em teia
Revista de Educação Matemática e Tecnológica Iberoamericana
Universidade Federal de Pernambuco
ISSN 2177-9309
Pós-Graduação em Educação Matemática e Tecnológica
EDUMATEC

APRENDER MATEMÁTICA COM COMPREENSÃO: RACIOCÍNIO MATEMÁTICO E ENSINO EXPLORATÓRIO

Learning Mathematics with Understanding: Mathematical Reasoning and Exploratory Teaching

Lurdes Serrazina
PhD in Mathematics Education
UIDEF - Unidade de Investigação e Desenvolvimento em Educação e Formação
Universidade de Lisboa, Instituto de Educação, Escola Superior de Educação, Lisboa, Portugal
https://orcid.org/0000-0003-3781-8108
lurdess@eselx.ipl.pt

Resumo

Este artigo tem como objetivo discutir como práticas de ensino exploratório podem ser promotoras do desenvolvimento da compreensão e do raciocínio matemáticos nos estudantes desde os anos iniciais. Começa por discutir, com base na literatura, o que se entende por ensino exploratório e designadamente o papel das tarefas e da comunicação matemática nesta abordagem. Clarifica o que se considera ser raciocínio matemático. Tipos e processos de raciocínio são também discutidos com base em diferentes autores. Os dados analisados correspondem a dois episódios da discussão coletiva de uma tarefa exploratória realizada no 2º ano de escolaridade, onde os processos de justificar, generalizar, comparar, classificar e exemplificar estão presentes. Conclui-se que as ações da professora são essenciais para que os alunos avancem no desenvolvimento da sua compreensão matemática e se envolvam em diferentes processos de raciocínio.

Palavras-Chave: Ensino exploratório. Raciocínio matemático. Tarefas. Processos de raciocínio. Ações do professor.

Abstract

This article aims to discuss how exploratory teaching practices can promote the development of mathematical understanding and reasoning in students from the early years. It begins by discussing, based on the literature, what is meant by exploratory teaching and namely the role of tasks and mathematical communication in this approach. Clarifies what is considered to be mathematical reasoning. Types and processes of reasoning are also discussed based on different authors. The analyzed data correspond to two episodes of collective discussion of an exploratory task performed in the 2nd year of schooling, where the processes of justifying, generalizing, comparing, classifying and exemplifying are present. It is concluded that the teacher's actions are essential for students to advance in the development of their mathematical understanding and engage in different reasoning processes.

Keywords: exploratory teaching. Mathematical reasoning. Tasks. Reasoning processes. Teacher’s actions.

Introdução

O ensino da matemática na educação básica deve visar aprendizagens matemáticas relevantes e sustentáveis para todos os estudantes. Para que isso aconteça, essa aprendizagem deve ser feita com compreensão e contemplar o desenvolvimento da capacidade de os estudantes a utilizarem em contextos matemáticos e não matemáticos, tendo em consideração que aprender matemática na escola depende essencialmente do que se passa na sala de aula, nomeadamente como é que professor e estudantes interagem entre si a partir do currículo (NCTM, 2017). Sabe-se hoje que a aprendizagem da matemática constitui um processo ativo o qual cada estudante constrói o seu conhecimento a partir das experiências pessoais, da interação com os seus pares, com o professor e com outros adultos. Nesse processo é fundamental equacionar os papeis dos estudantes e do professor, bem como a organização do processo de ensino e aprendizagem, isto é, a prática letiva. Esta prática tem de envolver os estudantes em aprendizagens que sejam significativas, proporcionando-lhes experiências individuais ou de grupo de modo que as ideias matemáticas façam sentido e aprendam a raciocinar matematicamente. Nesta perspetiva, o NCTM (2017) definiu um conjunto de princípios de aprendizagem, considerando que os estudantes devem ter experiências que lhes permitam: envolverem-se em tarefas desafiantes que incluam uma construção ativa de significados e apoiem uma aprendizagem com sentido; relacionarem novas aprendizagens com conhecimentos anteriores e raciocínios informais e, nesse processo, discutirem ideias preconcebidas e conceções erradas; adquirirem conhecimento conceptual e processual de modo a organizarem com sentido o seu conhecimento, adquirirem novos conhecimentos, bem como transferirem e aplicarem conhecimento a novas situações; construirem conhecimento através do discurso, da atividade e da interação e no contexto de problemas com sentido; refletir sobre e rever o seu trabalho, pensamento e compreensão, recebendo feedback oportuno e detalhado; aprenderem a monitorizar a sua aprendizagem e desempenho, desenvolvendo uma consciência metacognitiva de si próprios como aprendizes, pensadores e resolvedores de problemas.

Assim, os estudantes terão oportunidades para desenvolverem formas matemáticas de pensar que constituam a base para a resolução de problemas da vida real, da própria matemática ou de outras áreas de estudo, desenvolvendo a sua compreensão conceitual e a fluência em procedimentos. Como afirma o NCTM (2017), é a partir da compreensão de conceitos que se desenvolve o uso flexível e fluente de procedimentos na resolução de problemas. Também a capacidade para formular, representar e resolver problemas, pensar e justificar que raciocínios são os adequados implica que os estudantes desenvolvam formas matemáticas de pensar na resolução de outros problemas matemáticos ou do dia a dia.

Para Ponte, Quaresma e Mata-Pereira (2020, p. 11),

> a abordagem de ensino exploratório, baseada numa seleção criteriosa de tarefas e num ambiente estimulante de comunicação, com destaque para as discussões coletivas, proporciona um ensino da Matemática com compreensão e é uma base importante para o desenvolvimento do raciocínio matemático.

Estes autores consideram ainda que uma aula de ensino exploratório permite dar voz aos estudantes aquando da realização das tarefas e quando expressam os seus raciocínios, criando oportunidades para a partir das suas produções trabalhar o raciocínio matemático. No mesmo sentido o NCTM (2017, p. 17) considera que um “ensino eficaz da matemática envolve os estudantes na resolução e discussão de tarefas que promovem o raciocínio matemático e a resolução de problemas, além de permitirem diferentes abordagens e várias estratégias”.

