

## **SOBRE MODELOS MATEMÁTICOS NOS ANOS INICIAIS:**

### **das pesquisas às práticas**

#### *On Mathematical Models in the Elementary School:*

#### *from research to practice*

**Emerson Tortola**

Doutor em Ensino de Ciências e Educação Matemática  
Universidade Tecnológica Federal do Paraná – Paraná – Brasil

[emersonortola@utfpr.edu.br](mailto:emersonortola@utfpr.edu.br)

<http://orcid.org/0000-0002-6716-3635>

**Karina Alessandra Pessoa da Silva**

Doutora em Ensino de Ciências e Educação Matemática  
Universidade Tecnológica Federal do Paraná – Paraná – Brasil

[karinasilva@utfpr.edu.br](mailto:karinasilva@utfpr.edu.br)

<http://orcid.org/0000-0002-1766-137X>

### **Resumo**

Neste artigo trazemos resultados de uma pesquisa, cujo objetivo foi investigar como modelos matemáticos são produzidos nos anos iniciais do Ensino Fundamental e como eles podem orientar as práticas com Modelagem na sala de aula nesse nível de escolaridade. A fundamentação teórica baseia-se na Modelagem Matemática como alternativa pedagógica para a construção de modelos matemáticos nos anos iniciais. Analisamos três atividades de Modelagem desenvolvidas por três professoras atuantes no 4º ano do Ensino Fundamental, em diferentes contextos de formação: pesquisa de iniciação científica de um curso de Licenciatura em Matemática; disciplina de Mestrado sobre Modelagem Matemática; e pesquisa de Mestrado em Ensino de Matemática. Nossa escolha metodológica para as análises dos relatórios entregues pelas professoras é de cunho qualitativo e segue encaminhamentos da Teoria Fundamentada em Dados. Por meio da codificação dos dados relativos à construção de modelos matemáticos que orientam as práticas em sala de aula, evidenciamos que esses são subsidiados pelo planejamento, pela responsabilidade compartilhada e pela comunicação.

**Palavras-Chave:** Educação Matemática. Modelagem Matemática. Modelo Matemático. Anos Iniciais. Práticas de sala de aula.

### **Abstract**

In this paper we bring results from a research, whose objective was to investigate how mathematical models are produced in Elementary School and how they can guide practices with modelling in the classroom at this level of schooling. The theoretical foundation is based on Mathematical Modelling as a pedagogical alternative for the construction of mathematical models in the early years of schooling. We analyzed three modelling activities carried out by three teachers working in the 4<sup>th</sup> Grade of Elementary School, in different educational contexts: scientific initiation research of a Mathematics

Degree course; Master's discipline on Mathematical Modelling and Master's research in Mathematics Teaching. Our methodological choice for the analysis of the reports delivered by the teachers is of a qualitative nature and follows guidelines from Grounded Theory. Through the codification of data related to the construction of mathematical models that guide classroom practices, we show that these are subsidized by planning, shared responsibility, and communication.

**Keywords:** Mathematics Education. Mathematical Modelling. Mathematical Model. Elementary School. Classroom Practices.

## Introdução

A implementação da Modelagem Matemática nas aulas de Matemática dos anos iniciais do Ensino Fundamental, ou abreviadamente, anos iniciais, está avançando em práticas de sala de aula. Todavia, Villa-Ochoa, Soares e Alencar (2019, p. 63) destacam “que há produções científicas mínimas no assunto de Modelagem Matemática nos anos iniciais do Ensino Fundamental, indicando a necessidade de novos estudos ou pesquisas”.

Nesse contexto, um aspecto que tem nos chamado atenção, no que se refere ao desenvolvimento de atividades de Modelagem Matemática nos anos iniciais, é a produção de modelos matemáticos. Entendemos que uma atividade de Modelagem Matemática se caracteriza pelo conjunto de ações desenvolvidas, pelos conhecimentos empreendidos e relações estabelecidas. Acreditamos que a produção de modelos é uma ação importante para essa atividade, como coloca Tortola (2016, p. 263), pois, por meio dela, os alunos produzem “uma diversidade de estruturas matemáticas que podem contribuir para a observação das regularidades e generalização da situação, assim como podem constituir o ponto de partida para a discussão de relações entre diferentes situações”.

Com o intuito de investir em pesquisas que versam sobre Modelagem Matemática nos anos iniciais ao mesmo tempo em que práticas sejam implementadas, considerando a produção de modelos matemáticos, neste artigo investigamos: *Como modelos matemáticos são produzidos nos anos iniciais do Ensino Fundamental? E como eles podem orientar as práticas com Modelagem na sala de aula nesse nível de escolaridade?*

Para isso, analisamos três atividades de Modelagem Matemática desenvolvidas com alunos do 4º ano do Ensino Fundamental por professoras, atuantes nesse nível de escolaridade, em diferentes contextos de formação: i) uma pesquisa de iniciação científica de um curso de Licenciatura em Matemática; ii) uma disciplina de Mestrado sobre Modelagem Matemática; e iii) uma pesquisa de Mestrado em Ensino de Matemática. Os dados, provenientes dos relatórios das professoras, foram analisados segundo orientações da metodologia de pesquisa denominada

Teoria Fundamentada em Dados, um conjunto de procedimentos ou diretrizes flexíveis, cujos processos analíticos emergem em conformidade com os objetivos de pesquisa e “conseguem fornecer um rumo para que se visualize além do óbvio e um caminho para se chegar a interpretações imaginativas”, que despertam novas perspectivas e panoramas (CHARMAZ, 2009, p. 243).

Quanto à estrutura do artigo, apresentamos inicialmente nosso entendimento sobre modelagem matemática e pontuamos algumas características quando considerada no contexto dos anos iniciais, particularmente sobre modelos matemáticos e possíveis configurações sob as quais podem ser produzidos. Na sequência, descrevemos os aspectos metodológicos da pesquisa, especificando o uso da Teoria Fundamentada em Dados e os três contextos de formação nos quais as atividades analisadas foram desenvolvidas. Por fim, tecemos considerações e reflexões, por meio da análise das atividades, em relação às questões de pesquisa, discorrendo sobre como a produção de modelos pode orientar as práticas com modelagem na sala de aula nos anos iniciais.

### **Modelos e modelagem matemática nos anos iniciais**

Nosso entendimento sobre Modelagem Matemática está pautado nas assertivas de Almeida, Silva e Vertuan (2012, p. 9) que a caracterizam como “uma alternativa pedagógica em que se aborda, por meio da Matemática, um problema não essencialmente matemático”. O problema subsidia o desenvolvimento da atividade de Modelagem e corresponde a uma questão cuja resposta não é conhecida, mas que se deseja conhecer.

Segundo English (2016, p. 187) a “Modelagem começa com um problema do mundo real que requer interpretação, investigação e representação matemática”. A literatura convencionou caracterizar a representação matemática, que expressa as relações matemáticas presentes na situação-problema do mundo real e possibilita a produção de uma resposta para o problema, como modelo matemático (DOERR; ENGLISH, 2003).

A atividade matemática de deduzir um modelo para possibilitar a apresentação de uma solução para o problema deve ser subsidiada pela definição de variáveis e hipóteses que se fundamentam na situação em estudo e é feita em linguagem matemática, com termos e simbologia próprios. Para D’Ambrósio (2009, p. 92),

a utilização de modelos matemáticos depende do conhecimento dos fatos e fenômenos, do comportamento reconhecível dos objetos reais e sistemas, normalmente expressos por leis, em sua maioria derivadas empiricamente.

Para lidar e tirar benefícios a partir de modelos matemáticos, ferramentas intelectuais são fornecidas pela matemática, considerada um corpo de conceitos e teorias e as regras operacionais para lidar com eles.

Dependendo das orientações do professor e dos conhecimentos dos alunos, pode-se resultar em “modelos de variados níveis de sofisticação” (ENGLISH, 2016, p. 187). Nesse sentido, quando se trata de alunos dos anos iniciais do Ensino Fundamental,

a Modelagem Matemática apresenta algumas especificidades, especialmente no que se refere à simbologia matemática e à produção de modelos matemáticos e seu uso na apresentação de respostas para o problema em estudo em cada situação investigada (TORTOLA; ALMEIDA, 2018, p. 146).

