

## UMA SEQUÊNCIA DIDÁTICA PARA INVESTIGAR O DESENVOLVIMENTO DO PENSAMENTO ALGÉBRICO:

**perspectiva metodológica**

*A DIDACTIC SEQUENCE TO INVESTIGATE THE DEVELOPMENT OF*

*ALGEBRAIC THINKING:*

*methodological perspective*

**Márcia Azevedo Campos**

Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia

azevedoxu@gmail.com

<http://orcid.org/0000-0001-8255-758X>

**Luiz Márcio Santos Farias**

Universidade Federal da Bahia - UFBA

lmsfarias@ufba.br

<http://orcid.org/0000-0002-2374-3873>

**Laerte Silva Fonseca**

Instituto Federal de Sergipe (IFS/Campus Aracaju)

PPGCIMA - Universidade Federal de Sergipe

laerte.fonseca@uol.com.br

<http://orcid.org/0000-0002-0215-0606>

### **Resumo**

Este artigo, recorte de um estudo de doutorado, discute uma proposta metodológica fruto da pesquisa de abordagem experimental desenvolvida nos pressupostos da Didática da Matemática como uma Engenharia Didática e objetiva descrever algumas das contribuições de uma Sequência Didática (SD) elaborada para o ensino de números naturais. Analisamos as contribuições, condições e restrições para a sua implementação, visando o desenvolvimento do pensamento algébrico. Esta compreendeu oito momentos didáticos e a experimentação se deu com 111 alunos de três turmas do 6º ano do Ensino Fundamental de uma escola pública estadual. Os problemas aplicados nas três sessões de experimentação foram elaborados a partir da análise preliminar do livro didático, das orientações curriculares e da revisão de literatura, em linguagem natural, numérica e icônica com recursos *ostensivos*, como o registro escrito, tabelas, bolinhas, figuras, que pudessem evocar elementos *não* ostensivos, como o pensamento algébrico. A Engenharia Didática sistematizou o estudo e as atividades da SD, direcionou nossas análises e possibilitou uma interessante interlocução entre os objetivos traçados para a pesquisa a partir do cruzamento das análises, e do que recolhemos de dados nas experimentações. Resultados apontaram que o pensar algebricamente se manifesta principalmente na capacidade de estabelecer relações entre os dados de um problema, significando-os. Assim, a SD, a Engenharia Didática e os arcabouços teóricos da Didática da Matemática se mostraram frutíferos, a partir dos resultados obtidos. As

atividades sistematizadas e sua condução didática contribuíram para a promoção do conhecimento e o enriquecimento da educação algébrica e assim da aprendizagem matemática, além de mostrar caminhos a outras pesquisas.

**Palavras-Chave:** Didática da Matemática, Álgebra, Sequência Didática, Aprendizagem.

### Abstract

This article, an excerpt from a doctoral study, discusses a methodological proposal resulting from research with an experimental approach developed under the assumptions of Didactic of Mathematics as a Didactic Engineering and aims to describe some of the contributions of a Didactic Sequence (SD) developed for the teaching of numbers natural. We analyze the contributions, conditions and restrictions for its implementation, aiming at the development of algebraic thinking. This comprised eight didactic moments and the experimentation took place with 111 students from three class of 6th year of Elementary School in a state public school. The problems applied in the three experimentation sessions were elaborated from the preliminary analysis of the textbook, the curricular guidelines and the literature review, in natural, numerical and iconic language with ostensible resources, such as written records, tables, marbles, figures, that could evoke non-ostensive elements, such as algebraic thinking. Didactic Engineering systematized the study and activities of SD, directed our analyzes and allowed for an interesting dialogue between the objectives outlined for the research based on the crossing of analyzes and the data collected in the experiments. Results showed that thinking algebraically manifests itself mainly in the ability to establish relationships between the data of a problem, meaning them. Thus, SD, Didactic Engineering and the theoretical framework of Didactic of Mathematics proved to be fruitful, based on the results obtained. The systematized activities and their didactic conduct contributed to the promotion of knowledge and the enrichment of algebraic education and thus of mathematical learning, in addition to showing paths for further research.

