em teia
Revista de Educação Matemática e Tecnológica Iberoamericana
Universidade Federal de Pernambuco
ISSN 2177-9309
Pós-Graduação em Educação Matemática e Tecnológica
EDUMATEC

TEORIA DOS GRAFOS:

uma possibilidade pedagógica para o Ensino Fundamental

Theory of Graphs:

a pedagogical possibility for elementary school

Jonathan Gil Müller
Mestre em Ensino de Ciências Naturais e Matemática – FURB/PPGECIM
Universidade Regional de Blumenau (FURB) – SC – Brasil
jgmuller@furb.br
https://orcid.org/0000-0001-7813-5165

Tânia Baier
Doutora em Educação Matemática pela – UNESP
Universidade Regional de Blumenau (FURB) – SC – Brasil
taniabaier@gmail.com
https://orcid.org/0000-0002-9342-1693

Resumo

Neste artigo é apresentada uma possibilidade pedagógica para a abordagem, nos anos finais do Ensino Fundamental, de conceitos elementares da Teoria dos Grafos, um tópico da Topologia que é amplamente referenciado na atualidade, principalmente na área da computação, planejamento urbano e sistemas de comunicação. Essa abordagem é sugerida por intermédio de um desafio lúdico elaborado com fins didáticos de acordo com os preceitos metodológicos da Teoria das Situações Didáticas de Guy Brousseau, objetivando a interação entre aluno, professor e conhecimento por meio de modelos didáticos sugeridos ou desenvolvidos pelo professor. O planejamento do desafio lúdico objetivou o entendimento dos seguintes conceitos da Teoria dos Grafos: vértice, aresta, grafo, diagrama de grafo, grafo conexo, grafo desconexo e grafo planar.

Palavras-Chave: Teoria dos Grafos. Desafio lúdico. Ensino Fundamental. Teoria das Situações Didáticas. Ensino de Matemática.

Abstract

This paper presents a pedagogical possibility for approaching in Elementary School the basic concepts of Graphs Theory, a Topology concept which is widely referred to in mainly in computing, urban planning and communication systems nowadays. This approach is suggested by using a ludic challenge produced for didactical purposes according to the methodological guidelines from the Theory of Didactic Situations by Guy Brousseau, which main goal is the interaction between student, teacher and knowledge through didactical models suggested or developed by the teacher. Planning the ludic challenge aimed for the understanding of the following concepts in Graphs Theory: vertices, edge, graph, graph diagram, connected graph,

disconnected graph and planar graph.

Keywords: Graphs Theory, Ludic challenge, Elementary School, Theory of Didactic Situations, Math Teaching.

Introdução

Diante das frequentes transformações que a sociedade vivencia atualmente, proporcionar um ensino de Matemática instigante e motivador é um desafio. Desde a década de 90, D'Ambrósio (1996, p. 58) alerta que a sala de aula, juntamente com a metodologia de ensino, apresenta-se descontextualizada para o público emergente do século XXI uma vez que, na atualidade, "[...] a matemática vem passando por uma grande transformação. Isso é absolutamente natural. Os meios de observação, de coleção de dados e de processamento desses dados, que são essenciais na criação matemática, mudaram profundamente".

Dentre as recomendações da Base Nacional Comum Curricular (BNCC) para a Matemática no Ensino Fundamental, temos a necessidade de garantir a relação entre situações do mundo real e abstrações e representações instigadas através de uma atividade matemática. O estudante deve reconhecer esta ciência como viva, em constante desenvolvimento e que contribui com a solução de problemas científicos, tecnológicos e sociais (BRASIL, 2017). Sendo assim, entende-se que sequências didáticas elaboradas nessa perspectiva oportunizam aos estudantes identificar e utilizar conceitos matemáticos para resolver problemas, sejam eles de caráter matemático ou não, e interpretar suas soluções de acordo com o contexto em que eles estão inseridos.

A BNCC traz o conteúdo mínimo a ser trabalhado com os estudantes e orienta que o processo de ensino e aprendizagem seja conduzido com auxílio de problemas do mundo físico e de diferentes áreas do conhecimento (BRASIL, 2017). Embora a Teoria dos Grafos (teoria abordada na proposta pedagógica deste artigo) não esteja indicada neste documento, os problemas relacionados a ela podem contribuir com o desenvolvimento das habilidades e competências apontadas, principalmente aquelas relacionadas com números, geometria e raciocínio lógico.