Mas o que se entende por raciocínio matemático nem sempre é consensual, havendo autores que referem pensamento matemático ou pensar matematicamente como sinónimo de raciocínio. Neste texto seguimos a perspetiva de Ponte, Quaresma e Mata-Pereira (2020) para quem o “raciocinar” matematicamente é mais restrito do que “pensar”, considerando raciocínio matemático como “realizar inferências de forma fundamentada, ou seja, partir de informação dada para obter nova informação através de um processo justificado” (p. 7). O objetivo deste artigo é discutir como práticas de ensino exploratório podem ser promotoras do desenvolvimento do raciocínio matemático dos estudantes desde os anos iniciais.

Ensino exploratório

Ponte (2005) distingue ensino exploratório da matemática de ensino direto pelos papéis desempenhados pelos estudantes e pelo professor, pelas tarefas que são propostas e a forma como são geridas e pela comunicação que acontece na sala de aula. Uma aula de ensino exploratório desenrola-se normalmente em quatro fases: Introdução da tarefa, Resolução autónoma pelos estudantes, muitas vezes organizados em pequenos grupos ou a pares, Discussão coletiva das resoluções com toda a turma e Sistematização das aprendizagens realizadas (OLIVEIRA; MENEZES; CANAVARRO, 2013). Alguns autores aglutinam as duas últimas fases, considerando apenas três. Todas estas fases são cruciais, contribuindo cada uma para o sucesso da aprendizagem pensada aquando da seleção da tarefa pelo professor. Na fase de *Introdução da tarefa* o professor propõe uma tarefa à turma, normalmente um problema ou uma tarefa de investigação. Nesta fase, para além da organização da turma com a definição dos pares ou grupos de trabalho, o professor deve certificar-se que os estudantes compreendem os objetivos da tarefa, sentem-se desafiados por ela e têm os recursos necessários para a resolver. É ainda fundamental que os estudantes estabeleçam conexões com experiências anteriores.

Na fase de *Resolução autónoma da tarefa pelos pares/grupos* o professor monitoriza o trabalho que vai sendo realizado por cada grupo, colocando questões, dando pistas, mas procurando manter o nível cognitivo da tarefa, promovendo o raciocínio dos estudantes, lançando desafios, pedindo justificações e clarificações, sugerindo novas representações. Ainda nesta fase, o professor deve garantir que os estudantes fazem registos escritos, providenciando materiais sempre que necessário. É também durante esta fase que o professor seleciona e sequencia as apresentações que irão ser feitas na fase seguinte.

Na *Discussão coletiva,* o professor deve criar condições propícias a um bom ambiente de discussão fomentando o respeito e interesse pelos diferentes trabalhos, justificando porque foram aqueles os trabalhos selecionados e não outros. Deve ainda promover a qualidade matemática das apresentações dos estudantes, pedindo explicações claras das resoluções, justificações dos resultados e formas de apresentação utilizadas e discutindo diferença e eficácia matemática das resoluções. Por exemplo, no campo da aritmética, olhar para diferentes resoluções e identificar a diferença matemática entre elas e qual a mais eficaz pode constituir um aprofundamento das propriedades das operações e das relações numéricas (FERREIRA, 2012). O professor tem ainda o papel de regular as interações entre os estudantes na discussão, incentivando o questionamento para clarificar ideias ou esclarecer dúvidas, promovendo análise, confronto e comparação entre resoluções e identificando e colocando à discussão possíveis erros matemáticos das resoluções.

Na *Sistematização das aprendizagens,* o professor, para além de criar um ambiente adequado para focalizar os estudantes naquilo que eram os objetivos de aprendizagem, deve institucionalizar ideias ou procedimentos relativos a tópicos matemáticos suscitados pela exploração da tarefa, identificar conceito(s) matemático(s), clarificando a sua definição e explorar representações múltiplas e procedimento(s) matemático(s), clarificando as condições da sua aplicação e revendo a sua utilização. Também ideias ou procedimentos relativos a resolução de problemas, raciocínio matemático ou comunicação devem ser institucionalizados, identificando e relacionando as dimensões presentes e reforçando aspetos-chave para o seu desenvolvimento, não esquecendo o estabelecimento de conexões com aprendizagens anteriores (OLIVEIRA; MENEZES; CANAVARRO, 2013).

As tarefas

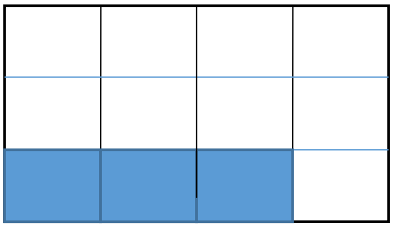
Designam-se por tarefas matemáticas as propostas que o professor faz aos seus estudantes para que eles realizem a sua atividade matemática. Essas tarefas podem ser exercícios, explorações, problemas ou tarefas de investigação (PONTE, 2005), que, embora visando objetivos diferentes, têm todas um papel na aprendizagem da matemática. No ensino exploratório devem ser trabalhadas tarefas matemáticas que constituam assuntos relevantes para discussão, dado que nem todas as tarefas proporcionam as mesmas oportunidades para o desenvolvimento do pensamento e para a aprendizagem dos estudantes. Tarefas que encorajam o pensamento e o raciocínio de nível elevado podem levar a uma maior aprendizagem, mas são as mais difíceis de implementar, correndo muitas vezes o risco de se transformarem noutras, de menor exigência, durante a sua utilização no ensino.

Tarefas de baixa exigência cognitiva correspondem muitas vezes a exercícios simples, por exemplo, quando se pergunta aos estudantes a partir dos 2º ou 3º anos o que acontece quando se multiplica um número por 10, espera-se como resposta "acrescenta-se um zero". Ou quando se propõe aos mesmos estudantes que escrevam a tabuada do 2 e a seguir a tabuada do 4, espera-se que escrevam as tabuadas pedidas não estabelecendo qualquer relação entre elas. Em contrapartida, constitui uma tarefa de alto nível cognitivo, quando se propõe aos estudantes que escrevam a tabuada do 2 e a partir dela a do 4, a do 8 ou a do 6, utilizando as relações entre elas. Por exemplo, espera-se que a tabuada do 4 seja obtida usando os dobros dos números na tabuada do 2, a do 8, usando os dobros dos da do 4 ou os quádruplos dos da do 2 ou a do 6 através dos triplos dos da do 2. Neste caso a resolução da tarefa implica que os estudantes estabeleçam conexões entre o conhecimento que já possuem e o novo conhecimento, identificando relações numéricas.