O modelo matemático corresponde a uma representação externa à mente dos sujeitos, cujas declarações dos envolvidos estão em termos matemáticos. Nesse sentido, considerando os anos iniciais, um modelo matemático pode ser representado por meio de esquemas, gráficos, desenhos, materiais manipuláveis, colagens e língua natural, os quais constituem sistemas de elementos, operações, relações e regras e servem para descrever, explicar e/ou prever aspectos da situação-problema (DOERR; ENGLISH, 2003).

Tortola e Almeida (2016) realizaram uma pesquisa na qual classificaram os modelos matemáticos produzidos para uma atividade de Modelagem desenvolvida com 112 alunos dos anos iniciais do Ensino Fundamental, 1º ao 5º ano, uma turma de cada, a partir dos usos da linguagem que esses alunos fizeram para interpretar matematicamente o crescimento das unhas. Cinco tipos de modelos matemáticos são indicados pelos autores: descritivos, aritméticos, gráficos, tabulares e textuais. Cada um à sua maneira, descreve a relação entre as variáveis do problema: tempo e crescimento das unhas.

Como atividades de Modelagem Matemática são geralmente desenvolvidas em grupo (ALMEIDA; SILVA; VERTUAN, 2012), sejam grupos menores ou a sala toda, os modelos matemáticos produzidos servem como subsídios para a argumentação e a comunicação de resultados.

De acordo com English e Watters (2004, p. 336), “várias questões, conjecturas, conflitos, revisões e resoluções surgem à medida que as crianças desenvolvem, avaliam e se preparam para comunicar seus produtos”. Com “produtos” os autores referem-se a descrições, explicações, justificativas e representações matemáticas associadas aos modelos matemáticos. Segundo eles, como os modelos devem ser compartilháveis e utilizáveis por outras pessoas,

eles devem ser submetidos ao escrutínio dos membros do grupo, que acabam por revisitar o desenvolvimento da atividade, atribuindo a ela um caráter

iterativo que tem como ponto de partida a realidade, a partir da qual selecionamos parâmetros, construímos um modelo, procedemos para sua análise matemática, verificamos resultados por meio de procedimentos de controle e reformulamos o modelo, repetindo a análise e o controle até chegarmos a uma percepção satisfatória dos fatos e fenômenos selecionados (D'AMBRÓSIO, 2015, p. 44).

Esse olhar iterativo contribui para que Matemática e realidade não sejam vistas como mundos isolados, mas, pelo menos no contexto da atividade, como um todo uníssono e articulado.

### **Aspectos metodológicos**

Com o intuito de contribuir com a implementação de atividades de Modelagem Matemática em sala de aula nos anos iniciais do Ensino Fundamental, temos desde 2014 orientado pesquisas tanto na Iniciação Científica quanto no Mestrado em Ensino de Matemática. Quando mencionamos trabalhos com Modelagem Matemática nos anos iniciais, uma questão que se coloca diz respeito à produção de modelos matemáticos.

Levando em consideração diferentes configurações de modelos matemáticos apresentadas na literatura nos debruçamos em investigar as questões: *Como modelos matemáticos são produzidos nos anos iniciais do Ensino Fundamental? E como eles podem orientar as práticas com Modelagem na sala de aula nesse nível de escolaridade?* Para isso, trazemos à baila três atividades de Modelagem Matemática desenvolvidas com alunos do 4º ano do Ensino Fundamental por professoras, atuantes nesse nível de escolaridade, em diferentes contextos de formação.

A Atividade 1 – Descobrimo o número do calçado - foi desenvolvida em 2014 por uma professora com magistério, enquanto cursava Licenciatura em Matemática em uma universidade pública federal, no contexto de uma iniciação científica, orientada pelo primeiro autor deste artigo, em uma escola municipal do Oeste do Paraná, com uma turma de 19 alunos do 4º ano do Ensino Fundamental. A ideia de estudar a relação entre o tamanho do pé e o número do calçado surgiu de uma indagação dos alunos em relação à obra “Abaporu” de Tarsila do Amaral, durante a aula de Arte e foi usada pela professora para o desenvolvimento da atividade.

A Atividade 2 – Rendimento de receita de beijinho - foi desenvolvida por uma professora graduada em Matemática, com especialização em Alfabetização Matemática, no ano de 2020, com 29 alunos do 4º ano de uma escola particular do Norte do Paraná em contexto remoto, em dois momentos: um assíncrono e um síncrono. No momento assíncrono, os alunos assistiram um vídeo produzido pela professora no qual apresentou orientações para a produção de uma receita de beijinho e solicitou que os alunos junto aos pais fizessem a receita com diferentes frações dos ingredientes. No momento síncrono, via Google Meet, já com o valor do rendimento de beijinhos, em 2h50min de aulas de Matemática foi empreendida a discussão sobre os ingredientes do doce e a quantidade utilizada para preparar para toda a sala. A atividade foi desenvolvida no contexto de uma disciplina de Modelagem Matemática na Perspectiva do Ensino de um programa de Mestrado de uma universidade pública federal, cuja professora, segunda autora do artigo, solicitou aos professores em formação continuada que desenvolvessem junto a seus alunos uma atividade de Modelagem.

A Atividade 3 – Pintando o pátio da escola - foi planejada e desenvolvida com 22 alunos do 4º ano de uma escola da rede pública municipal no Norte do Paraná, em 2019, por uma professora formada em Pedagogia no âmbito de sua pesquisa de mestrado, orientada pela segunda autora deste artigo. A escola estava passando por reformas e os alunos queriam que fosse pintada no pátio uma Amarelinha Africana e, para tal, havia a necessidade de fazer uma pintura no pátio. Os alunos interessados em determinar a quantidade de tinta utilizada se propuseram a realizar a investigação.

Os dados que subsidiam nossas análises fazem parte dos relatórios das professoras entregues na Iniciação Científica, na disciplina de mestrado e na dissertação. Nossas análises são orientadas segundo indicações da metodologia de pesquisa denominada Teoria Fundamentada em Dados (CHARMAZ, 2009), como indicamos anteriormente.

Primeiramente realizamos uma codificação inicial dos relatórios entregues considerando características dos encaminhamentos para chegar na dedução do modelo matemático em cada atividade. Em seguida, reorganizarmos os códigos a partir dos quais extraímos conceitos, como sugere a codificação axial. Optamos por utilizar o recurso itálico para destacar os códigos e o recurso negrito para destacar os conceitos. Na codificação focalizada associamos os conceitos com as práticas empreendidas pelas professoras na qual formulamos a teoria, delimitando a terminologia e indicando como os modelos podem orientar as práticas em sala de aula dos anos iniciais com Modelagem Matemática. Com o intuito de

elucidar o movimento de nossas análises utilizamos nos quadros sombreados que denotam aproximações entre os códigos e conceitos.

Na seção subsequente apresentamos uma descrição para cada atividade para, em seguida, apresentarmos a codificação. Para nos referirmos a cada professora utilizamos duas letras: PI para a que desenvolveu o trabalho na iniciação científica; PD para a que implementou uma atividade de Modelagem como trabalho da disciplina; e PM para a professora que se dedicou à pesquisa no mestrado. Excertos de falas dos alunos que se fazem presentes para subsidiar nossas análises são indicadas pela palavra *Aluno(a)*, as letras que se referem à professora e um número que os diferencia. Assim AlunoPI2 é o aluno 2 da PI; AlunoPD5 é o aluno 5 da PD; AlunoPM3 é o aluno 3 da PM.

### **Práticas resultantes das pesquisas: sobre as atividades**

A Atividade 1 – *Descobrimo o número do calçado*, como apresentada anteriormente, foi desenvolvida a partir de uma inquietação dos alunos em uma tarefa de Arte, enquanto faziam a releitura da obra “Abaporu” de Tarsila do Amaral. Ao observar a imagem apresentada pela professora, o tamanho do pé causou estranheza aos alunos. A professora aproveitou o interesse deles pelo tamanho do calçado para aquele pé enorme e questionou:

PI: Mas como nós sabemos o número do nosso calçado na hora de comprar?

AlunaPI3: Todos nós sabemos o tamanho de nossos calçados, né professora? É só experimentar!

PI: Mas esta é a única maneira para saber o tamanho? E se quiséssemos saber o tamanho adequado de calçado para nosso pé sem ter que experimentar, como faríamos?

Diante da dúvida que se instaurou, a professora disponibilizou aos alunos folhas de sulfite e réguas e solicitou que eles desenhassem seus pés e com o auxílio de uma régua os medissem. Ao comparar os resultados, os alunos não conseguiram estabelecer relação alguma em um primeiro momento. Para auxiliar nesse sentido, a professora contou uma história que explica como os números dos calçados foram criados.

