $E(G)$ ou apenas E. Assim, o grafo G é denotado usualmente por $G = (V, E)$.

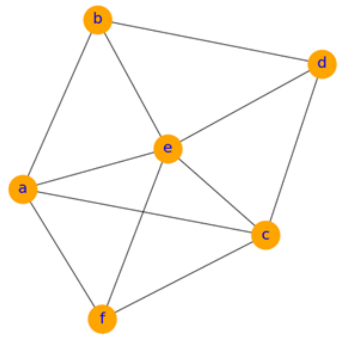

FIGURA 2: Grafo com 6 vértices e 11 arestas
FONTE: Os autores

Na Figura 2, se pode observar um grafo com 6 vértices e 11 arestas. Nele, temos o conjunto $V = \{a, b, c, d, e\}$ e o conjunto $E = \{ab, ac, ae, af, be, bd, cd, ce, cf, de, ef\}$. As arestas de um grafo podem ter vértice inicial e final distintos, ou não. Neste último caso dizemos que tal aresta é um laço, como se pode ver no vértice c do exemplo (a) da Figura 3. As arestas podem ter orientação ou não. As arestas do grafo (a) não são orientadas, enquanto no grafo (b), a cada aresta é associada uma orientação.

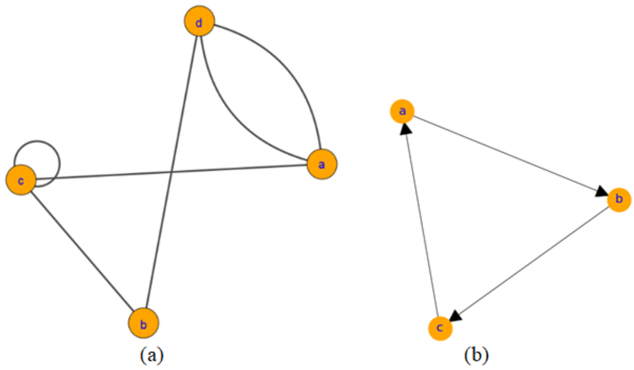

FIGURA 3: Exemplo de grafos com laço, arestas paralelas e orientação
FONTE: Os autores

Um grafo é chamado de simples quando não possui laços ou arestas paralelas e um grafo é chamado de ponderado quando suas arestas possuem alguma valoração[15]. Neste artigo iremos trabalhar somente com grafos simples, não ponderados e não orientados que, a partir daqui, denominaremos apenas de grafos.

Um passeio de tamanho k em um grafo G é uma sequência finita de $k+1$ vértices, v_0, v_1, ..., v_{k-1}, v_k, tal que, para todo $1 \leq i \leq k$, a aresta $v_{(i-1)}v_i$ pertence a E. Já uma cadeia ou trilha é um passeio sem repetição de arestas e um caminho é uma cadeia sem repetição de vértices.

Seja P o conjunto de todos os caminhos possíveis contidos no grafo G. Um caminho C de P é maximal se nenhum outro caminho de G contém C propriamente. Um caminho C em P será máximo se o número de arestas de C for maior ou igual ao número de arestas de D, para todo D em P. Note que todo caminho máximo é maximal, mas nem todo caminho maximal é máximo.

Para modelar o problema colocado vamos recorrer a um grafo G (Figura 4) que satisfaz as seguintes condições: os vértices são os números de 1 a 36 e dois vértices v_i e v_j são conectados por uma aresta se v_i é múltiplo de v_j ou se v_i é divisor de v_j.

[15] É importante ressaltar que um grafo não ponderado pode ser visto como um grafo ponderado cuja valoração de todas as suas arestas é igual a 1.

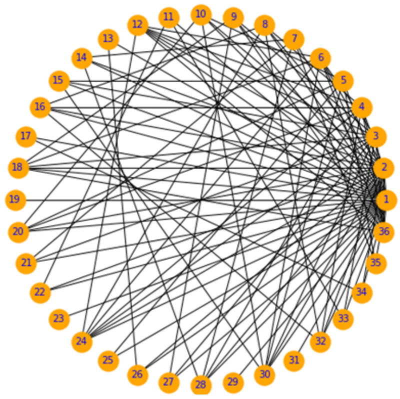

FIGURA 4: Modelagem do jogo pelo grafo G
FONTE: Os autores

Relembrando, o objetivo do jogo consiste em retirar a maior quantidade possível de números com a condição de que cada número extraído seja múltiplo ou divisor do retirado anteriormente, o que corresponde a encontrar um caminho maximal entre dois vértices quaisquer do grafo e, a partir de todos os caminhos maximais, obter o caminho máximo.