Também quando se solicita a estudantes do 5º ou 6º anos para efetuar: $\frac{1}{3} \times \frac{3}{4}$ e se espera que multipliquem os numeradores e multipliquem os denominadores, isto é, façam apenas um procedimento, está-se perante uma tarefa de baixo nível cognitivo. Se a tarefa proposta consistir em inventar um problema cujo resultado possa ser obtido através daquela expressão, o nível cognitivo da tarefa passa a ser elevado. Neste caso, pretende-se que os estudantes pensem numa situação da vida real[1], por exemplo, "levei para o lanche 3/4 do meu bolo de aniversário para dividir com os meus amigos. Apenas comemos 1/3. Que parte do bolo comemos?". Espera-se que os estudantes considerem 3/4 do bolo e depois determinem 1/3 dessa parte (Figura 1), obtendo assim 3/12.

Figura 1 - Representação de $\frac{1}{3}$x$\frac{3}{4}$

$\frac{1}{3}$x$\frac{3}{4}$



Fonte: Autora

De notar ainda que o nível cognitivo da tarefa depende dos estudantes a quem é proposta, uma mesma tarefa pode ser um exercício para alguns e de elevado nível cognitivo para outros. Por exemplo, a tarefa da Figura 2, para estudantes no final da educação infantil ou no início do 1º ano, pode ser considerada de elevado nível cognitivo, mas será um exercício para estudantes dos 2º ou 3º anos.

Figura 2 - Tarefa 'Carros no parque'

Há 10 carros no parque de estacionamento. Alguns são vermelhos e outros são pretos. Quantos carros vermelhos e quantos carros pretos podem estar estacionados no parque?"
Pensa em todas as soluções que conseguires.
Apresenta as tuas soluções da forma que conseguires, usando cubos, desenhos ou palavras.

Fonte: NCTM (2017), adaptada pela autora

Em síntese, no ensino exploratório, as tarefas devem promover o raciocínio e a resolução de problemas e a sua complexidade deve estar adaptada ao nível dos estudantes a quem se dirigem. Tarefas demasiado fáceis passam a ser exercícios e o seu objetivo é necessariamente diferente, tarefas demasiado complexas, para os estudantes a quem são propostas, podem levá-los a desistir de as tentar resolver.

[1] Esta designação não é consensual, uma vez que na vida real não é habitual usar frações, designada por vezes como pseudo real.

Comunicação matemática na sala de aula

A resolução e discussão das tarefas em sala de aula constitui uma oportunidade para o professor promover o desenvolvimento da linguagem. Entre outros, aspetos como *redizer* – dizer a mesma ideia de uma forma diferente, normalmente de uma forma mais próxima da linguagem matemática formal, ou questionar o significado são formas de apoiar esse desenvolvimento, bem como interrogar o seu significado (FRANKE; KAZEMI; BATTEY, 2007). Em particular, as questões colocadas pelo professor aquando do trabalho autónomo ou na discussão coletiva jogam um papel fundamental na comunicação que acontece na sala de aula. Podem coexistir vários tipos de perguntas, como as de inquirição, explorando o pensamento dos estudantes, questionando o porquê apelando à justificação das respostas dadas, sendo igualmente relevantes as perguntas de confirmação, utilização de um conjunto de questões que levam o professor a confirmar que o estudante sabe a resposta e as questões de focalização onde o professor, tendo em conta o que os estudantes pensam na situação em análise, vai fazendo perguntas de forma a ir canalizando a resposta para o objetivo pretendido (PONTE; SERRAZINA, 2000).

A regulação da comunicação na sala de aula é parte importante do papel do professor já que ele tem de conseguir entender as ideias dos estudantes, pedir-lhes que as justifiquem, e fazer com que todos participem. Assim, a condução da comunicação na aula pelo professor deve criar oportunidades para que os estudantes oiçam, respondam, comentem e façam perguntas uns aos outros, garantindo que a comunicação se realiza em diferentes sentidos: do professor para os estudantes, dos estudantes para o professor e entre os próprios estudantes (PONTE; SERRAZINA, 2000). É importante que diferentes pontos de vista sejam considerados e que os estudantes sejam encorajados a explicarem e justificarem os seus raciocínios e soluções, desenvolvendo deste modo, com o apoio do professor, a sua compreensão (RUTHVEN; HOFMANN; MERCER, 2011). A abordagem dialógica é preconizada por estes autores como aquela que toma seriamente diferentes pontos de vista, encorajando os estudantes a conversar de uma forma exploratória, apoiando o desenvolvimento da compreensão. Wood (1999) refere que a exploração de desacordos entre os estudantes enriquece a discussão, já Potari e Jaworski (2002) consideram fundamental o grau de desafio das questões colocadas pelo professor.

Assim, para o bom funcionamento de um ambiente dialógico na sala de aula o professor deve estabelecer as normas adequadas de modo que as interações entre todos intervenientes aconteçam. A natureza das normas estabelecidas é o que distingue uma sala de aula das demais, uma vez que determina toda a atividade e discurso que acontecem (GÜVEN; DEDE, 2017). Numa dada sala de aula mais tradicional, onde quase só acontece o monólogo do professor, permanecer em silêncio pode ser considerado a norma social dominante; numa aula de ensino exploratório, onde se pretende um ambiente de trabalho de investigação, é expectável participar, sem constrangimentos, nos momentos de trabalho coletivo (ALRØ; SKOVSMOSE, 2002; GUERREIRO; SERRAZINA, 2018).