Diante disso, não é comum ter referência à Teoria dos Grafos em livros didáticos, porém, muitas atividades presentes nestes materiais são compostas por problemas possíveis de serem modelados e resolvidos através de seus conceitos. Essa situação acontece também com algumas questões presentes no Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM) e na Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP) (ASSIS, 2017). Souza (2014), por exemplo, explora a ideia de ciclo hamiltoniano, um conceito da Teoria dos Grafos, com estudantes do nono ano dos anos finais do Ensino Fundamental e terceira série do Ensino Médio através da oitava questão da OBMEP do ano de 2014. Assis (2017) apresenta questões sobre grafos no ENEM do ano de 2010 e 2011 e na OBEMEP de 2011 e 2013. Embora essas questões possibilitem explorar conceitos da Teoria dos Grafos ela não é mencionada na resolução descrita no gabarito das provas, embora remeta ao processo de análise desenvolvido na teoria matemática em discussão. Silva (2020) também discute a abordagem da Teoria dos Grafos através de questões da OBEMEP com alunos do primeiro ano do Ensino Médio. Jurkiewicz (2009) promove o estudo de grafos em uma apostila de iniciação científica da OBMEP, visando capacitar estudantes para a realização da prova. Sendo assim, argumenta-se que a abordagem desta teoria no Ensino Fundamental (e Médio) potencializa a capacidade do estudante em resolver problemas e, consequentemente, adquirir melhor desempenho na realização destas provas de escala nacional. O desconhecimento dos conceitos fundamentais da Teoria dos Grafos leva o estudante a resolver desafios por demorados processos de tentativas.

Nesse contexto, este artigo apresenta uma proposta para abordar conceitos elementares da Teoria dos Grafos, uma área da Matemática Discreta, nos anos finais do Ensino Fundamental. Essa abordagem é sugerida por intermédio de um desafio lúdico, que foi elaborado através de adaptações de algumas situações e atividades já existentes na literatura relacionada ao tema. O desafio sugerido compõe uma das atividades propostas no produto educacional da dissertação de mestrado do primeiro autor deste artigo (disponível em: http://www.bc.furb.br/docs/DS/2015/360431_1_1.pdf) (MÜLLER, 2015) e faz parte de uma oficina disponibilizada através do projeto de extensão “Grafos nas Escolas” (título original: Oficinas Escolares: tópicos da Teoria dos Grafos para o Ensino Fundamental) realizado durante o ano de 2019 na Universidade Regional de Blumenau (FURB).

A sequência didática proposta neste artigo é constituída de uma situação lúdica elaborada com fins didáticos, cujo desenvolvimento e aplicação fundamentam-se nos preceitos metodológicos da Teoria das Situações Didáticas de Guy Brousseau, que objetiva aproximar o aluno, o professor e o conhecimento matemático por meio de modelos didáticos sugeridos ou desenvolvidos pelo próprio professor com objetivo de conduzir a interação entre esses três elementos essenciais de um processo educativo.

A Teoria dos Grafos

A Teoria dos Grafos é um ramo da Matemática atualmente conhecida como Topologia, que se caracteriza pelo estudo qualitativo dos objetos, sendo que para valores como peso, distância ou velocidade, por exemplo, não é atribuída importância. Bell (1985) explica que a Topologia trabalha com as propriedades qualitativas essenciais das configurações espaciais, que não dependem de tamanho, situação e forma.

Historicamente, a Teoria dos Grafos teve seu início com a resolução do clássico *Problema das sete pontes de Königsberg*, apresentada pelo famoso matemático suíço Leonhard Euler, em 1736. Nos anos seguintes, pouco foi realizado e acrescentado à teoria iniciada por Euler. O recente desenvolvimento da tecnologia de computadores foi essencial para a evolução da Teoria dos Grafos (SZWARCFITER, 1984).

Pela sua simplicidade de representação e pela numerosa abrangência de aplicações, a Teoria dos Grafos é muito utilizada e referenciada nos dias de hoje, com destaque na área da computação, sistemas de comunicação e planejamento urbano. Destacam-se algumas aplicações em áreas como: processos industriais, análise de caminho crítico, tática e logística (campo militar), sistemas de comunicação, estudo de transmissão de informações, escolha de uma rota ótima, fluxos em redes, redes elétricas (engenharia elétrica e civil, arquitetura, computação), genética, psicologia, economia, estrutura social, jogos, física, química, tecnologia de computador, antropologia, linguística, entre outras (RABUSKE, 1992).

Conforme afirma Rabuske (1992, p. 2), "Pode-se dizer que a Teoria dos Grafos é um dos mais simples e mais elegantes assuntos da Matemática moderna, possuindo uma variedade de aplicações". Segundo Boaventura Netto (1979, p. 1), "Ao contrário de muitos ramos da Matemática, nascidos de especulações puramente teóricas, a Teoria dos Grafos tem sua origem no confronto de problemas práticos relacionados a diversas especialidades [...]". De acordo com Rabuske (1992, p. 1), "A Teoria dos Grafos proporciona ferramenta simples, acessível e poderosa para construção de modelos e resolução de problemas relacionados com arranjos de objetos discretos".