Assim, e partindo da existência de caminhos com pelo menos 29 vértices, interessava saber se estes caminhos eram máximos ou se existiria algum caminho com mais vértices. E, em caso afirmativo, se esse caminho seria único. Não sendo único, interessa saber se possuem os mesmos vértices inicial e final?

Para responder aos questionamentos levantados, usou-se o SM para determinar todos os maiores caminhos entre todos os pares de vértices do grafo G. Verificou-se que além de caminhos com 29 vértices, que sabemos existir, é possível encontrar caminhos com 30 vértices, sendo este o número máximo encontrado.

Através de testes computacionais realizados, foi verificado que, dado um caminho máximo, fixando apenas os vértices inicial e final, havia vários caminhos com exatamente os mesmos vértices, e que resultavam de permutações de alguns dos vértices que não o inicial e o final. A quantidade de pares de vértices inicial e final que dão origem a caminhos máximos de comprimento maior ou igual a 25 é apresentada na Figura 5.

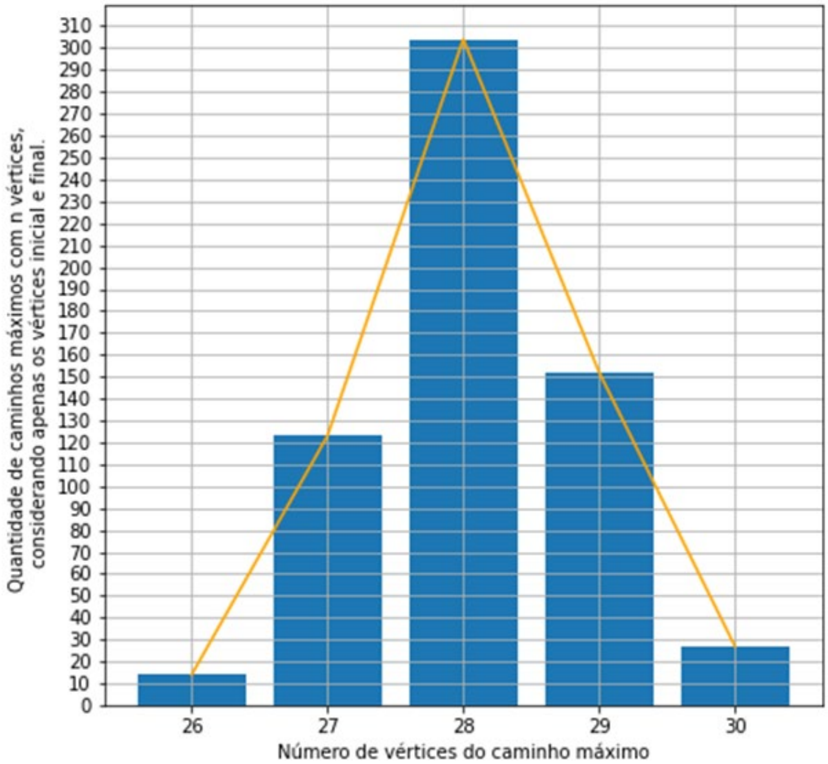

FIGURA 5: Quantidade de pares de vértices inicial e final dos maiores caminhos do grafo G
FONTE: Os autores

Tendo presente que um caminho de comprimento k tem $k+1$ vértices, é possível confirmar que o caminho máximo tem comprimento 29, envolvendo 30 vértices e é possível encontrar 27 pares, distintos, que possuem pelo menos um caminho máximo entre eles.

Os 27 pares de vértices inicial e final que possuem pelo menos um caminho de comprimento 29 estão exibidos na Tabela 1.