Stein, Engle, Smith e Hughes (2008) consideram que as discussões coletivas devem ser organizadas a partir das produções dos estudantes durante o trabalho autónomo, de modo que, apoiando-se nesses trabalhos, se registem progressos em ideias matemáticas importantes. Trata-se de um trabalho complexo e muito exigente, dado que as resoluções dos estudantes são por vezes muito diferentes, cabendo ao professor dar forma a essas ideias muitas vezes incompletas e mal formuladas pelos estudantes, estabelecendo conexões entre elas, para que sejam transformadas em ideias matemáticas mais ricas e precisas.

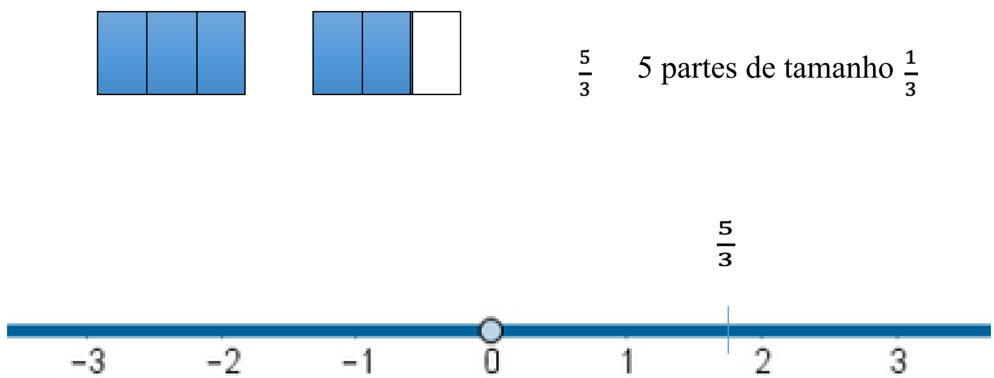
Com vista a uma frutuosa discussão coletiva, mantendo uma cultura de comunicação na sala de aula, Smith e Stein (2018) propõem o que designam por cinco práticas: (i) prever as respostas dos estudantes; (ii) verificar o trabalho e o comprometimento dos estudantes; (iii) selecionar, durante o trabalho autónomo, os estudantes que vão apresentar o seu trabalho na discussão coletiva; (iv) ordenar as apresentações de modo a serem discutidas numa sequência que foi prevista previamente; e (v) relacionar entre si as diferentes respostas e relacioná-las com ideias matemáticas chave. A preparação da atividade letiva, nomeadamente ao nível da sua planificação, é fundamental em todo este processo, em especial na antecipação de possíveis resoluções e reações dos estudantes perante a tarefa proposta, bem como uma primeira identificação de possíveis resoluções da tarefa e como estas podem ser sequenciadas durante a discussão coletiva. Em síntese, um planeamento adequado é determinante para que o professor seja capaz de responder de modo eficiente a grande parte das questões dos estudantes e enfrentar os desafios com que se depara (SERRAZINA, 2017). Contudo, podem sempre surgir na discussão aspetos não previstos e para os quais o professor deve estar preparado (CENGIZ; KLINE; GRANT, 2011; PONTE; QUARESMA, 2016), daí a importância que pode ter a formação do professor na qualidade da discussão.

No sentido de contribuir para a análise dessa discussão, Ponte, Mata-Pereira e Quaresma (2013) apresentam um conjunto de ações do professor relativas a aspetos matemáticos, promotoras do desenvolvimento do raciocínio durante a discussão coletiva, distinguindo quatro tipos de ações. Desde logo a ação de *Convidar* proporcionando o envolvimento dos estudantes na discussão em causa. Os outros três tipos de ações são *guiar/apoiar*, *informar/sugerir* e *desafiar* que, segundo os autores “formam o principal suporte das discussões matemáticas” (p. 59). Em Guiar/apoiar o professor procura que o estudante continue a sua participação na resolução de uma tarefa já iniciada, através do questionamento ou outras observações, apoiando a sua resolução. Já em Informar/sugerir o professor introduz informação, dá sugestões, valida respostas dos estudantes, assumindo a responsabilidade do discurso matemático. Em Desafiar, o estudante é colocado na posição de ser ele próprio a avançar com novas representações, interpretações e validações de resultados, argumentando estabelecendo conexões, formulando novos raciocínios e avaliando-os.

Raciocínio matemático

A discussão sobre raciocínio matemático não pode ser desligada da sobre representações matemáticas, pois é através destas que se expressam os raciocínios e o acesso às ideias matemáticas é estabelecido. A compreensão matemática é tanto mais profunda quanto os estudantes forem capazes de estabelecer conexões entre diferentes representações da mesma ideia matemática. Por exemplo o significado da fração 5/3, representada na sua forma simbólica, só é totalmente compreendido quando os estudantes forem capazes de compreender que esta fração é formada por cinco partes de tamanho 1/3, representando-a num retângulo, ou através de uma linha numérica (representação visual, figura 3), ou ainda através de um fio que tem de comprimento cinco terços de um decímetro (representação ativa).

Figura 3 - Representações visuais da fração $\frac{5}{3}$.