PI: Na história dessa numeração diz-se que para descobrir o número do calçado os europeus utilizavam grãos de cevada, será que dá certo? Será possível fazer isso com algum outro material?

AlunoPI4: Mas como é essa semente profe?

Embora não fosse possível usar os grãos de cevada para realizar a medição de seus pés, a história contada inspirou os alunos a formularem hipóteses sobre como efetivá-la. A professora que havia levado alguns grãos para a sala de aula, disponibilizou grãos de feijão aos

alunos, a pedido deles, que os enfileiraram sobre os desenhos de seus pés. Porém, os grãos tinham aproximadamente um centímetro cada e a quantidade de grãos coincidia ou, pelo menos, se aproximava, com as medidas de seus pés, não correspondendo com o número de seus calçados. Observando os grãos que a professora trouxe para a sala de aula um aluno propôs uma nova hipótese:

AlunoPI5: Professora, acho que podemos usar o arroz, né? Olha só o grão de arroz é menor que o grão de feijão.

[...]

AlunoPI3: Nossa...que legal! Deu certo! Eu uso o número 34, e coube certinho 34 grãos de arroz no desenho do meu pé.

[...]

AlunoPI7: Sempre vai dar certo profe?

PI: Os grãos são todos do mesmo tamanho?

AlunoPI7: Não sei.

PI: Então vamos medir!

AlunoPI3: Tem alguns que são um pouquinho mais pequenos.

PI: É por isso que a medida do nosso calçado foi padronizada. O tamanho de cada ponto do número do calçado é de  $\frac{2}{3}$  de um centímetro, que corresponde a 0,666.

Ao questionar se os grãos têm todos o mesmo tamanho, a professora sinalizou aos alunos a necessidade histórica da sociedade de padronizar medidas. O ponto do calçado não pode ser “mais ou menos”, ele tem um tamanho definido,  $\frac{2}{3}$  de um centímetro, que é aproximadamente o tamanho dos grãos de cevada e, convenientemente, dos grãos de arroz. A partir dessas ideias, os alunos ilustraram sobre o desenho de seus pés o número de grãos de arroz enfileirados que eles contaram e registraram essa quantidade. Para auxiliar na interpretação de seus registros, a professora questionou:

PI: O que acontece se dividirmos o tamanho do nosso pé em centímetros por 0,666 [...]?

AlunoPI1: Dá o número do nosso calçado.

A pergunta da professora foi feita com a intenção de verificar se os alunos compreenderam o procedimento realizado por eles, uma vez que eles conheciam a medida do comprimento de seus pés e sabiam que para determinar a medida do calçado precisavam enfileirar uma quantidade de “grãos” ou pontos, de iguais comprimentos. Dessa forma, ou eles contavam o número de grãos, ou calculavam a divisão.

Essa experiência levou os alunos a concluírem que para saber o número do calçado, basta dividir o tamanho do pé em centímetros por 0,666. Na Figura 1 apresentamos uma síntese do desenvolvimento da Atividade 1 por PI.

Figura 1 – Síntese da Atividade 1

*Como se determina o número de um calçado a partir da medida do pé?*

grãos de feijão **Refutada!**      grãos de arroz **Ok!**

- Nossa! Olha o tamanho desse pé! É maior que o corpo.  
- Imagina o tamanho de calçado que seria necessário para esse pé!

...uma polegada equivaleria a três grãos de cevada secos e alinhados...

Fonte: Revista Super interessante, ed. 203, 2004.

**Resposta**

Para saber o número do calçado, basta dividir o tamanho do pé (em centímetros) por 0,667, que corresponde a aproximadamente o tamanho de um grão de arroz, o equivalente a 2/3 de um centímetro.

Por exemplo:  
Se o comprimento do pé de uma pessoa é de 23 cm, basta dividirmos 23 por 0,667 e o quociente indicará o número do calçado.

$$\frac{23}{0,667} = 34,53$$

**35**

Fonte: Dados da pesquisa.

Para o desenvolvimento da Atividade 2 – *Rendimento de receita de beijinho* - a professora gravou um vídeo preparando o doce, considerando uma receita completa. Junto com o vídeo, que foi enviado por rede social aos pais dos alunos, a professora disponibilizou (na entrega de atividades na escola) um kit contendo: touca, forminhas de papel, receita impressa e material para registro dos dados coletados. As forminhas foram disponibilizadas com a intenção de orientar uma padronização no tamanho dos doces.

Os alunos poderiam escolher preparar uma porção da receita, anotar a quantidade de cada ingrediente e o rendimento dos doces. Na aula síncrona foi feita a abordagem matemática, considerando por hipótese, coletada por meio de uma pesquisa via formulário *online*, que cada aluno comeria 5 docinhos. Com o problema: Quanto iremos gastar para fazer beijinhos para nossa turma? Cada aluno informou o rendimento que obteve:

AlunaPD1: Eu tentei fazer meia receita.

PD: Aham, que deram?

AlunaPD1: 30 docinhos.

PD: Tá, então se ela fez meia receita que deram 30 docinhos, para nós sabermos uma receita inteira pessoal? Vão ser quantos docinhos?

AlunosPD: 60.

A professora anotou no Excel as quantidades de docinhos indicadas pelos alunos e, a partir delas, construiu um gráfico de barras. Para definir uma hipótese, perguntou:

PD: Já ouviram falar essa palavra média?

AlunosPD: Sim, mas eu não sei calcular.

PD: Na escola vocês têm alguma coisa relacionada à média?

AlunaPD4: Média de nota?

PD: [professora projeta conceito de média para os alunos]. Então, qual foi a média?

AlunosPD: 57.

Com a média calculada foi possível estimar quanto rende uma receita, além disso, há necessidade de saber quantos docinhos cada pessoa vai comer para então determinar o número de receitas para a produção de doces para a turma toda.

PD: Então, quanto iremos gastar para fazer beijinhos para nossa turma?

AlunaPD4: Quanto cada um vai comer?

PD: [...] cada um, em média, vai comer cinco beijinhos. Então eu vou até mudar a pergunta aqui, eu vou colocar assim “quanto iremos gastar [de ingredientes] para fazer beijinhos para nossa turma, considerando que cada um irá comer 5 docinhos?”

AlunoPD3: Tia quantos alunos têm na nossa sala?

PD: Juntado, são 29 alunos. Mas por que que você quer saber dessa informação?

AlunoPD3: Pois aí eu faço aqui, eu multiplico  $5 \times 29$ ?

AlunaPD4: 145 [...] Tia não chega nem a três receitas.

PD: Por que não chega nem a três? Como você pensou?

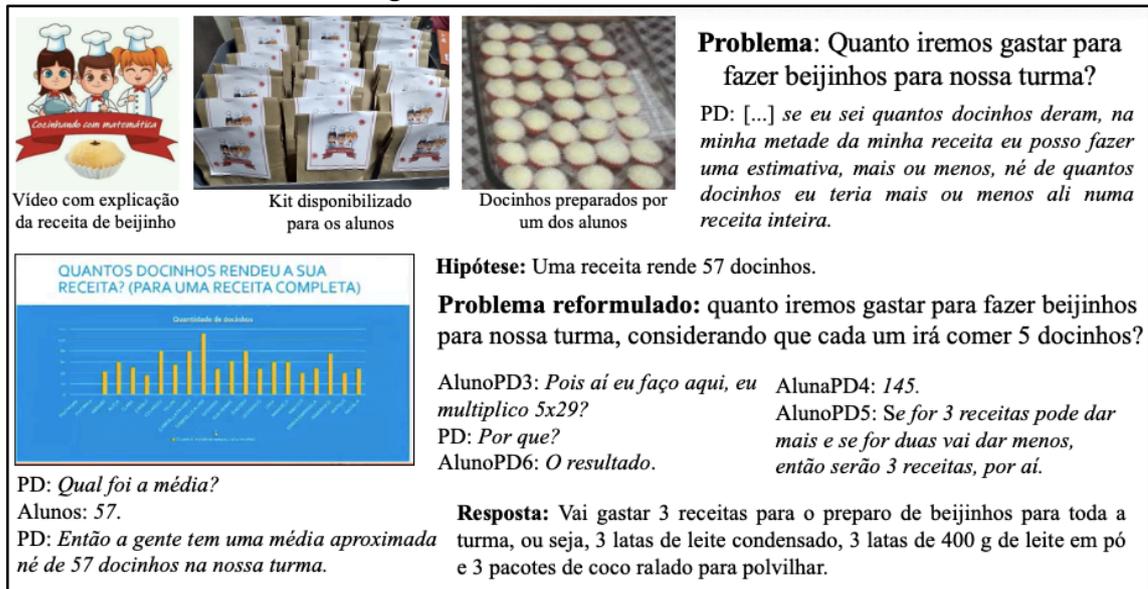
AlunaPD4: Porque duas já dá 114.