Tabela 1: Exemplo de caminhos com 30 vértices, para cada par de vértices inicial e final

Caminhos máximos obtidos do grafo G
13, 26, 2, 34, 17, 1, 22, 11, 33, 3, 27, 9, 18, 36, 12, 6, 24, 8, 32, 16, 4, 20, 10, 30, 15, 5, 35, 7, 28, 14
13, 26, 2, 34, 17, 1, 22, 11, 33, 3, 27, 9, 18, 36, 12, 6, 24, 8, 16, 32, 4, 28, 14, 7, 35, 5, 20, 10, 30, 15
13, 26, 1, 14, 28, 7, 35, 5, 15, 30, 10, 20, 4, 32, 16, 8, 24, 12, 6, 18, 36, 9, 27, 3, 33, 11, 22, 2, 34, 17
13, 26, 2, 34, 17, 1, 22, 11, 33, 3, 27, 9, 18, 36, 12, 6, 24, 8, 32, 16, 4, 28, 14, 7, 35, 5, 15, 30, 10, 20
13, 26, 1, 17, 34, 2, 28, 14, 7, 35, 5, 15, 30, 10, 20, 4, 16, 32, 8, 24, 12, 6, 18, 36, 9, 27, 3, 33, 11, 22
13, 26, 1, 17, 34, 2, 22, 11, 33, 3, 15, 30, 10, 20, 5, 35, 7, 14, 28, 4, 16, 32, 8, 24, 12, 36, 6, 18, 9, 27
13, 26, 2, 34, 17, 1, 22, 11, 33, 3, 27, 9, 36, 18, 6, 12, 24, 8, 16, 32, 4, 20, 10, 30, 15, 5, 35, 7, 14, 28

13, 26, 2, 14, 28, 7, 35, 5, 15, 30, 10, 20, 4, 16, 32, 8, 24, 12, 6, 18, 36, 9, 27, 3, 33, 11, 22, 1, 17, 34
14, 28, 7, 35, 5, 15, 30, 10, 20, 4, 32, 16, 8, 24, 12, 6, 18, 36, 9, 27, 3, 33, 11, 22, 2, 26, 13, 1, 34, 17
14, 28, 7, 35, 5, 15, 30, 10, 20, 4, 32, 16, 8, 24, 12, 6, 18, 36, 9, 27, 3, 33, 11, 22, 2, 34, 17, 1, 13, 26
14, 28, 7, 35, 5, 15, 30, 10, 20, 4, 32, 16, 8, 24, 6, 12, 36, 18, 9, 27, 3, 33, 11, 22, 2, 26, 13, 1, 17, 34
15, 30, 10, 20, 5, 35, 7, 14, 28, 4, 16, 32, 8, 24, 12, 36, 6, 18, 9, 27, 3, 33, 11, 22, 2, 26, 13, 1, 34, 17
15, 30, 10, 20, 5, 35, 7, 14, 28, 4, 16, 32, 8, 24, 12, 6, 18, 36, 9, 27, 3, 33, 11, 22, 2, 34, 17, 1, 13, 26
15, 30, 10, 20, 5, 35, 7, 14, 28, 4, 32, 16, 8, 24, 6, 12, 36, 18, 9, 27, 3, 33, 11, 22, 2, 26, 13, 1, 17, 34
17, 34, 1, 13, 26, 2, 22, 11, 33, 3, 27, 9, 18, 36, 12, 6, 24, 8, 32, 16, 4, 28, 14, 7, 35, 5, 15, 30, 10, 20
17, 34, 2, 26, 13, 1, 27, 9, 18, 36, 12, 6, 24, 8, 16, 32, 4, 28, 14, 7, 35, 5, 20, 10, 30, 15, 3, 33, 11, 22
17, 34, 2, 22, 11, 33, 3, 15, 30, 10, 20, 5, 35, 7, 14, 28, 4, 16, 32, 8, 24, 6, 12, 36, 18, 9, 27, 1, 13, 26
17, 34, 2, 26, 13, 1, 22, 11, 33, 3, 15, 30, 10, 20, 5, 35, 7, 14, 28, 4, 16, 32, 8, 24, 12, 36, 6, 18, 9, 27
17, 34, 1, 13, 26, 2, 22, 11, 33, 3, 27, 9, 18, 6, 36, 12, 24, 8, 16, 32, 4, 20, 10, 30, 15, 5, 35, 7, 14, 28
20, 10, 30, 15, 5, 35, 7, 14, 28, 4, 32, 16, 8, 24, 12, 6, 18, 36, 9, 27, 3, 33, 11, 22, 2, 34, 17, 1, 13, 26
20, 10, 30, 15, 5, 35, 7, 14, 28, 4, 32, 16, 8, 24, 12, 6, 18, 36, 9, 27, 3, 33, 11, 22, 2, 26, 13, 1, 17, 34
22, 11, 33, 3, 27, 9, 18, 6, 36, 12, 24, 8, 32, 16, 4, 20, 10, 30, 15, 5, 35, 7, 28, 14, 2, 34, 17, 1, 13, 26
22, 11, 33, 3, 27, 9, 18, 6, 36, 12, 24, 8, 16, 32, 4, 28, 14, 7, 35, 5, 15, 30, 10, 20, 2, 26, 13, 1, 17, 34
26, 13, 1, 17, 34, 2, 22, 11, 33, 3, 15, 30, 10, 20, 5, 35, 7, 14, 28, 4, 32, 16, 8, 24, 12, 6, 18, 36, 9, 27
26, 13, 1, 17, 34, 2, 22, 11, 33, 3, 27, 9, 18, 6, 36, 12, 24, 8, 16, 32, 4, 20, 10, 30, 15, 5, 35, 7, 14, 28
27, 9, 36, 18, 6, 12, 24, 8, 32, 16, 4, 28, 14, 7, 35, 5, 20, 10, 30, 15, 3, 33, 11, 22, 2, 26, 13, 1, 17, 34
28, 14, 7, 35, 5, 15, 30, 10, 20, 4, 16, 32, 8, 24, 6, 12, 36, 18, 9, 27, 3, 33, 11, 22, 2, 26, 13, 1, 17, 34