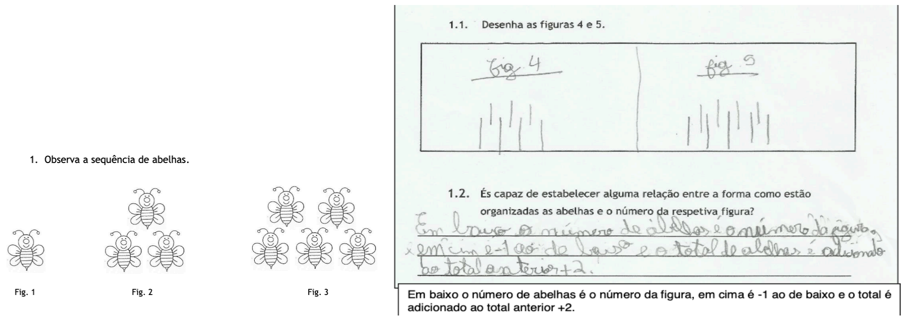


Fonte: Autora

Para Tripathi (2008), olhar para o mesmo conceito através de diferentes representações é como analisar o conceito através de diferentes lentes, permitindo cada uma delas uma perspetiva diferente, enriquecendo e aprofundando esse conceito. As diferentes representações têm um papel fundamental na resolução de problemas quando se esboçam diagramas, tabelas ou gráficos A discussão das semelhanças e diferenças entre representações ajuda à compreensão dos conceitos, sendo deste modo que os estudantes mostram os seus raciocínios. Também o sucesso na resolução de problemas está relacionado com o grau de flexibilidade que os estudantes evidenciam na passagem entre representações. Nos anos iniciais as diferentes representações, nomeadamente as ativas e icónicas, mas também a linguagem verbal, são especialmente relevantes para os estudantes expressarem o seu raciocínio e compreenderem o dos seus pares, podendo coexistir na mesma turma de acordo com o desenvolvimento dos estudantes que a compõem. No exemplo da Figura 3, podem existir estudantes que ainda precisam de visualizar com um cordão físico, outros que preferem a representação com retângulos e outros a reta numérica, eventualmente haverá alguns para quem a representação simbólica já é significativa. Em qualquer caso, os estudantes utilizam as representações para expressar os seus raciocínios.

Diferentes autores (por exemplo, PONTE, QUARESMA; MATA-PEREIRA, 2020) consideram três tipos de raciocínio: dedutivo, indutivo e abdutivo. O raciocínio dedutivo corresponde a encadear um conjunto de asserções de forma lógica justificando esse encadeamento e, desde que essa cadeia de deduções não tenha erros, a conclusão obtida é necessariamente verdadeira. Para muitos o raciocínio dedutivo é, por excelência, o raciocínio matemático, no entanto, sobretudo a partir de Polya (1990), o raciocínio indutivo tem muita importância em matemática, estando presente quando se chega a uma regra a partir da observação do que acontece em diferentes casos particulares, por exemplo quando através da observação de uma regularidade se estabelece uma generalização (Figura 4).

Figura 4 - Resolução da tarefa por um par de estudantes do 2.º ano



Fonte: Lima (2016, p. 63)

A Figura 4 ilustra a resposta dada por um par de estudantes do 2º ano à tarefa proposta, mostrando como foram capazes de utilizar uma representação mais simples e a partir dela fazer uma generalização (LIMA, 2016), utilizando o raciocínio indutivo. O raciocínio abdutivo aparece muitas vezes associado ao raciocínio indutivo. Silva (2009) considera, seguindo Pierce, que abduzir é levantar hipóteses, como formas de explicar fenómenos surpreendentes que se observam. Assim, para esta autora, abdução é "um processo de inferência que parte de um facto insólito ou invulgar e que procura uma explicação para a sua ocorrência" (p. 39).

Para Oliveira (2008), o raciocínio dedutivo tem um papel fundamental quando se conclui uma investigação matemática, normalmente essa prova é precedida por uma fase exploratória onde se experimentam tentativas, avanços e recuos, analogias ou intuições, emergindo tipos de raciocínio indutivo e abdutivo e também o processo de generalizar.
Como desenvolver nos estudantes a capacidade de raciocínio é um desafio que se coloca ao professor desde os anos iniciais. Mas, mais do que o tipo de raciocínio presente em cada caso, são fundamentais na sua aprendizagem os processos de raciocínio em que os estudantes se envolvem.

Como referido antes, o processo de justificar está muito associado ao raciocínio dedutivo, pois é através dele que se validam ou refutam afirmações, mudando o seu valor epistémico (JEANNOTTE; KIERAN, 2017). Para estas autoras generalizar consiste em inferir afirmações sobre um conjunto de objetos, ou uma relação sobre esses objetos, a partir da análise de um subconjunto desses objetos.

Ponte, Quaresma e Mata-Pereira (2020) destacam conjeturar, generalizar e justificar como processos essenciais do raciocínio matemático, sendo conjeturar central no raciocínio abdutivo, generalizar, ou seja, formular conjeturas de natureza geral, um processo-chave dos raciocínios indutivo e abdutivo e justificar, um processo essencial do raciocínio dedutivo.

Para além dos processos de raciocínio referidos como essenciais, existem outros que os apoiam e que exercem um forte papel no desenvolvimento do raciocínio nos primeiros anos e que também são abordados por Jeannotte e Kieran (2017): o processo de comparar está relacionado com o processo de classificar, que significa "estabelecer uma organização entre objetos diferentes, tendo por referência a identificação das suas características comuns" (BRUNHEIRA, 2019, p. 24). Estes são processos importantes aquando da construção dos conceitos e, em particular, nos primeiros anos de escolaridade e podem ser desenvolvidos através do ensino exploratório.

Metodologia

O presente estudo seguiu uma abordagem qualitativa-interpretativa (PATTON, 2002). Foca-se na tarefa "Cartões com números" (Figura 5) realizada numa turma do 2º ano de escolaridade no âmbito de um projeto que tinha como objetivo desenvolver a flexibilidade de cálculo (SERRAZINA; RODRIGUES, 2020). Trata-se de uma tarefa de natureza exploratória apresentada aos estudantes (turma de 26 estudantes em outubro de 2015), resolvida inicialmente em trabalho autónomo com os estudantes organizados em pares, seguida pela discussão coletiva na tela. A tarefa implica que os estudantes sejam capazes de estabelecer relações numéricas, de modo a conseguirem usar resultados conhecidos para obterem novos resultados. Por razões éticas os nomes dos estudantes são fictícios.

Os dados foram recolhidos através da observação participante de membros da equipa do projeto (entre as quais a autora deste artigo). Para a elaboração deste artigo foram revisitados os dados relativos à discussão coletiva, analisados os processos de raciocínio (JEANNOTTE; KIERAN, 2017) envolvidos e identificadas as ações da professora (PONTE et al., 2013).