[...]

AlunoPD5: Não, pois se for 3 receitas pode dar mais e se for duas vai dar menos, então serão 3 receitas, por aí.

A solução apresentada pelos alunos, a partir das discussões empreendidas na aula síncrona, foi de triplicar todos os ingredientes da receita para conseguirem produzir o número de docinhos para a turma toda. Na Figura 2 apresentamos uma síntese do desenvolvimento da Atividade 2 por PD.

Figura 2 – Síntese da Atividade 2



Fonte: Dados da pesquisa.

A Atividade 3 – *Pintando o pátio da escola* - emergiu do interesse dos alunos em pintar no pátio uma Amarelinha Africana, porém só seria possível após pintura do pátio. Os alunos comunicaram à PM que então sugeri: *Quantos litros de tinta são necessários para a pintura do pátio da escola?* Em contato com um dos pais dos alunos, que é pintor, foi feita uma análise da situação do pátio e informado que seria necessário 1 litro de tinta para pintar  $5\text{m}^2$  do pátio. Porém: Qual é a área do pátio da escola? O AlunoPM2 explicou que quando ele e seus colegas vão jogar futebol na rua, para demarcar o espaço de cada time, medem utilizando os pés.

Com essa sugestão, a PM dividiu os alunos em três grupos, dois com seis integrantes e um com sete. Dois grupos fizeram as medições do pátio e o terceiro acompanhou o processo ajudando na contagem. Os dados coletados foram: Grupo 1 – 146 pés e meio de frente; Grupo 2 - 117 pés e meio de lateral. A professora perguntou aos alunos como proceder, já que as medidas estavam em “pés”, que não é uma medida convencional. Com isso, um impasse foi gerado para então determinarem os procedimentos a serem seguidos, conforme transcrição a seguir:

PM: Como faremos para saber quantos metros tem o pátio com estes resultados?

AlunoPM3: Temos os valores da quantidade de pés, só isso.

AlunoPM2: Temos que medir o pé dos colegas [...].

Utilizando uma régua, os alunos mediram os pés dos alunos de cada grupo e coincidentemente obtiveram a mesma medida de 24cm. O AlunoPM2 sugeriu que multiplicassem a quantidade de pés por 24cm, porém sugeriram aproximar para 147 pés e 118

pés as medidas das laterais do pátio – 3528 cm e 2832 cm, respectivamente, que foram convertidas para metros. Em seguida, PM questionou:

PM: Vocês mediram o pátio, porém não consideraram o espaço das salas e do refeitório que tem no canto, então agora vocês precisam medir essa parte para podermos verificar a medida total do pátio.

Os integrantes dos grupos mediram a parte do pátio que compreende a uma sala de aula e parte do refeitório, agora com uma régua de 1m. Em sala de aula, traçaram uma representação para o pátio da escola com as respectivas medidas e calcularam a área que precisava ser pintada:  $896\text{m}^2$ . Para determinar a quantidade de tinta, os alunos retomaram as informações do pintor de que é necessário 1 litro de tinta para  $5\text{m}^2$  do pátio da escola. Os alunos arredondaram a área do pátio para  $900\text{m}^2$ , realizaram algumas operações e chegaram ao resultado de 180 litros de tinta que equivalem a 10 latas de 18 litros.

A Figura 3 apresenta uma síntese do desenvolvimento da Atividade 3 por PM.

Figura 3 – Síntese da Atividade 3

Pintar Amarelinha Africana, surgiu a necessidade de pintura do pátio da escola.

**Problema:** Quantos litros de tinta são necessários para a pintura do pátio da escola?  
**Problema auxiliar:** Qual é a área do pátio da escola?

PM: Vocês mediram o pátio, porém não consideraram o espaço das salas e do refeitório que tem no canto, então agora vocês precisam medir essa parte para podermos verificar a medida total do pátio.

**1 litro de tinta para pintar  $5\text{m}^2$  do pátio.**

Informações do pintor.

AlunoPM2: Temos que medir o pé dos colegas para saber quantos metros tem!

**Hipótese1:** Um pé tem 24 cm.





Área total do pátio

35 m e 28 m

$A = b \cdot h$

$A = 35 \cdot 28$

$A = 980\text{m}^2$

$5\text{m}^2 = 1\text{l}$

$\times 10$

$50\text{m}^2 = 10\text{l}$

$\times 2$

$100\text{m}^2 = 20\text{l}$

$\times 5$

$500\text{m}^2 = 100\text{l}$

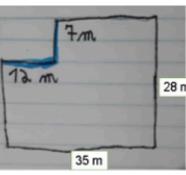
$+ 100\text{m}^2 = 20\text{l}$

$100\text{m}^2 = 20\text{l}$

$100\text{m}^2 = 20\text{l}$

$900\text{m}^2 = 180\text{l}$





**Resposta:** Para pintar o pátio da escola serão necessários cerca de 180 litros de tinta.

Fonte: Dados da pesquisa.

### Das pesquisas às práticas: análise das atividades

A escolha da metodologia de análise – Teoria Fundamentada em Dados – está pautada no interesse em abarcar indícios que possam fundamentar nossas questões de investigação: *Como os modelos matemáticos são produzidos nos anos iniciais? E como eles podem orientar as práticas com Modelagem na sala de aula nesse nível de escolaridade?*

Considerando as descrições das atividades desenvolvidas pelas professoras em contextos de formação relativos à pesquisa, nos propusemos a “codificar com palavras que

reflitam ação” (CHARMAZ, 2009, p. 74) a construção do modelo matemático nos anos iniciais do Ensino Fundamental, conforme Quadro 1. Na segunda e terceira colunas do quadro, as células em branco indicam ações dos alunos, já as sombreadas correspondem às ações das professoras.

Quadro 1 - Codificação inicial

	Encaminhamentos	Códigos
Atividade 1	Tarefa de Arte: releitura da obra Abaporu.	Origem da situação-problema.
	Estranhamento em relação ao tamanho do pé.	Problematizar a situação.
	Questionamentos sobre situações hipotéticas.	Definir o problema.
	Disponibilização de papéis e régua para os alunos.	Ajudar na coleta de dados.
	Desenhos e registros das medidas de seus pés.	Apresentar informações.
	História da criação da numeração dos calçados.	Ajudar na coleta de dados.
	Conclusão de que os pés podem ser medidos por grãos enfileirados.	Formular hipóteses.
	Testes de medidas utilizando grãos enfileirados.	Testar hipóteses.
	Registro da quantidade de grãos que “couberam” no comprimento do pé desenhado.	Apresentar informações.
	Grãos serem do mesmo tamanho?	Abordar assunto não estudado.
Atividade 2	Produção textual explicativa sobre como proceder.	Comunicar resultados.
	Tarefa: confeccionar beijinhos.	Origem da situação-problema.
	Produção e envio de vídeo para os pais.	Ajudar na coleta de dados.
	Organização de kit com forminhas e receita.	Ajudar na coleta de dados.
	Alunos preparam receita ou parte dela para obter rendimento de docinhos.	Produzir dados.
	Resposta ao formulário <i>online</i> .	Coletar informações.
	Cálculo do rendimento para uma receita.	Realizar estimativas.
	Construção de quadro e gráfico de barras para apresentação dos dados.	Apresentar informações.
Atividade 3	Abordagem de média do rendimento de docinhos.	Abordar assunto não estudado.
	Apresentação do número de alunos e da quantidade de doces destinada a cada um.	Informar dados para chegar a uma solução.
	Desejo de pintar Amarelinha Africana no pátio	Origem da situação-problema
	Consulta a um especialista – pintar.	Ajudar no encaminhamento da atividade.
	Escolha de medida não convencional para determinar as medidas do pátio.	Ajudar na coleta de dados.
	Medida do pé a partir de uma régua.	Usar estratégia para padronização de medidas.
	Especificação das medidas do pátio de acordo com medida convencional.	Realizar cálculos.
	Conversão de medidas e arredondamentos.	Fazer simplificações.
Retomada do espaço do pátio a ser pintado.	Associar com a situação real.	
Cálculo da área a ser pintada.	Abordar conteúdo matemático.	
Uso das informações do pintor.	Considerar informações.	