FONTE: Os autores

A seguir, Figura 6, temos algumas imagens de caminhos máximos construídas no SM.

FIGURA 6: Quatro caminhos máximos
FONTE: Os autores

Exibir todos os caminhos de comprimento 29 pode ser extremamente custoso computacionalmente. Observe a Tabela 2, nela é exibida a quantidade de caminhos de comprimento máximo apenas para os caminhos que se iniciam no vértice 13.

Tabela 2: Total de caminhos máximos distintos de G tendo o vértice 13 como vértice inicial

Pares de vértices (inicial, final)	(13,14)	(13,15)	(13,17)	(13,20)	(13,22)	(13,27)	(13,28)	(13,34)
Quantidade de caminhos distintos	16	16	128	16	64	16	16	64

FONTE: Os autores

Conclusão

É notório que a utilização dos jogos educacionais tornou-se uma realidade cada vez mais presente no cotidiano escolar. Isso deve-se ao fato de que, além de prenderem a atenção do aluno, o auxiliam na criação, familiarização de conceitos e construção de conhecimento. Além disso, também instigam e aprimoram o raciocínio investigativo.

Consequentemente, as atividades que utilizam jogos tornam-se um instrumento de relevância ímpar no processo de aprendizagem. Afinal, a dimensão lúdica do jogo permite, de forma dinâmica, o desenvolvimento dos mais diversos aspectos relacionados às mais diferentes áreas do conhecimento. Grando considera que

> o jogo, em seu aspecto pedagógico, se apresenta produtivo ao professor que busca nele um aspecto instrumental e, portanto, facilitador na aprendizagem de estruturas matemáticas, muitas vezes de difícil assimilação, e também produtivo ao aluno, que desenvolveria sua capacidade de pensar, refletir, analisar, compreender conceitos matemáticos, levantar hipóteses, testá-las e avaliá-las (investigação matemática), com autonomia e cooperação. (GRANDO, 2000, p. 28)

Por outro lado, a necessidade de diversificação para uma melhor experiência educacional se faz cada vez mais presente no mundo digital em que vivemos. Perante a quantidade enorme de recursos à nossa disposição é importante reforçar a necessidade de ter um olhar crítico sobre eles. Assim, para uma educação desafiadora e dinâmica, se deve fomentar que nossos alunos desenvolvam ao máximo suas potencialidades, seu espírito crítico e sua criatividade.

Neste sentido, o uso da computação, preferencialmente por meio de softwares livres, como o GeoGebra, possibilita que resultados sejam alcançados sem que se recorra à matemática que tradicionalmente é abordada na educação básica. Por outro lado, favorece o levantamento de questionamentos e de conjecturas e estimula a continuidade do estudo da Matemática.

Existência, unicidade, prova matemática e custo computacional permeiam o tema e as abordagens utilizadas nesse artigo. Aspectos que quando tratadas em linguagem acessível, estimulam e proporcionam uma aprendizagem significativa dos estudantes, com ideias relevantes e profundas que, eventualmente, não são contempladas na educação básica.