Figura 5 - Tarefa cartões com números

11 + 25   19 + 25   100 - 52

50 - 25   25 + 21

25 + 25   50 - 30   100 - 48

50 - 21   52 - 30

25 + 9   50 - 20   100 - 50

20 + 25   52 - 29

50 - 29   25 + 26   10 + 25

Sei rapidamente o valor	Não sei rapidamente o valor

Fonte: Serrazina e Rodrigues (2020).

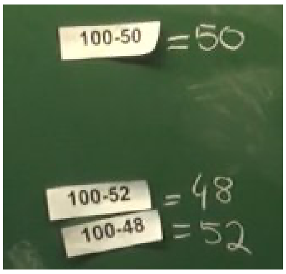
Discussão coletiva da tarefa

Durante o trabalho autónomo os estudantes preencheram a tabela com os cartões cujo valor eram capazes de identificar rapidamente e aqueles para os quais não sabiam, de imediato, o valor. A professora, na sua monitorização do trabalho dos pares, foi identificando os cartões considerados como "Não sei rapidamente o valor" pela generalidade da turma. Foram alguns desses cartões que trouxe para a discussão coletiva. Incluímos aqui a análise dessa discussão para três catões.

Entre os cartões identificados pelos estudantes como não sabendo rapidamente o valor encontravam-se os cartões 100-48 e 100-52. O episódio da Figura 6 ilustra as interações entre a professora e os seus estudantes na discussão que conduziu com a turma. A professora, depois de registar no quadro os resultados de três cartões (100-50, 100-52 e 100-48), numa ação de desafiar, solicita aos estudantes que estabeleçam relações entre as expressões, chamando a sua atenção para os números representados e pedindo justificações. Perante a resposta do Paulo, identificando o subtrativo de uma das expressões como a diferença do outro, solicita uma explicação “Então o que é que isso quer dizer?”.

Figura 6 - Episódio da discussão coletiva sobre as relações entre 100-48 e 100-52

A professora retira os cartões 100-52 e 100-48 e coloca-os por baixo do cartão 100-50, registando à frente os respetivos resultados, chamando a atenção dos estudantes para a relação entre eles.



Professora: 100-52 é menos 2 [do que 100-50], tirámos 2 ao 50 porque 100-50 é 50. Então 100-52 tem de se tirar? 2! 100-48… não posso tirar tanto como 100-50. Se eu tirar 50, fica 50. Se tirar 48 fico com mais 2. Agora olhem para estas duas [igualdades]. O que é que elas são uma da outra? … Não veem nada? São totalmente diferentes?!

(…)

Paulo: A resposta que está aqui (*apontando para a resposta 52*), está aqui *(apontando para o subtrativo de 100-52) e a resposta que está aqui (apontando para a resposta 48)* está aqui *(apontando para o subtrativo de 100-48)*

Professora: Então, o que é que isso quer dizer?

Vários estudantes vão ao quadro, mas não conseguem justificar.

Professora: Ainda não justificaram. Já explicaram que há coisas que são iguais. Porque é que isso acontece?

Para sair do impasse, a professora pede outro exemplo em que isso aconteça, dizendo que podem ser quaisquer números.

(...)

Professora: E agora?

Paulo: 100 menos 49, igual a 51. (*Gil regista no quadro*)

Professora: E agora, o que é que ele vai fazer?

Professora: Então, porque é que aparece trocado? Já perceberam que se pode trocar. Porquê? Porque é que se pode trocar?

Os estudantes não respondem por um breve momento.

Professora: Se calhar, se pensarmos ao contrário, ajuda um bocadinho...

Luís (*dirige-se ao quadro e aponta para os números quando os verbaliza*): Porque 49 mais 51 dá 100 e 51 mais 49 dá 100. (*aponta para os cartões de cima*) 48 mais 52 dá 100. E 52 mais 48 dá 100. (...)
Luís: E acontece em tudo.

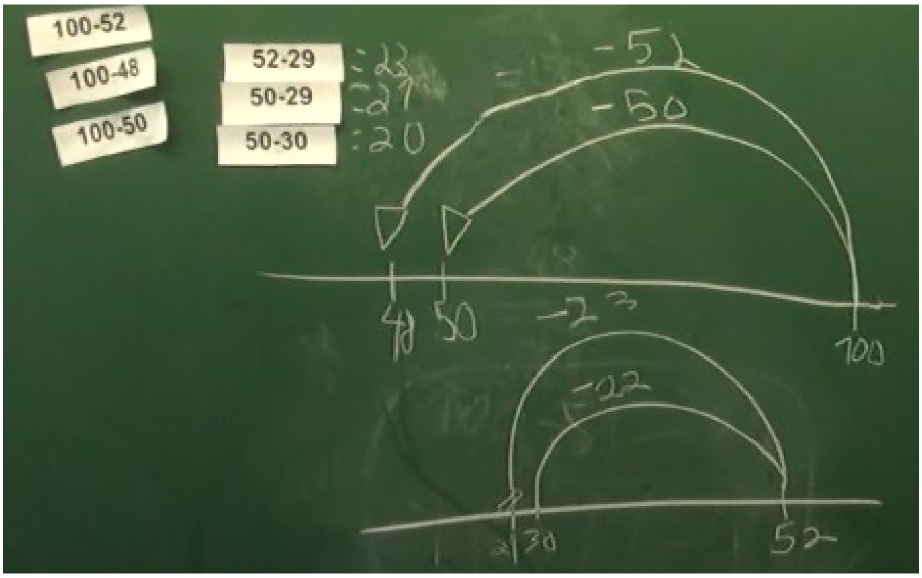
Fonte: Dados da pesquisa.

Após insistir que é preciso justificar, e, perante a não resposta dos estudantes, a professora prossegue precisando a sua questão: "Já explicaram que há coisas que são iguais. Porque é que isso acontece?". Mantendo-se o impasse, solicita-lhes outro exemplo numa ação de informar/sugerir.