Além de uma infinidade de aplicações práticas, a Teoria dos Grafos destaca-se pelos engenhosos desafios intelectuais que proporciona, voltados a um público interessado, independendo de seu grau de instrução porque podem ser resolvidos por meio de tentativas de acerto e erro que podem demandar tempo. Conforme o entendimento de Feofiloff, Kohayahawa e Wakabayashi (2011, p. 5),

> A teoria dos grafos estuda os objetos combinatórios – *os grafos* – que são um bom modelo para muitos problemas em vários ramos da matemática, da informática, da engenharia e da indústria. Muitos dos problemas sobre grafos tornaram-se célebres porque são um interessante desafio intelectual e porque têm importantes aplicações práticas.

Para D'Ambrósio (1996), a temática conhecida sob a denominação Matemática Discreta consiste em uma forte tendência para a Matemática do futuro e problemas que se relacionam com essa área despertam maior interesse para os estudantes. Esse autor também destaca a possibilidade de aplicar esse tipo de Matemática para qualquer nível de ensino.

Teoria das situações didáticas

Enquanto na metodologia tradicional de ensino o professor, inicialmente, apresenta os conceitos relacionados ao conteúdo proposto e na sequência disponibiliza uma sequência de exercícios de fixação relacionados, a Teoria das Situações Didáticas parte do pressuposto do estudante aprender e buscar novos conceitos a partir de uma situação didática proposta pelo professor.

De acordo com Brousseau (2008), o enfoque da Teoria das Situações Didáticas se dá na construção de modelos que proporcionem a interação entre estudante, professor e conhecimento matemático, ajustando o que se aprende e o processo pelo qual a aprendizagem acontece. Sua pergunta inicial se deu no âmbito de saber quais seriam as condições ideais para que um estudante perceba a necessidade de um conhecimento matemático em determinadas ocasiões. Nesse contexto, o meio passa a ser considerado como um sistema independente que deve ser modelado e as situações didáticas passam a ser o objeto central de estudo dessa teoria, de modo que, na Teoria das Situações Didáticas, enfatizam-se os estudos no processo de aprendizagem e não no aluno.

Para Brousseau (2008, p. 33), cada situação ou modelo é capaz de possibilitar o desenvolvimento do conhecimento que o sujeito possui de modo que a gênese desse conhecimento seja estimulada através da situação e proporcione uma sucessão de novas perguntas e respostas: "Na concepção mais geral de ensino, a marca de um saber é a associação de boas perguntas com boas respostas".

Para fins de análise do processo de aprendizagem, a Teoria das Situações Didáticas o decompõe em quatro fases diferentes, porém interligadas, onde o saber assume funções diferentes e o aprendiz relaciona-se de modo diferente com o saber. Nessas fases observam-se momentos de ação, de formulação, de validação e de institucionalização. A fase denominada de *dialética da ação* consiste em colocar o aprendiz em uma situação de ação, apresentando-lhe um problema que o possibilite agir sobre essa situação e, por meio dela, adquirir informação sobre sua própria ação. O problema deve ser colocado para o aluno de modo que a melhor solução é o conhecimento a ensinar. Na *dialética da formulação*, o estudante troca informações com uma ou mais pessoas. É o momento onde o estudante ou grupo de estudantes expõem, de forma escrita ou oral, as estratégias utilizadas e a solução encontrada. O objetivo principal desta etapa é a troca de informações. Desse modo espera-se que o aprendiz desenvolva, progressivamente, uma linguagem acessível por todos, de modo a expressar os objetos e as relações matemáticas envolvidas na situação adidática. A *dialética da validação* é a etapa em que o aprendiz deve mostrar a validade do modelo desenvolvido por ele, submetendo esse modelo ao julgamento de um interlocutor. O objetivo dessa fase consiste em validar as asserções construídas nos momentos de ação e de formulação (ALMOULOUD, 2007). Na última fase, correspondente à *dialética da institucionalização*, acontece a intervenção do professor que fixa convencionalmente e explicitamente os conhecimentos relevantes apresentados pelos estudantes no momento da validação. A dialética da institucionalização tem por objetivo formalizar o saber matemático relacionado aos conhecimentos sugeridos durante a realização das atividades em classe (FERREIRA, 2014).

O desafio lúdico

Esse desafio foi escolhido por possibilitar uma visão inicial da estrutura de um grafo, denominada de diagrama de grafo, alguns de seus elementos, como vértice, aresta e grau, e alguns conceitos elementares, como grafo conexo, desconexo e planar. A adaptação desses tópicos para o Ensino Fundamental é proposta de uma maneira lúdica e divertida por meio da interação com o contexto dos personagens fictícios, os *gracos*, que habitam um planeta chamado Contemporanium. Nessas condições os estudantes conhecem os fundamentos iniciais da Teoria dos Grafos através de uma linguagem diferenciada, adaptada para o contexto do cenário proposto no desafio lúdico, cuja tradução para a linguagem matemática é mediada pelo professor. Não estão planejadas imagens ilustrativas do cenário proposto, tendo em vista a possibilidade de instigar a capacidade de imaginação e abstração dos estudantes. Dependendo do contexto em que o desafio for aplicado, o cenário fictício pode fomentar uma reflexão sobre questões astronômicas, como por exemplo: é posível existir vida fora do planeta Terra? Existem outros planetas com a capacidade de gerar vida? O que é uma galáxia? Desta forma, o desafio proposto possibilita também uma prática interdisciplinar em sala de aula, porém, essa questão não será discutida neste artigo.