Fonte: Dados da pesquisa.

Na Teoria Fundamentada em Dados, a partir dos códigos oriundos da codificação inicial se faz necessário reorganizar conceitos e realizar a codificação axial. Analisando a terceira

coluna do Quadro 1, podemos evidenciar que algumas ações se fizeram presentes nas três atividades e outras correspondem a especificidades de cada uma.

No que compete à codificação axial, em nossas análises, reorganizamos esses códigos, fazendo alguns agrupamentos. Para isso, consideramos as ações que constituem os encaminhamentos da atividade e a direcionam para a produção do modelo matemático.

Os códigos *origem da situação-problema*, observados nas três atividades, revelam as intenções das professoras quanto ao desenvolvimento de atividades de Modelagem. Nos dois primeiros casos, as tarefas foram propostas com uma intenção *a priori* de problematizá-las. No caso da Atividade 1, a professora tinha consciência de que na obra Abaporu o tamanho do pé pintado destoava do restante da imagem, nesse sentido mesmo que os alunos não tivessem comentado a respeito, provavelmente a própria professora o faria, pois quando escolheu a tarefa da disciplina de Arte, já tinha como intenção promover uma discussão matemática a respeito. Assim também podemos observar em relação à Atividade 2, na qual a professora propôs a confecção do doce para que pudesse promover uma discussão matemática sobre rendimento e a quantidade de produtos que seria utilizada. De certa forma, a professora já havia antecipado o cálculo da média e discussão sobre estimativas. Já na Atividade 3, embora a sugestão de pintar a amarelinha africana no pátio tenha surgido dos alunos, foi a professora que chamou atenção deles para os custos decorrentes desse desejo.

Com o intuito de antecipar o encaminhamento da atividade, as professoras planejaram ações para *ajudar na coleta de dados* ou mesmo *ajudar no encaminhamento da atividade*. Para isso, disponibilizaram materiais em forma física – papéis, régua, texto informativo, grãos diversos e kits –, digital – vídeo de preparo do doce – ou consultando um especialista. Essas ações, em certa medida, ajudaram os alunos a produzir dados e fazer anotações de forma a organizar a abordagem a ser dada para o problema.

Quando PD elaborou um formulário *online* para que os alunos respondessem, já estava planejando *coletar informações* para disponibilizar a eles quando se fizessem necessárias para auxiliá-los na busca de uma solução para o problema. Todavia, PD, observando os resultados coletados no formulário, considerou a resposta da maioria dos alunos, ou seja, 5 beijinhos.

O código *apresentar informações* está associado às construções tabulares e gráficas que PD elaborou durante a aula síncrona. Essa abordagem também poderia ter sido feita pelos alunos. No entanto, considerando a pouca familiarização de PD com Modelagem Matemática e ainda a adaptação ao ensino remoto, no planejamento escolheu-se apresentar essas informações para os alunos por meio do manejo de software computacional. Isso está de acordo com as

assertivas de Almeida, Silva e Vertuan (2012, p. 31) de “que o uso do computador para ensinar e/ou aprender Matemática requer conhecimento, uma vez que é preciso saber o que, exatamente, se deseja que o computador faça”.

Entendendo a dinamicidade de uma atividade de Modelagem, podemos considerar o conceito **planejamento** como “um processo de reflexão, tomada de decisão, colocação em prática e avaliação em torno do desenvolvimento de uma atividade de Modelagem” (PINTO; ARAÚJO, 2021, p. 2). Trata-se, portanto, de um “processo flexível, sujeito a eventos circunstanciais (alguns até previsíveis) que sofram alterações a serem adotadas” (OLIVEIRA; PRADO; SILVA, 2013, p. 2), principalmente quando em prática. Além disso, como preconizam Mendonça e Lopes (2015, p. 4), fazer um planejamento de atividades de Modelagem Matemática consiste em uma “tarefa que exige uma visão ampla, que abranja aspectos conceituais, metodológicos e pedagógicos”.

O código *definir problema* emergiu nos encaminhamentos e ações principalmente da PI – *E se quiséssemos saber o tamanho adequado de calçado para nosso pé sem ter que experimentar, como faríamos?* Porém, mesmo que de forma implícita também se constituiu em ações de PD e PM que já haviam antecipado os problemas no planejamento. Diante do convite de cada professora, para o estudo da obra de arte, ou do preparo de doces, ou ainda para suprir seus interesses da pintura da amarelinha, os alunos se engajaram em investir naquilo que se constituiu em problema para ser investigado, cuja resposta não era conhecida, mas que se desejava conhecer.

Nas três atividades, as professoras estavam cientes do problema que pretendiam abordar com os alunos. Nesse sentido, as ações delas corroboram a caracterização de Dörner (1976), de que um problema é uma situação em que o sujeito identifica qual é seu objetivo, mas não identifica imediatamente meios para atingir esse objetivo. PI não antecipou quais grãos os alunos utilizariam, assim como PD não teve acesso ao rendimento de doces dos alunos e PM não conhecia as medidas do pátio.

O problema subsidia o encaminhamento da atividade de Modelagem e, para se obter uma solução, há a necessidade de coleta de dados. O professor pode *ajudar na coleta de dados* trazendo informações, produzindo vídeo e kit ou mesmo convidando um especialista para falar da temática. A coleta de dados possibilita aos alunos se inteirarem da situação e do problema de forma que essa ação tem a finalidade de se “conhecer as características e especificidades da situação”, bem como “cercar-se de informações sobre essa situação por meio da coleta de dados

quantitativos e qualitativos, seja mediante contatos diretos ou indiretos” (ALMEIDA; SILVA; VERTUAN, 2012, p. 15).

Na dedução de um modelo matemático em uma atividade de Modelagem a formulação de hipóteses é essencial, pois demarca “a trajetória dos alunos, enquanto conhecimento extramatemático e orienta o próprio trabalho matemático” (ALMEIDA, 2018, p. 25). PD em seu planejamento com o formulário *online* antecipou uma hipótese para a construção do modelo matemático pelos alunos – definir o número de doces que cada um comeria. Essa hipótese, durante a aula síncrona, se aglutinou ao problema reformulado, quando PD diz: *Então eu vou até mudar a pergunta aqui, eu vou colocar assim “quanto iremos gastar para fazer beijinhos para nossa turma, considerando que cada um irá comer 5 docinhos?”*. Do mesmo modo, PI apresentou uma hipótese para seus alunos – *o que acontece se dividirmos o tamanho do nosso pé em centímetros por 0,666 que é o tamanho do ponto que utilizamos?* – que a investigaram e confirmaram, por meio de procedimentos matemáticos. Já PM considerou na coleta de dados uma hipótese – Um pé tem 24cm – e as afirmações do especialista como outra hipótese – 1 litro de tinta para pintar 5m<sup>2</sup> do pátio – para subsidiar a trajetória dos alunos para chegar a uma solução.

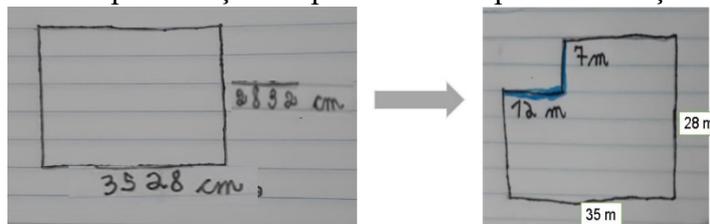
Em atividades de Modelagem Matemática o professor assume um papel de orientador e deve entender que “orientar é indicar caminhos, é fazer perguntas, é não aceitar o que não está bom, é sugerir procedimentos” (ALMEIDA; SILVA; VERTUAN, 2012, p. 24), uma ação pertinente quando consideramos a implementação da Modelagem sob uma perspectiva educacional, na qual se objetiva ensinar Matemática (KAISER; SRIRAMAN, 2006). Nesse sentido, emergiram as ações *abordar assunto não estudado* e *abordar conteúdos matemáticos* que foram agrupadas no conceito **Introdução de conteúdos matemáticos**. Para Kaiser e Sriraman (2006), na perspectiva educacional há dois objetivos específicos que podem se configurar, segundo intenções do professor: se a atividade tem por fim desencadear a aprendizagem trata-se da perspectiva educacional didática; se o objetivo for introduzir ou sistematizar conceitos matemáticos, a perspectiva educacional é conceitual. PI apresentou uma abordagem histórica de como os europeus faziam uso de grãos para determinar o tamanho do calçado; PM retomou o conceito de área de figuras planas, já estudado pelos alunos; e PD aproveitou a atividade para sistematizar o conceito de média aritmética.