Os estudantes apresentam o exemplo, mas continuam a não conseguir avançar com uma justificação. Perante isso a professora afirma "Se calhar, se pensarmos ao contrário, ajuda um bocadinho...", numa ação de apoiar/guiar, o que leva outro estudante (Luís) a verbalizar uma justificação e posteriormente uma generalização. Quando Paulo olha para as expressões 100-48=52 e 100-52=48, concluindo que os números 48 e 52 aparecem nas duas expressões em posições diferentes está a utilizar o processo de *Comparar*. Perante a falta de justificação, a professora solicita um outro exemplo e quando outro estudante (Gil) regista uma nova expressão: 100-51 que dá 49 e Paulo verbaliza que 100-49=51 está presente o processo de *Exemplificar*. Já o processo de *Justificar* aparece pela fala de Luís "49 +51 dá 100 e 51+49 dá 100. 48+52 dá 100. E 52+48 dá 100". O processo de *Comparar* volta a estar presente quando Luís coloca as duas situações em paralelo "Porque 49+51 dá 100 e 51+49 dá 100. 48+52 dá 100. E 52+48 dá 100". O processo *Generalizar* aparece na sequência dos anteriores pela resposta de Luís "E acontece em tudo".

No episódio da Figura 7, a professora convida o par Santiago e Nádia a irem ao quadro mostrar como fizeram. Este par tinha utilizado no seu trabalho autónomo a linha numérica vazia com saltos lineares associados à subtração, usando uma estratégia diferente da generalidade da turma e, por isso, a professora quis que a partilhassem na discussão coletiva. O par fez isso para o cálculo de 100-52 e para o de 52-23, utilizando em ambos a estratégia da compensação (52 mais 2 do que 50 e 23 mais 1 do que 22), ao associarem saltos maiores vão obter números menores, por isso situados à esquerda na linha numérica. Para além da utilização da linha numérica vazia, este par usou a expressão 52-23, que não existia no conjunto dos cartões distribuídos, para auxiliar no cálculo de uma expressão que consideraram que não sabiam à partida, 52-29. A professora desafiou-os a apresentar uma justificação questionando-os sobre isso.

Figura 7 - Resolução usando a linha numérica (Santiago e Nádia)



A professora interpela o par por que motivo 52-23 ajuda a calcular 52-29 se esse cartão não existe.
Luís: Porque 29 mais este (*aponta para 23*), igual a este (*aponta para 52*).
Professora (*explicitando os números envolvidos*): Porque 29+23 vai dar 52. Se eu sei que 52-23 é 29, então 52-29 é igual a 23.

Fonte: Dados da pesquisa

Santiago e Nádia não conseguiram explicitar uma justificação e é, mais uma vez, Luís que justifica que se pode usar 52-23 para determinar 52-29. Procura uma garantia que permita mudar o valor epistémico da narrativa, baseada na propriedade fundamental da subtração: o aditivo é igual à soma do subtrativo e da diferença, sendo possível trocar os números correspondentes ao subtrativo e à diferença. Esta propriedade já tinha sido inferida por Luís em episódio anterior, voltando a identificá-la nesta nova situação. A professora representa o raciocínio de Luís de um modo mais explícito para toda a turma. Ao identificar a propriedade da subtração, Luís apresenta uma justificação, tendo por base uma generalização.

Considerações finais

Este artigo discute o que pode ser uma aprendizagem da matemática com significado desde os anos iniciais. Considera-se que aprender matemática inclui necessariamente saber resolver problemas de matemática e da vida real utilizando o raciocínio matemático e que é possível fazer isso desde os primeiros anos de escolaridade. Na nossa perspectiva a melhor forma de o fazer é através do que é designado por ensino exploratório (PONTE, 2005), com incidência no envolvimento dos estudantes em tarefas de elevado nível de exigência cognitiva, dando uma especial atenção à comunicação matemática a desenvolver na sala de aula, quer no trabalho em pequenos grupos quer na discussão coletiva. Para que esta discussão seja rica, o papel do professor é crucial em todo o processo, daí a atenção que deve ser dada às ações do professor no sentido de que a discussão coletiva (PONTE; MATA-PEREIRA; QUARESMA, 2013) seja promotora do desenvolvimento do raciocínio matemático dos estudantes.

Nos episódios apresentados evidencia-se o papel da professora quando através das suas ações incentiva os seus estudantes a partilhar com os colegas os seus processos e a justificá-los. Ações como o desafiar os estudantes a justificar as suas opções, apoiando esse processo, são fundamentais para que aqueles progridam no desenvolvimento do seu raciocínio matemático. De notar que a professora não dá respostas, antes questiona, procurando manter o nível cognitivo da tarefa. Nos anos iniciais de escolaridade é possível e fundamental a reflexão sobre os diferentes processos de raciocínio matemático como, conjeturar, generalizar e justificar, mas também os que os apoiam e que têm um importante papel nas primeiras aprendizagens: comparar, classificar e exemplificar (JEANNOTTE; KIERAN, 2017). Da análise dos episódios apresentados fica claro que através do questionamento os estudantes realizam diferentes processos de raciocínio.

Embora em Matemática o raciocínio dedutivo tenha um papel importante e seja tradicionalmente considerado ‘o raciocínio matemático’, os raciocínios indutivo e abdutivo jogam um papel fundamental na aprendizagem da Matemática com compreensão, sendo muitas vezes usados em conjunto (RIVERA; BECKER, 2009). Isso foi claro quando a partir de exemplos concretos os estudantes conseguiram chegar à generalização.

Agradecimento: Este artigo foi apoiado pela FCT – Fundação para a Ciência e Tecnologia, através do Projeto REASON – Raciocínio Matemático e Formação de Professores (Projeto IC&DT–AAC 02/SAICT/2017 AND PTDC/CED-EDG/28022/2017).

Referências

ALRØ, H.; SKOVSMOSE, O. **Dialogue and learning in mathematics education**: Intention, reflection, critique. Kluwer. 2002.

BRUNHEIRA, L. **O desenvolvimento do raciocínio geométrico na formação inicial dos professores dos primeiros anos**. 2019. 282 f. Tese (Doutorado em Educação: Didática da Matemática). Instituto de Educação, Universidade de Lisboa, Lisboa, 2019. Recuperado de http://hdl.handle.net/10451/38922.