Nas atividades do desafio, antes de qualquer tradução para a linguagem matemática, os estudantes são levados a refletir a respeito dos aspectos principais da estrutura de um grafo, buscando, a princípio, uma solução para as situações dos *gracos* em seu planeta

Contemporanium, composto por países desconexos que são formados por vilarejos interligados. A solução dos problemas propostos consiste numa análise qualitativa das situações, sendo que, em alguns casos, os países do planeta Contemporanium diferenciam-se pelo modo como seus vilarejos estão interligados, em outros casos, o mesmo país pode ser representado de formas diferentes, mantendo em todas as representações as mesmas caraterísticas qualitativas.

A seguir, será apresentado o desafio lúdico proposto neste estudo juntamente com comentários e orientação direcionados à implementação da proposta com estudantes dos anos finais do Ensino Fundamental. Na sequência está descrito um breve suporte teórico com alguns conceitos iniciais da Teoria dos Grafos. Optou-se por incrementar conceitos e noções que demonstram relevância na fase de formalizar os conhecimentos estimulados. É importante que o professor trabalhe esses conceitos com seus alunos após a aplicação do desafio.

Os *gracos* e seu planeta Contemporanium

O desafio descrito a seguir é uma adaptação de atividades propostas por Farmer e Stanford (2003, p. 9).

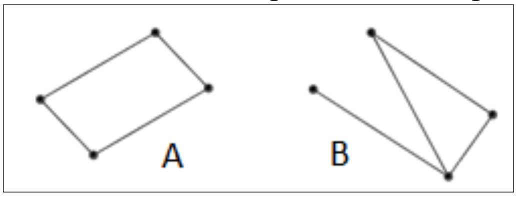
Em um planeta, chamado Contemporanium, localizado em uma galáxia distante, todos os seus habitantes, denominados *gracos*, não possuem o sentido da visão. Eles locomovem-se entre os vilarejos existentes em cada país do planeta por meio de trilhas formadas por ondas magnéticas. Não há trilhas magnéticas entre os países e as trilhas existem somente entre os vilarejos de cada país, sendo assim impossível um *graco* viajar para outro país do planeta Contemporanium.

A comunicação entre todos os *gracos* de todos os países acontece por telepatia e eles são incapazes de perceber a distância e a localização do *graco* com o qual se comunicam. Os *gracos* descrevem seus países apenas pela quantidade de vilarejos e trilhas magnéticas que os interligam, sendo incapazes de visualizar uma imagem completa da disposição de seu país.

Ao atingir certa idade, um *graco* aprende como os vilarejos de seu país estão interligados, consegue manter conversas telepáticas com outro *graco* e pode descobrir se ambos estão localizados em países diferentes.

A figura 1 mostra a disposição de dois países localizados no planeta Contemporanium, onde os vilarejos são representados pelos pontos e as trilhas magnéticas que os interligam pelas linhas. É importante relembrar que os *gracos* não possuem o sentido da visão e não enxergam a disposição dos vilarejos e das trilhas magnéticas de seus países como é possível ver na figura 1.

Figura 1 – Países A e B do planeta Contemporanium



Fonte: Adaptado de Farmer e Stanford (2003, p. 9).

Um *graco* do país A está se comunicando com outro que está no país B, conforme a figura 1. De qual maneira, através de sua comunicação telepática, os *gracos* podem determinar que estão em países diferentes? Ambos os países possuem quatro vilarejos e quatro trilhas magnéticas. Um *graco* diz:

– Temos um vilarejo que possui uma única trilha magnética de acesso.

O outro responde:

– Em nosso país todos os vilarejos estão ligados por duas trilhas magnéticas.

Dessa maneira os dois *gracos* concluem que habitam países diferentes.

Há muitas outras formas para os *gracos* determinarem que os seus países sejam diferentes, por exemplo:

– O meu país tem um vilarejo que está diretamente ligado a todos os outros.

– No meu país é possível viajar por um caminho utilizando quatro trilhas magnéticas diferentes e retornar ao ponto de partida.

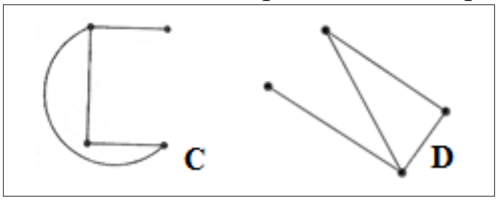
– No meu país é possível viajar por um caminho através de três trilhas magnéticas diferentes e voltar ao ponto de partida.

Questões a serem respondidas

Num primeiro momento, apresenta-se a disposição de dois países do planeta Contemporanium, C e D, conforme a figura 2, de modo a propor que o estudante explique o motivo pelo qual os *gracos* não conseguem distinguir entre a disposição dos países apresentados.