No que diz respeito ao conceito **Trabalhar matematicamente com os dados**, a ação da PM de auxiliar os alunos a fazer simplificações estava condicionada com o fato de que eles ainda não estavam familiarizados com números decimais. Segundo Almeida, Silva e Vertuan

(2012, p. 18), “apresentar resultados matemáticos para o problema requer o domínio de técnicas e procedimentos matemáticos”. Porém essa abordagem poderia estar presente no planejamento ou mesmo alterar o planejamento de PM no encaminhamento com os alunos.

Quando PM orientou os alunos a analisar o pátio da escola e rever a forma como o representaram de forma figural, possibilitou a **Retomada da situação**, visto que não utilizariam tinta para pintar uma parte do pátio ocupada por sala e refeitório. Na apresentação de uma solução para o problema, a partir da dedução de um modelo matemático é preciso que o professor verifique a capacidade dos alunos de “avaliar esse processo de construção de modelos e os diferentes contextos de suas aplicações” (ALMEIDA; SILVA; VERTUAN, 2012, p. 16). Isso fez com que os alunos de PM coletassem novos dados para o problema e refizessem suas representações, conforme apresenta a Figura 4.

Figura 4 – Representação do pátio antes e após intervenção de PM



Fonte: Dados da pesquisa.

Olhando para as atividades sob uma perspectiva diferente, agora do ponto de vista dos alunos, observamos algumas atitudes e ações como respostas às propostas das professoras.

A *origem da situação-problema*, por exemplo, embora tenha partido das intenções das professoras ao propor ou convidar os alunos para realizar determinadas tarefas constitui-se somente com o aceite dos alunos a esse convite, conforme Barbosa (2004), pois é a partir desse aceite que se lança um olhar analítico para a situação, que provoca incômodos, inquietações, interesse, o que possibilita *problematizar a situação* e, a partir disso, desenvolver a atividade de Modelagem. É nesse sentido que English (2016, p. 187) considera que a “Modelagem começa com um problema do mundo real que requer interpretação, investigação [...]”. Foi a partir do estranhamento dos alunos quanto ao tamanho do pé pintado ou do desejo de se pintar a Amarelinha Africana no pátio, ou ainda, do aceite em investigar os gastos para fazer beijinhos para toda a turma que as atividades de Modelagem se constituíram.

A **definição do problema** emerge, portanto, como um conceito ao considerarmos os códigos *origem da situação-problema* e *problematizar a situação*. Barbosa (2004) aponta a constituição de problemas para os alunos como um dos aspectos centrais da atividade de Modelagem Matemática. Os problemas, segundo o autor, devem ser problemas, de fato, ou seja,

os alunos “não devem possuir esquemas prévios para abordá-los” (BARBOSA, 2004, p. 4), o que podemos verificar nas atividades, pois os alunos de PI desconheciam a relação entre o número do calçado e o comprimento do pé; os alunos de PD não sabiam como determinar a quantidade de beijinhos necessária para toda a turma; assim como os alunos de PM não conheciam uma maneira de determinar a quantidade de latas de tintas necessária para pintar o pátio.

Os alunos coletaram dados em conformidade com os problemas definidos, uma vez que, segundo Barbosa (2004, p. 4), as atividades de Modelagem “devem se sustentar no mundo-vida das pessoas, envolvendo dados empíricos reais”. Nesse sentido, as professoras disponibilizaram materiais e orientaram os alunos, porém, coube a eles *produzirem dados* e pensarem em meios de registrar ou *apresentar informações*. No caso de PI, os alunos desenharam seus pés em uma folha de papel sulfite e com o auxílio da régua mediram o comprimento do pé e enfileiraram grãos para contagem. Essas medidas foram registradas nos desenhos. No caso de PD, os alunos prepararam uma receita de beijinho ou parte dela e anotaram no material disponibilizado pela professora a quantidade de cada ingrediente utilizada e o rendimento dos doces. Já no caso de PM, para determinar as medidas do pátio, os alunos escolheram uma medida não convencional, o pé. Nesse sentido, eles também tiveram que tomar decisões, fazer escolhas para *ajudar na coleta de dados*.

Os códigos *produzir dados*, *apresentar informações* e *ajudar na coleta de dados* fundamentam a emergência do conceito **responsabilidade na atividade**. Esse conceito sugere que a atividade de Modelagem Matemática deve ter o aluno como protagonista, ao passo em que o professor se torna um orientador (ALMEIDA; SILVA; VERTUAN, 2012). Nesse sentido, o trabalho com a Modelagem Matemática no contexto da sala de aula deve ser pensado de modo a atribuir aos alunos mais responsabilidade (ALMEIDA; SILVA; VERTUAN, 2012), para que se sintam, como sugere Bassanezi (2015), corresponsáveis pelo desenvolvimento da atividade e de sua aprendizagem. A coleta de dados é um momento que pode contribuir na consolidação desse conceito, uma vez que, ao coletar dados, os alunos assumem um papel que se assemelha ao de um pesquisador, podendo eles coletarem dados da literatura ou produzirem seus próprios dados, como foi o caso nas três atividades. Além disso, os alunos precisaram pensar sobre como organizar esses dados e apresentar as informações, para que fossem compreensíveis por outros. Desenhos e registros textuais foram utilizados pelos alunos nas três atividades.

No encaminhamento para a resolução do problema, a partir da análise dos dados, os alunos se depararam com alguns caminhos possíveis, especificamente quanto a que Matemática

utilizar para resolver o problema. Nesse contexto, *formular hipóteses* foi uma ação dos alunos, particularmente na Atividade 1, cujos alunos de PI, com base na história contada sobre a criação da numeração dos calçados, perceberam que essa medida pode ser determinada a partir da medição do pé por uma quantidade de grãos. As hipóteses, segundo Almeida, Silva e Vertuan (2012), são para a atividade de Modelagem como fatores que se colocam no caminho para indicar direções. A partir dessa hipótese os alunos fizeram sugestões que os direcionaram a testar diferentes tipos de grãos a fim de encontrar um que coincidissem com o número do calçado. A **formulação de hipóteses** se mostra como um conceito emergente nesse contexto.

Uma das características geralmente apontadas para atividades de Modelagem Matemática é a possibilidade de múltiplas soluções, o que requer estratégias variadas. Na Atividade 1, por exemplo, os alunos de PI perceberam que alguns caminhos podem não ser apropriados à resolução do problema, uma vez que ao *testar a hipótese* que poderiam medir seus pés utilizando grãos de feijão, tiveram que refutá-la, pois os grãos de feijão, que medem quase um centímetro, são maiores que os grãos de cevada, que medem em torno de  $\frac{2}{3}$  de um centímetro. Na Atividade 2, os alunos de PD tiveram que *realizar estimativas por meio de operações básicas* para determinar quantos doces renderia uma receita inteira a partir da quantidade de doces que rendeu a parte da receita que fizeram.

Na Atividade 3, os alunos de PM precisaram *usar estratégias de padronização de medidas* para reescrever as medidas do pátio, feita por meio de seus pés, para medidas convencionais, utilizando o sistema métrico. Essa padronização os levou a *realizarem cálculos* de conversão, uma vez que as medidas dos pés eram dadas em centímetros e eles precisavam das medidas do pátio em metros, já que a informação fornecida pelo pintor considerava essa unidade de medida e, portanto, eles precisavam *considerar essa informação*.

O conceito **trabalhar matematicamente com os dados** pode ser associado à resolução do problema (ALMEIDA; SILVA; VERTUAN, 2012), momento em que os alunos buscam na Matemática conceitos e teorias, bem como regras operacionais para lidar com eles (D'AMBRÓSIO, 2009). Contagem, estimativas, operações elementares, sistema monetário, são exemplos de ideias matemáticas abordadas nas atividades.