Trazer o estudo sobre grafos para a sala de aula oferece uma excelente oportunidade de explorar questões diversas, dentre elas: as tecnológicas, as de otimização e as que envolvem planejamento estratégico. Tais questões podem ser debatidas com um enfoque heurístico, oportunizando ao aluno estabelecer cogitações e análises, suscitar questionamentos e tomadas de decisão, além da descoberta dos resultados em si.

Ao longo do estudo para a elaboração do artigo foi possível dar respostas às interrogações colocadas. Mostrou-se que, além das sequências com 26 números como sugerido por Ceferino, também é possível encontrar exemplos de caminhos "intermediários" com 27, 28 e 29 vértices, finalizando com as sequências de comprimento máximo, constituídas por 30 números. É interessante destacar que nenhum dos caminhos máximos com 30 vértices inclui os primos maiores do que 18 (e, claro, menores que 36). Observou-se, também, que existem muitas sequências com 30 números e que o custo computacional para dizer o número exato dessas sequências é muito elevado.

Para corrigir alguns pequenos erros presentes no jogo original, houve a necessidade de reconstruí-lo. Atendendo a que uma das estratégias para resolver problemas consiste na redução dos mesmos para níveis menos complexos, optou-se pela ampliação do jogo, incluindo quatro níveis, sendo o primeiro, com 16 números – acessível a alunos dos primeiros anos do Ensino Fundamental – e o último nível, com 49 números, mais complexo.

Referências

AIRES, F. C. **Introdução à teoria dos números**. Fortaleza, EdUECE. 2ª ed. 2015. ISBN: 978-85-7826-397-3.

BALTAZAR, R.; PEREIRA, L. O estudo de Grafos: uma proposta investigativa. **Educação Matemática e Pesquisa**, São Paulo, v. 20, n. 2, p. 334-348, 2018.

BOALER, J. **MENTE SEM BARREIRAS: as chaves para destravar seu potencial ilimitado de aprendizagem**. Porto Alegre, Penso, 2020.

BRASIL. Ministério da Educação e do Desporto. Secretaria da Educação Fundamental. *Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática*. 3. ed. Brasília: MEC, 1998

BRASIL, Ministério da Educação. Secretaria de Ensino Médio e Tecnológica. *Parâmetros Curriculares Nacional para o Ensino Médio (PCNEM): Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias*. Brasília. MEC, 2000.

CARDOSO, B. N. **Grafos Eulerianos na educação básica**. 2017. Dissertação (Mestrado.em Matemática) – Departamento de Matemática, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2017.

GRANDO, R. C. **O conhecimento Matemático e o uso de jogos na sala de aula**. 239 f. Tese (Doutorado em Educação) - Universidade Estadual de Campinas. Campinas, 2000.

MENEZES, C., **Desenvolvimento de Jogos Digitais como Estratégias de Aprendizagem**, 2003.

MERRIS, Russel. Graph Theory. Wiley-Interscience Series in Discrete Mathematics and Optimization. **John Wiley & Sons**, United States. 2001.

MÜLLER, J. G.; BAIER, T. TEORIA DOS GRAFOS: uma possibilidade pedagógica para o Ensino Fundamental. **EM TEIA: Revista de Educação Matemática e Tecnológica Iberoamericana**, v. 12, n. 1, 2021.

SWART, Edward. R. (1980), The philosophical implications of the four-color problem, Mathematical Association of America. **American Mathematical Monthly**, v. 87, p. 697–702, Nov. 1980.

VIEIRA, G.; ALEVATTO, N.S.G. Tecendo relações entre resolução de problemas e investigações matemáticas nos anos finais do ensino fundamental. *In*: ENCONTRO DE PRODUÇÃO DISCENTE PUCSP, 2012, São Paulo. **Anais** [...]. São Paulo: PUCSP, 1994. p. 1-13. Disponível em: <http://revistapos.cruzeirodosul.edu.br/index.php/epd/article/view/515> Acesso em 10 de fevereiro de 2022.

TAROUCO, L. M. R., ROLAND, L. C., FABRE, M. C. J. M., KONRATH, M. L. P. Jogos educacionais, **RENOTE: Novas Tecnologias na Educação**, v. 2, n. 1. 2004.

ZANELLA, Liane Carly Hermes. **Metodologia de pesquisa**. Florianópolis, SeaD/UFSC, 2013.