O objetivo desta etapa consiste na percepção de que, em certas situações, a quantidade de vilarejos e de trilhas magnéticas não é suficiente para diferenciar a estrutura de dois países do planeta Contemporanium. Nesse sentido, os estudantes são levados a realizar uma análise referente ao modo como os vilarejos estão interligados por meio das trilhas magnéticas, com o intuito de constatar que estruturas visualmente diferentes podem ser iguais por possuírem as mesmas características qualitativas, ou seja, o modo de como interligam-se os vilarejos.

Figura 2 – Países C e D do planeta Contemporanium



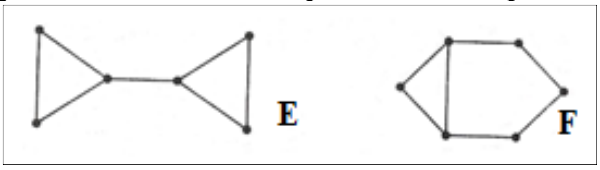
Fonte: Adaptado de Farmer e Stanford (2003).

Uma possível resposta para esta questão seria que ambos os países possuem quatro vilarejos e quatro trilhas magnéticas, sendo que um dos vilarejos está diretamente ligado aos outros três. Os dois países também possuem um vilarejo com uma única trilha magnética de acesso e dois vilarejos com duas trilhas magnéticas de acesso.

Num segundo momento, mostram-se alguns pares de países do planeta Contemporanium, conforme as figuras 3, 4, 5, 6 e 7, a fim de determinar se os *gracos* os achariam iguais ou diferentes solicitando que, para os que são diferentes, os estudantes descrevam uma possível maneira dos *gracos* distingui-los.

Nesta etapa, é esperado que o estudante utilize os conhecimentos adquiridos/construídos no primeiro momento para realizar uma análise qualitativa da estrutura dos países ilustrados a fim de distingui-los ou não.

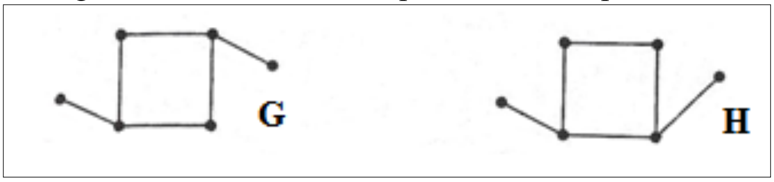
Figura 3 - Países E e F do planeta Contemporanium



Fonte: Farmer e Stanford (2003, p. 10).

Após a análise qualitativa dos países E e F, ilustrados na figura 3, o estudante deve verificar que os mesmos são diferentes, pois, no primeiro país, existem dois vilarejos que possuem três trilhas magnéticas de acesso, como no segundo, porém, os demais quatro vilarejos do primeiro país têm acesso direto aos vilarejos com três trilhas magnéticas, o que não acontece no segundo país. Outra característica que os diferencia é que no segundo país existe um vilarejo diretamente ligado aos dois vilarejos que possuem três trilhas magnéticas.

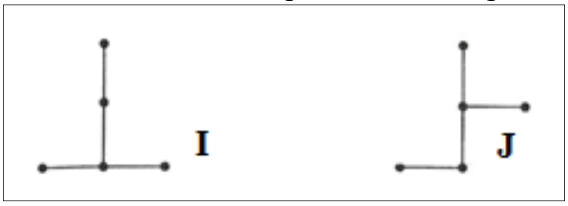
Figura 4 – Países G e H do planeta Contemporanium



Fonte: Farmer e Stanford (2003, p. 11).

Neste caso, conforme mostra a figura 4, é possível verificar que os países G e H possuem características qualitativas diferentes, de modo que no segundo país os dois vilarejos com três trilhas magnéticas de acesso estão interligados pela mesma trilha, o que não acontece no primeiro país.

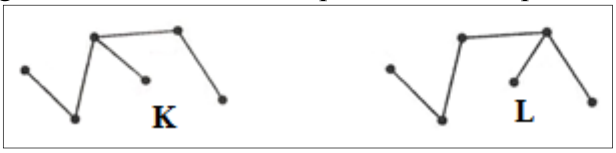
Figura 5 – Países I e J do planeta Contemporanium



Fonte: Farmer e Stanford (2003, p. 11).

No par de países I e J, conforme está apresentado na figura 5, é esperado que o estudante note que ambos possuem as mesmas características qualitativas.

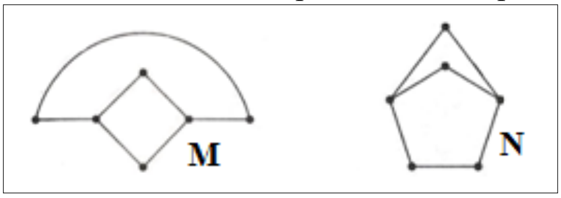
Figura 6 – Países K e L do planeta Contemporanium



Fonte: Farmer e Stanford (2003, p. 11).