CENGIZ, N.; KLINE, K.; GRANT, T. J. Extending students' mathematical thinking during whole-group discussions. **Journal of Mathematics Teacher Education**, v. 14, p. 355-374, 2011.

FERREIRA, E. **O desenvolvimento do sentido de número no âmbito da resolução de problemas de adição e subtração no 2.º ano de escolaridade**. 2012. 536 f. Tese (Doutorado em Educação: Didática da Matemática). Instituto de Educação, Universidade de Lisboa, Lisboa, 2012. Recuperado de http://hdl.handle.net/10451/5996

FRANKE, M. L.; KAZEMI, E.; BATTEY, D. Understanding teaching and classroom practice in mathematics. In: LESTER, F. (Ed.). **Second handbook of mathematics teaching and learning**. Charlotte, NC: Information Age Publishing. 2007, p. 225-256.

GUERREIRO, H. G.; SERRAZINA, L. Normas sociais e sociomatemáticas numa aprendizagem comparticipada da noção de 10%. **Quadrante**, v. 27, n. 1, p. 69-94, 2018.

GÜVEN, N. D.; DEDE, Y. Examining social and sociomathematical norms in different classroom microcultures: Mathematics teacher education perspective. **Educational Sciences: Theory and Practice**, v. 17, n. 1, p. 265–292, 2017

JEANNOTE, D.; KIERAN, C. A conceptual model of mathematical reasoning for school mathematics. **Educational Studies in Mathematics**, v. 96, n.1, p. 1-16, 2017. doi:10.1007/s10649-017-9761-8.

LIMA, S. C. O. N. **O desenvolvimento do raciocínio com tarefas de regularidades e sequências**. 2016. 116 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática no Pré-Escolar e no 1º e 2º ciclo do ensino básico). Instituto Politécnico de Lisboa, Lisboa, 2016. Recuperado de http://hdl.handle.net/10400.21/8384.

NCTM. **Princípios para a Ação**: assegurar a todos o sucesso em Matemática. Associação de Professores de Matemática. 2017. [Tradução de Principles to Actions: Ensuring mathematical success for all, publicado em 2014 pelo National Council of Teachers of Mathematics (NCTM)].

OLIVEIRA, H.; MENEZES, L.; CANAVARRO, A. P. Conceptualizando o ensino exploratório da Matemática: Contributos da prática de uma professora do 3.º ciclo para a elaboração de um quadro de referência. **Quadrante**, v. 22, n. 3, p. 1-25, 2013.

OLIVEIRA, P. O raciocínio matemático à luz de uma epistemologia soft. **Educação e Matemática**, v. 100, p. 3-9, 2008.

PATTON, M. **Qualitative research & evaluation methods**. 3. ed. Thousand Oaks: Sage. 2002.

PÓLYA, G. **Mathematics and plausible reasoning** (ed. orig. 1954, Vol. 1). Princeton: University Press, 1990.

PONTE, J. P. Gestão curricular em Matemática. In: GTI (Ed.). **O professor e o desenvolvimento curricular**. Lisboa: Associação de Professores de Matemática. 2005, p. 11-34.

PONTE, J. P.; MATA-PEREIRA, J.; QUARESMA, M. Ações do professor na condução de discussões matemáticas. **Quadrante**, v. 22, n. 2, p. 55-81, 2013.

PONTE, J. P.; QUARESMA, M. Teachers' professional practice conducting mathematical discussions. **Educational Studies in Mathematics**, v. 93, n. 1, p. 51-66, 2016.

PONTE, J. P.; QUARESMA, M.; MATA-PEREIRA, J. Como desenvolver o raciocínio matemático na sala de aula?". **Educação e Matemática**, v. 156, p. 7-11, 2020.

PONTE, J. P.; SERRAZINA, M. L. **Didática da Matemática no 1.º ciclo**. Lisboa: Universidade Aberta, 2000.

POTARI, D.; JAWORSKI, B. Tackling complexity in mathematics teaching development: Using the teaching tool for reflection and analysis. **Journal of Mathematics Teacher Education**, v. 5, p. 351-380, 2002.

RIVERA, F. D.; BECKER, J. R. Algebraic reasoning through patterns: Findings, insights, and issues drawn from a three-year study on patterns are intended to help teach prealgebra and algebra. **Mathematics Teaching in Middle School,** v.15, n. 4, p.213-221, 2009.

RUTHVEN, K.; HOFMANN, R.; MERCER, N. A dialogic approach to plenary problem synthesis. In: UBUZ, B. (Ed.). **Proceedings of 35th Conf. of the International Group for the Psychology of Mathematics Education**. 2011, v. 4, p. 81-88.

SERRAZINA, L. Planificação do ensino e aprendizagem da Matemática. In: GTI (Ed.). **A Prática dos professores**: Planificação e discussão coletiva na sala de aula. Lisboa: Associação de Professores de Matemática, 2017, p. 1-31.

SERRAZINA, L.; RODRIGUES, M. Teacher's actions to promote flexibility in mental calculation. **Journal of Mathematics Education**, v. 13, n. 1, p. 56-7. 2020. DOI: 10.26711/007577152790054

SILVA, A. P. A problemática da descoberta e da prova. **Educação e Matemática**, v. 101, p. 37-41, 2009.

SMITH, M. S.; STEIN, M. K. **5 Practices for Orchestrating Productive Mathematics Discussions**. Second edition. Reston, Va: National Council of Teachers of Mathematics, 2018.

STEIN, M. K.; ENGLE, R. A.; SMITH, M.; HUGHES, E. K. Orchestrating productive mathematical discussions: five practices for helping teachers move beyond show and tell. **Mathematical Thinking and Learning**, v. 10, p. 313-348, 2008.

TRIPATHI, P. N. Developing mathematical understanding through multiple representations. **Mathematics Teaching in the Middle School**, v. 13, n. 8, p. 438-445, 2008.

WOOD, T. Creating a context for argument in mathematics class. **Journal for Research in Mathematics Education**, v. 30, n. 2, p. 171-191, 1999.

Recebido em 26 de abril de 2021
Aprovado em 14 de julho de 2021