Para *comunicar resultados* os alunos buscaram formas de documentar o modelo (ENGLISH, 2010). Tortola e Almeida (2016) classificaram cinco tipos de modelos matemáticos a partir de resoluções de alunos dos anos iniciais: descritivos, aritméticos, gráficos, tabulares e textuais. De acordo com os autores, cada um à sua maneira, descreve a relação entre as variáveis envolvidas no problema. Na Atividade 1, os alunos de PI complementaram seus desenhos com

textos explicativos sobre como proceder para determinar o número do calçado a partir da medida do pé. Na Atividade 2, os alunos de PD realizaram operações para determinar a quantidade média de rendimento de doces a partir de uma receita de beijinho e, depois, calcularam as quantidades necessárias de cada ingrediente para sua confecção. Por fim, na Atividade 3, os alunos de PM calcularam a área do pátio e a partir de algumas operações, considerando a informação do pintor, determinaram quantos litros de tinta seriam necessários para pintá-lo. Os textos explicativos, os desenhos e as operações registradas serviram de subsídios aos alunos para a comunicação dos resultados. Nesse contexto, a **comunicação** surge como mais um conceito associado ao desenvolvimento das atividades de Modelagem.

O Quadro 2 sintetiza os conceitos emergentes a partir dos agrupamentos das ações dos alunos e das professoras no desenvolvimento das atividades de Modelagem, caracterizando a codificação axial. Na segunda e terceira colunas do quadro, as cores indicam aproximações dos conceitos.

Quadro 2 - Codificação axial

	Agrupamentos	Conceitos
Ações do professor	Origem da situação-problema. Ajudar na coleta de dados. Ajudar no encaminhamento da atividade. Coletar informações. Apresentar informações.	Planejamento.
	Definir problema.	Definição do problema.
	Formular hipóteses.	Formulação de hipóteses.
	Abordar assunto não estudado. Abordar conteúdos matemáticos.	Introdução de conteúdos matemáticos.
	Informar dados para chegar a uma solução. Fazer simplificações.	Trabalhar matematicamente com os dados.
	Associar com a situação real.	Retomada da situação.
	Ações dos alunos	Origem da situação-problema. Problematizar situação.
Apresentar informações. Ajudar na coleta de dados. Produzir dados.		Responsabilidade na atividade.
Formular hipóteses.		Formulação de hipóteses.
Testar hipóteses. Realizar estimativas por meio de operações básicas. Usar estratégias para padronização de medidas. Realizar cálculos. Considerar informações.		Trabalhar matematicamente com os dados.
Comunicar resultados.		Comunicação.

Fonte: Dados da pesquisa.

Com relação à codificação focalizada, nos debruçamos sobre os conceitos oriundos da codificação axial e evidenciamos três categorias emergentes que subsidiam nossa teorização: Planejamento, Responsabilidade Compartilhada e Comunicação. Na segunda e terceira colunas

do Quadro 2, as células em branco indicam conceitos associados à categoria Planejamento; as células sombreadas em cinza claro correspondem à categoria Responsabilidade Compartilhada; e as células sombreadas em cinza escuro são relativas à categoria Comunicação.

### **Das pesquisas às práticas: interpretações emergentes**

O Planejamento de uma atividade de Modelagem pode orientar o trabalho do professor, principalmente quando ele tem pouca experiência com práticas em Modelagem Matemática (PINTO; ARAÚJO, 2021). Trabalhar uma situação em que se conheça o comportamento e ajudar com ações de coleta de dados nas quais se evidenciam as hipóteses que podem ser consideradas permitem subsidiar um certo controle na construção do modelo matemático. Porém, o professor tem de ter ciência que esse controle pode ser alterado em virtude dos encaminhamentos escolhidos pelos grupos na atividade, desde a definição do problema.

O problema, em atividades de Modelagem Matemática, é definido a partir das informações que se tem, ou se busca, a respeito do tema. Nessas atividades o aluno pode tanto se deparar com um problema já existente, como pode propor um problema para resolver (DOWNTON, 2013). Vale a pena ressaltar que o aval sobre os problemas a serem investigados foi dado pelas professoras (BASSANEZI, 2015).

Geralmente esse aval se dá por meio do diálogo, na forma de questionamentos, hipotetizando situações, ou mesmo confirmando qual é o problema a ser investigado. Essa definição de modo geral vem na forma de texto, que deve ficar disponível aos alunos, uma vez que, como vimos, ela constitui a origem da situação-problema e não se pode perdê-la de vista. O problema subsidia a construção do modelo matemático. Dependendo da pergunta que se elabora, diferentes abordagens e, conseqüentemente, diferentes modelos podem se fazer presentes.

Ao planejar o desenvolvimento de atividades de Modelagem não se conhece de antemão os conteúdos matemáticos que irão emergir, todavia, ao se fazer um planejamento é possível antecipar alguns conteúdos necessários para abarcar determinada situação-problema (ALMEIDA, 2018). Na dedução de um modelo matemático que requer um conteúdo que até o momento não foi estudado é uma oportunidade de o professor introduzi-lo no momento da discussão. Em casos em que conteúdos não planejados para o momento da aula se fazem necessários, há a possibilidade de alterar o planejamento, visto que ele é flexível (OLIVEIRA; PRADO; SILVA, 2013), ou adiar a abordagem do conteúdo matemático sem perder de vista a situação investigada.

A Responsabilidade Compartilhada sugere a necessidade de o professor compartilhar as responsabilidades da atividade com os alunos (BARBOSA, 2004; ALMEIDA; SILVA; VERTUAN, 2012). Caso contrário, a atividade se resume a uma exposição de conteúdos e de fórmulas, perdendo seu sentido, uma vez que atividades de Modelagem requerem “interpretação, investigação e representação matemática” (ENGLISH, 2016, p. 187).

Por outro lado, o professor não pode esperar que os alunos, sozinhos, se encarreguem por toda a atividade, como se o fato deles resolverem o problema garantisse a aprendizagem matemática. Por isso optamos pelo uso da expressão responsabilidade compartilhada, que sugere que o professor precisa assumir nesse contexto o papel de orientador (ALMEIDA; SILVA; VERTUAN, 2012), indicando caminhos; fazendo questionamentos, ao invés de dar as respostas sem antes promover uma reflexão; sinalizando e corrigindo erros; e se colocando como parceiro na investigação.

Compartilhando a responsabilidade, os alunos são corresponsáveis pela atividade (BASSANEZI, 2015), desse modo são colocados a pensar sobre as ações que estão empreendendo, de modo a tomarem consciência das relações presentes na situação-problema e de como a Matemática pode ser utilizada para descrevê-la, explicá-la, justificá-la e representá-la por meio de modelos matemáticos. É nesse sentido que os diferentes tipos de modelos, como os apresentados por Tortola e Almeida (2016), passam a fazer parte de um repertório de conhecimentos dos alunos, os quais são capazes de utilizá-los adaptando-os conforme as características de cada situação-problema.

A Comunicação reflete a necessidade de se dar voz aos alunos, de deixar que tomem decisões, façam escolhas, organizem seus dados e resultados e os comuniquem. Atividades de Modelagem, que são geralmente desenvolvidas em grupo – sejam grupos menores ou a sala toda –, pautam-se na comunicação como premissa para seu desenvolvimento. Argumentar, expressar seus pensamentos, negociar significados são ideias que podem ser associadas à comunicação.

Porém, quando pensamos na produção de modelos matemáticos, a comunicação assume um papel central, uma vez que os modelos são formas de comunicar as relações observadas e/ou estabelecidas a partir da análise da situação-problema. É nesse sentido que English (2010) indica a documentação do modelo como um dos princípios que orientam o desenvolvimento de atividades de Modelagem.

Segundo Levy (2016, p. 4), “um modelo matemático é dotado, em tese, de linguagem sucinta, expressando ideias de maneira clara e precisa, caracterizando-se – apesar de voltar-se

para a solução ou elucidação de temas específicos ou casos singulares – por conexões sistemáticas e formais”.

Nos anos iniciais, porém, como sinalizam Tortola e Almeida (2018), a Modelagem Matemática apresenta algumas especificidades no que se refere ao uso da linguagem matemática, o que de acordo com os autores implica no uso da simbologia matemática e na produção dos modelos. Se olharmos para os modelos produzidos nas atividades e analisarmos o contexto em que foram produzidos, percebemos que os desenhos, as sequências de operações e os textos são os meios que os alunos dos anos iniciais têm à disposição para representarem seus modelos matemáticos. Eles apresentam explicações, em certa medida sucintas, expressando ideias que se caracterizam por conexões sistemáticas e formais, em concordância com os conhecimentos adquiridos até o momento (TORTOLA, 2016). Isso sinaliza respeito aos conhecimentos dos alunos.