Os países K e L da figura 6 apresentam características qualitativas diferentes, sendo uma justificativa possível: no primeiro país, o vilarejo que possui três trilhas magnéticas está diretamente interligado a um dos vilarejos com apenas uma trilha magnética, o que não acontece no segundo país.

Figura 7 – Países M e N do planeta Contemporanium



Fonte: Farmer e Stanford (2003, p. 11).

Os países M e N, representados da figura 7, aparentam ser visualmente diferentes, porém, eles possuem as mesmas características qualitativas, sendo indistinguíveis por meio das conversas telepáticas dos *gracos*.

É importante analisar as respostas descritas pelos estudantes, sendo que existe a possibilidade de outras justificativas que explicam uma maneira dos *gracos* distinguirem os dois países em questão.

Num terceiro momento pode ser solicitado ao estudante que descreva, de forma geral, como dois *gracos* sabem, pela descrição de seus países, se é o mesmo ou se são dois países diferentes. Tal descrição tem com objetivo instigar o estudante a pensar e descrever as técnicas de análise utilizadas para comparar os países do planeta Contemporanium no momento anterior. O resultado esperado é que os *gracos* diferenciam seus países pela quantidade de vilarejos e trilhas magnéticas, porém quando possuem o mesmo número de vilarejos e trilhas magnéticas podem diferenciar-se pelo modo como os vilarejos estão interligados através das trilhas magnéticas.

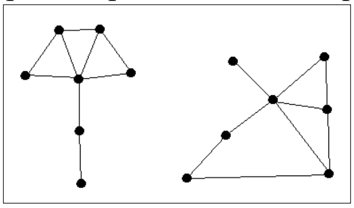
Finalizando, é apresentado ao estudante a seguinte fala de um *graco*:

– O meu país tem sete vilarejos e nove trilhas magnéticas. A um dos vilarejos está ligada somente uma trilha magnética, a outro estão ligadas cinco trilhas, a outros dois vilarejos estão ligadas três trilhas e aos demais três vilarejos estão ligados duas trilhas magnéticas.

Referente a esta fala é solicitado que o estudante desenhe dois países diferentes que se ajustem à descrição deste *graco*.

Como existem diversas maneiras diferentes de representar o país descrito pelo *graco*, é necessário verificar, em cada desenho apresentado pelo estudante, se foram atendidas todas as características anunciadas. A figura 8 ilustra uma possível solução:

Figura 8 – Resposta esperada no último questionamento



Fonte: Elaborada pelos pesquisadores (2015).

No desenvolvimento deste desafio lúdico é importante que os estudantes desenvolvam suas conclusões e resoluções por meio de seus próprios conhecimentos, sendo o papel do professor orientar o andamento das resoluções, auxiliando nas possíveis dúvidas que surgirão. É essencial que, mediante as dúvidas dos estudantes, o professor não forneça diretamente a resposta, mas sim, que o mesmo conduza os alunos para um caminho coerente de resolução, ajudando na análise qualitativa dos grafos, quando necessário.

Durante toda a realização o professor deve estimular as quatro fases do processo de aprendizagem mencionadas por Brousseau na sua Teoria das Situações Didáticas, colocando o aprendiz em situações de ação, de troca de informações e de validação dos conhecimentos construídos/desenvolvidos. No término deste desafio é o momento para o professor retomar as atividades realizadas e apresentar os resultados esperados, quando estes não foram atingidos. Em seguida, cabe ao professor transcrever as situações trabalhadas durante a resolução do desafio para a linguagem matemática, fixando convencionalmente alguns conceitos iniciais da Teoria dos Grafos, por meio das situações estudadas até o momento. De acordo com Ferreira (2014), esse é o momento para que o professor sistematize o que foi construído durante o trabalho investigativo do estudante.

A seguir apresenta-se um breve suporte teórico com alguns conceitos iniciais da Teoria dos Grafos que demonstram relevância na fase de formalizar os conhecimentos aflorados por meio da realização do desafio proposto. É importante que o professor trabalhe esses conceitos com seus alunos.

Conceitos elementares relacionados com o desafio lúdico proposto

As atividades propostas no desafio lúdico podem ser resolvidas através da análise de como os vilarejos do planeta Contemporanium estão interligados. Situações deste gênero caracterizam a essência de um tópico da Matemática contemporânea denominado Teoria dos Grafos, uma ramificação de uma grande área da Matemática conhecida como Topologia.

O contexto dos *gracos* e seu planeta Contemporanium pode ser traduzido em linguagem matemática, sendo os vilarejos denominados de vértices, as trilhas magnéticas de arestas e os países de grafos.

Podemos dizer, de modo informal, que um grafo é composto por um conjunto finito de pontos e linhas, ou também que grafo é um conjunto finito de vértices unidos por arestas. A figura que representa um grafo é chamada de diagrama de grafo (JURKIEWICZ, 2009). Assim, no desafio sugerido neste artigo a estrutura dos países do planeta Contemporanium, conforme apresentado nas atividades, é um grafo.