Nesse contexto, “várias questões, conjecturas, conflitos, revisões e resoluções surgem à medida que as crianças desenvolvem, avaliam e se preparam para comunicar seus produtos” (ENGLISH; WATTERS, 2004, p. 336), atribuindo à atividade um caráter iterativo como explica D’Ambrósio (2015). Dessa forma, desde cedo os alunos são levados a refletir sobre o uso da Matemática para abordar problemas advindos do mundo real e sobre como se dá a comunicação em Matemática.

### **Considerações finais**

Levando em consideração a necessidade emergente de pesquisas que versam sobre a implementação da Modelagem Matemática nos anos iniciais do Ensino Fundamental, nos debruçamos em investigar como modelos matemáticos são produzidos nesse nível de escolaridade, bem como podem orientar as práticas com Modelagem na sala de aula. Para isso, analisamos relatórios produzidos por professoras atuantes nesse contexto e que aceitaram o convite para, a partir de estudos teóricos, fazer uso da Modelagem em suas práticas. Com isso, destacamos o movimento da pesquisa para o ensino.

A partir da descrição sucinta de cada atividade de Modelagem desenvolvida pelas três professoras – PI, PD e PM – e subsidiados pela Teoria Fundamentada em Dados (CHARMAZ, 2009), realizamos codificações das quais emergiram conceitos que foram minuciosamente analisados e articulados com referenciais teóricos relativos à Modelagem na perspectiva da Educação Matemática, dos quais obtivemos as categorias emergentes: planejamento,

responsabilidade compartilhada e comunicação. Em certa medida, essas categorias refletem como se deu a construção dos modelos matemáticos e como eles podem orientar as práticas de sala de aula com Modelagem.

O que podemos evidenciar é que as ações das professoras e dos alunos que culminaram nas categorias emergentes estão atreladas ao que se conhece sobre Modelagem Matemática e seus encaminhamentos característicos. Isso se deve ao fato de as professoras estarem imbricadas na pesquisa sobre Modelagem Matemática e terem ciência de tais encaminhamentos, configurando a importância de os professores fundamentarem suas práticas teoricamente.

Em certa medida as orientações das professoras, que criaram situações pedagógicas intencionalmente pensadas para que determinadas ações fossem necessárias aos alunos, sustentaram ou mesmo definiram o modelo matemático da situação com vistas a apresentar uma solução para o problema.

Os modelos produzidos podem nortear as práticas em sala de aula, no sentido de que o foco do professor não pode se restringir ao resultado para o problema, ele deve pensar em orientações que levem os alunos a tomarem consciência de suas ações, de modo que sejam capazes de perceber relações matemáticas a partir das características da situação do mundo real e produzir uma resposta para o problema, como modelo matemático (DOERR; ENGLISH, 2003).

É nessa tomada de consciência que emergem as discussões sobre o tema, sobre o problema, sobre Matemática (TORTOLA, 2016). É nesse contexto de olhar para além da resolução do problema que a retomada ou introdução de conteúdos, ou seja, que a abordagem, por meio da Matemática, de uma situação não essencialmente matemática, na perspectiva da Educação Matemática, se concretiza.

## Referências

ALMEIDA, L. M. W. Considerations on the use of mathematics in modeling activities. **ZDM**, Berlim, v. 50, n. 1/2, p. 19-30, 2018.

ALMEIDA, L. M. W.; SILVA, K. P.; VERTUAN, R. E. **Modelagem Matemática na educação básica**. São Paulo: Contexto, 2012. 158p.

BARBOSA, J. C. Modelagem Matemática: O que é? Por que? Como? **Veritati**, Salvador, n. 4, p. 73- 80, 2004.

BASSANEZI, R. C. **Modelagem Matemática: teoria e prática**. São Paulo: Contexto, 2015.

CHARMAZ, K. **A construção da teoria fundamentada: guia prático para análise qualitativa**. Porto Alegre: Artmed, 2009.

D'AMBRÓSIO, U. Mathematical Modelling: Cognitive, Pedagogical, Historical and Political Dimensions. **Journal of Mathematical Modelling and Application**, Blumenau, v. 1, n. 1, p. 89-98, 2009.

D'AMBRÓSIO, U. Mathematical Modelling as a strategy for building-up systems of knowledge in different cultural environments. In: STILLMAN, G. A.; BLUM, W.; BIEMBENGUT, M. S. (Eds.). **Mathematical Modelling in Education Research and Practice: cultural, social and cognitive influences**. New York: Springer, 2015, p. 35-44.

DOERR, H. M.; ENGLISH, L. D. A modeling perspective on students' mathematical reasoning about data. **Journal for Research in Mathematics Education**, Reston, v. 34, n. 2, p. 110-136. 2003.

DÖRNER, D. **Problemlösen als Informationsverarbeitung**. Kohlhammer: Stuttgart, 1976.

DOWNTON, A. Problem Posing: a possible pathway to mathematical modelling. In: STILLMAN, G. A. et al. (eds.). **Teaching Mathematical Modelling: connecting to research and practice**. New York: Springer, 2013. p. 527-536.

ENGLISH, L. D. Modeling with Complex Data in the Primary School. In: LESH, R. et al. (Eds.). **Modeling students' mathematical modeling competencies**. Springer: New York, London, 2010. p. 287-300.

ENGLISH, L. D. Developing early foundations through modeling with data. In: HIRSCH, C. (Ed). **Annual perspectives in mathematics educations: Mathematical Modeling Mathematics**. Reston: NCTM - National Council of Teachers of Mathematics, 2016. p. 187-195.

ENGLISH, L. D.; WATTERS, J. J. Mathematical Modelling with young children. In: HØINES, J.; FUGLESTAD, A. B. (Eds.). **The 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education**. Bergen, v. 2, p. 335-342, 2004.

KAISER, G.; SRIRAMAN, B. A global survey of international perspectives on modelling in mathematics education. **ZDM**, Berlim, v. 38, n. 3. p. 302-310, jun. 2006.

LEVY, L. F. Relações entre modelos mentais e modelos matemáticos. **EM TEIA - Revista de Educação Matemática e Tecnológica Iberoamericana**, Recife, v. 7, n. 2, 2016.

MENDONÇA, L. O.; LOPES, C. E. Planejamento de atividades de Modelagem Matemática: um caminho possível. **EM TEIA - Revista de Educação Matemática e Tecnológica Iberoamericana**, Recife, v. 6, n. 1, 2015.

OLIVEIRA, A. M. P.; PRADO, A. S.; SILVA, L. A. Planejamento, organização e condução do ambiente de Modelagem nas práticas pedagógicas. In: CONFERÊNCIA NACIONAL SOBRE MODELAGEM MATEMÁTICA, 8., 2013, Santa Maria. **Anais...** Santa Maria: Unifra, UFRGS, 2013. 1 CD-ROM. p. 1-15.

PINTO, T.; ARAÚJO, J. Um estudo sobre planos de atividades de Modelagem Matemática. **Revista de Ensino de Ciências e Matemática**, São Paulo, v. 12, n. 2, p. 1-25, 2021.

TORTOLA, E. **Configurações de Modelagem Matemática nos anos iniciais do Ensino Fundamental**. 2016. 304f. Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2016.

TORTOLA, E.; ALMEIDA, L. M. W. de. Um olhar sobre os usos da linguagem por alunos dos anos iniciais do Ensino Fundamental em atividades de Modelagem Matemática. **RPEM**, Campo Mourão, v. 5, n. 8, p. 83-105, jan.-jun. 2016.

TORTOLA, E.; ALMEIDA, L. M. W. de. A Formação Matemática de Alunos do Primeiro Ano do Ensino Fundamental em Atividades de Modelagem Matemática: uma Perspectiva Wittgensteiniana. **Perspectivas da Educação Matemática**, Campo Grande, v. 11, n. 25, 4 jun. 2018.

VILLA-OCHOA, J. A.; SOARES, M. R.; ALENCAR, E. S. de. A Modelagem Matemática nos anos iniciais como perspectiva para o ensino de matemática: um panorama de publicações brasileiras em periódicos (de 2009 a 2018). **Educar em Revista**, Curitiba, Brasil, v. 35, n. 78, p. 47-64, nov./dez. 2019.

*Recebido em 16 de maio de 2021  
Aprovado em 24 de junho de 2021*