Segundo Silva (2009, p. 19), “Um *grafo* é uma representação de um conjunto de pontos e do modo como eles estão ligados”. Jurkiewicz (2009) afirma ser relevante em um grafo saber quem são os vértices e como eles estão interligados, isto é, quem são as arestas.

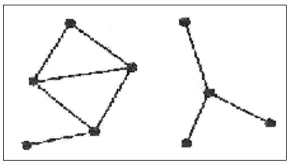
Matematicamente, Rabuske (1992, p. 5) define o termo grafo da seguinte maneira, representando o conjunto das arestas por E:

> Seja V um conjunto finito e não vazio, e E uma relação binária sobre V. Os elementos de V são representados por pontos. O par ordenado (v, w) $\in$ E, (ou simplesmente vw), onde v, w $\in$ V, é representado por uma linha ligando v a w. Tal representação de um conjunto V e uma relação binária sobre o mesmo é denominada um grafo G (V, E).

É possível representar um mesmo grafo através de vários diagramas de grafos diferentes, isso explica o fato de que os *gracos*, do desafio proposto, em algumas situações, não conseguirem fazer a distinção entre certos países. A característica mais relevante de um grafo é a maneira como os seus vértices estão interligados.

Um grafo é dito conexo quando existir a possibilidade de percorrer por todos os seus vértices por meio de suas arestas, caso contrário, dizemos que o grafo é desconexo (FARMER; STANFORD, 2003). A figura 9 pode ser analisada por dois pontos de vista diferentes: ilustrando um grafo desconexo com 9 vértices ou dois grafos conexos diferentes, um com 5 vértices e outro com 4 vértices.

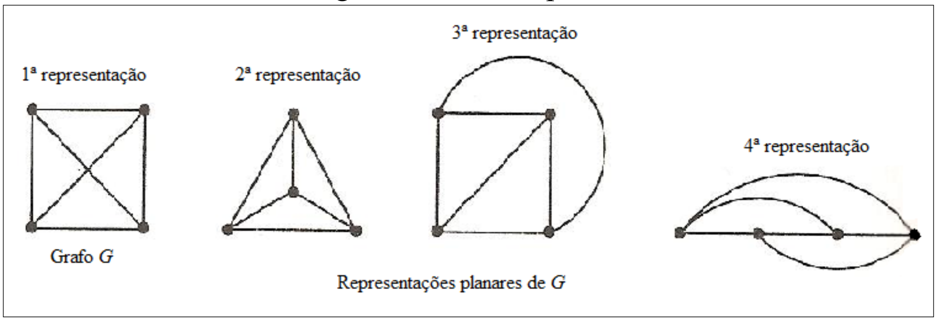
Figura 9 – Grafo conexo e desconexo



Fonte: Farmer e Stanford (2003, p. 13).

Dizemos que um grafo G é planar se for possível representá-lo em um plano de modo que duas arestas não se interceptem exceto no vértice que as interliga. Tal representação é uma representação planar de G. Um grafo G é não-planar se não existir nenhuma representação planar de G (ALDOUS; WILSON, 2000, tradução nossa). Como um grafo G possui infinitas representações, dizemos que ele é planar se uma dessas representações for possível de desenhar num plano, ou seja, sem cruzamento de arestas. Como exemplo, a figura 10 ilustra quatro representações diferentes de um mesmo grafo G, sendo as três últimas planares. Nessas condições, o grafo G é dito planar, pois, mesmo possuindo cruzamento de arestas, conforme a primeira representação, ele pode ser desenhado em um plano sem cruzamento de arestas.

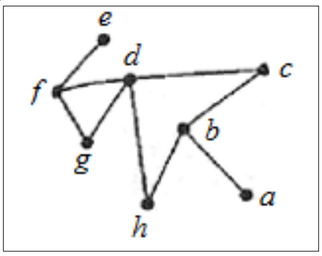
Figura 10 – Grafo planar



Fonte: Adaptado de Aldous e Wilson (2000, p. 244).

Os grafos são classificados de acordo com o seu número de vértices, como por exemplo, grafo com 4 vértices, grafo com 5 vértices. O grau de um vértice, simbolizado por *d(v)*, consiste no número de arestas que possuem uma extremidade nele (JURKIEWICZ, 2009). Um vértice pode ser de grau par ou de grau ímpar. Na figura 11, os vértices *b* e *c* são de ordem 3 (ímpar) e 2 (par) respectivamente.

Figura 11 – Grau de um vértice



Fonte: Adaptado de Farmer e Stanford (2003, p. 13).

Considerações finais

Por meio da investigação realizada enfocando o tema Teoria dos Grafos, juntamente com uma metodologia que auxiliasse no seu processo de ensino e de aprendizagem nos anos finais do Ensino Fundamental, foi desenvolvida uma alternativa pedagógica que possibilita trabalhar no cenário escolar uma Matemática que pode ser relacionada com temas da atualidade, de caráter qualitativo.

Estudantes do Ensino Fundamental mostram interesse e curiosidade pelo aprendizado de conhecimentos que foram desenvolvidos na atualidade. Por meio da experiência adquirida através da docência nos anos finais do Ensino Fundamental, percebe-se que as situações que permitem a abordagem de conceitos desenvolvidos na atualidade auxiliam o estudante a compreender a Matemática como uma ciência inacabada, cujo desenvolvimento acontece ao longo de seu processo histórico, por meio da construção de novos conhecimentos que atendam às novas demandas científicas e sociais.

Na metodologia adotada para a elaboração do desafio lúdico sugerido, sustentada por Guy Brousseau por meio da Teoria das Situações Didáticas, o estudante assume a função de protagonista na construção de seu conhecimento e atua no seu próprio processo de aprendizagem deixando de ser apenas um mero espectador, proporcionando assim, maior rendimento na aprendizagem dos conceitos propostos.

Assim, espera-se com esse artigo contribuir para o ensino de Matemática sugerindo uma alternativa pedagógica que possibilite ao estudante dos anos finais do Ensino Fundamental conhecer alguns aspectos da Matemática construídos na atualidade, proporcionando uma visão mais abrangente dessa área do conhecimento que possui fundamental importância no desenvolvimento da ciência.

Referências

ALDOUS, Joan M.; WILSON, Robin J. **Graphs and applications**: an introductory approach. London: Springer, 2000. 444p, il.

ALMOULOUD, Saddo Ag. **Fundamentos da didática da matemática**. Curitiba: Ed. UFPR, 2007. 217p, il.

ASSIS, Danila de Fátima Chagas. **Resolução de problemas via teoria de Grafos**: uma possibilidade de tornar a Matemática mais atraente na Educação Básica. 2017. 150p. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) – Departamento de Matemática e Estatística, Universidade Federal de São João del-Rei. São João del-Rei, 2017.

BELL, Eric Temple. **Historia de las matematicas**. México, D.F: Fondo de Cultura Economica, 1985. 656p.

BOAVENTURA NETTO, Paulo Oswaldo. **Teoria e modelos de grafos**. São Paulo: Ed. Blücher, 1979. 248p, il.

BRASIL. **Base Nacional Comum Curricular**. 2017. Disponível em: http://basenaciona lcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf. Acesso em: 19 fev 2021.

BROUSSEAU, Guy. **Introdução ao estudo da teoria das situações didáticas**: conteúdos e métodos de ensino. São Paulo: Ática, 2008. 128p.

D'AMBRÓSIO, Ubiratan. **Educação matemática**: da teoria à prática. 6. ed. Campinas, SP: Papirus, 1996. 121p, il.

FARMER, David W.; STANFORD, Theodore B. **Nós e superfícies**. Lisboa: Gradiva, 2003.

FEOFILOFF, Paulo; KOHAYAKAWA, Yoshiharu; WAKABAYASHI, Yoshiko. **Uma introdução sucinta à teoria dos grafos**. São Paulo, 2011. Disponível em: https://www.ime.usp.br/~pf/teoriadosgrafos/. Acessado em: 20 de fevereiro de 2021.

FERREIRA, Edinalva Rodrigues. **Ensino de Frações na Educação de Jovens e Adultos**: obstáculos didáticos e epistemológicos. 2014. 183p. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2014.

JURKIEWICZ, Samuel. **Grafos**: uma introdução. Rio de Janeiro, 2009. Apostila 5 de Programa de iniciação científica da OBMEP.

MÜLLER, Jonathan Gil. **Teoria dos Grafos para o ensino fundamental**: desafios lúdicos. 2015. 185p. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Ciências Naturais e Matemática) – Centro de Ciências Naturais e Matemática, Universidade Regional de Blumenau, Blumenau, 2015.

RABUSKE, Márcia Aguiar. **Introdução à teoria dos grafos**. Florianópolis: Ed. da UFSC, 1992. 173p.

SILVA, Liliana Mota Cardoso Marques da. **A teoria dos grafos no ensino**. 2009. 136p. Dissertação (Mestrado em Matemática/Educação) – Universidade Portucalense Infante D. Henrique, Porto, 2009.

SILVA, Luis Antonio de Souza da. **Grafos**: uma abordagem através de questões da OBEMEP e do Canguru de Matemática. 2020. 58p. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) – Faculdade de Formação de Professores, Universidade do Estado do Rio de Janeiro, São Gonçalo, 2020.

SOUZA, Renato Ferreira de. **Resolução de problemas via teoria dos grafos**. 2014. 48p. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) – Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2014.

SZWARCFITER, Jayme Luiz. **Grafos e algoritmos computacionais**. Rio de Janeiro: Campus, 1984. 216p, il.

Recebido em 25 de abril de 2020.
Aprovado em 27 de fevereiro de 2021.