**Keywords:** Didactic of Mathematics, Algebra, Didactic Sequence, Learning.

### Introdução

A partir dos anos 90 pesquisadores da Educação Matemática (CAMPOS, 2015, 2019; CARRAHER; SCHLIEMANN, 2007; BLANTON; KAPUT, 2005; DA ROCHA FALCÃO, 1993; FIORENTINI et al., 1993; KAPUT, 1999; LINS, 1992, dentre outros) centraram suas discussões no ensino pautado na produção de significados para os objetos e processos da álgebra, com o interesse de entender os modos de produzir significados aos seus conteúdos. Para esses pesquisadores o centro da aprendizagem da álgebra deve ser o pensamento algébrico.

Identificado o problema de dificuldade de aprendizagem algébrica, levantamos a hipótese de que tal problema se deve à falta de significação dos objetos que a álgebra faz uso. Atualmente as pesquisas sobre a aprendizagem da álgebra centram-se na produção de significados, através do desenvolvimento cada vez mais precoce do pensamento algébrico. Esta constatação foi difundida nos estudos de Carraher e Schliemann (2007)

do grupo de trabalhos do *Early Algebra* que começou nos Estados Unidos e vêm se difundindo. Nesse sentido focamos nosso estudo no 6º ano do Ensino Fundamental (EF), que antecede o 7º. Ano, quando as orientações curriculares em vigor à época, os Parâmetros Curriculares Nacionais - PCN (BRASIL, 1998) de Matemática, previam a introdução da algébrica formal ao se introduzir as equações de primeiro grau e sua resolução, lidando então com as incógnitas e a noção de variável. As atuais orientações curriculares para o ensino da matemática constantes da Base Nacional Comum Curricular –BNCC (BRASIL, 2018) preconizam o ensino da álgebra e ampliam as discussões do pensamento numérico para o desenvolvimento do pensamento algébrico de resolução desde os anos iniciais do EF, visando uma aprendizagem matemática ligada à compreensão e à apreensão de significados aos objetos matemáticos.

Revisitando a literatura encontramos as ideias de Carraher e Schliemann (2007) que nos inspiraram ao afirmarem que a perspectiva didática do *Early Algebra* reside quietamente nos currículos de matemática e deve fundamentar-se em contexto de resolução de problemas. Assim, para embasar e direcionar o estudo delimitamos como tema o desenvolvimento do pensamento algébrico através da resolução de problemas de operações com números naturais, por ser um conteúdo unificador, como afirmam Onuchic e Alevatto (2015), e possibilitar dar ênfase na produção de significados aos objetos algébricos que podem ser evocados na resolução desses problemas numéricos.

O campo de conhecimento denominado Educação Matemática vive em expansão de suas bases epistemológicas e ontológicas, e as discussões metodológicas constituem-se fundamentais nesse processo. A escolha de uma metodologia adequada, que possa contribuir para a resolução de um problema e sua significação, torna-se um momento crucial para o desenvolvimento e o crescimento de uma pesquisa.

Objetiva-se com este texto contribuir para a discussão em torno de métodos e recursos didáticos para o ensino, a partir do percurso metodológico e dos resultados de um estudo realizado no campo da Didática da Matemática, enquanto área da Educação Matemática. Vislumbra-se a partir das discussões decorrentes a possibilidade de articulação entre o conhecimento didático e o conhecimento matemático, discutindo a prática docente como uma prática de investigação e permitindo que as experiências vivenciadas em sala de aula se reproduzam para o ensino da matemática.

As pesquisas em Didática da Matemática, enquanto campo de estudo de situações de ensino e produção de conhecimento, são articuladas em torno de uma questão e, então, submetem o fenômeno a estudar à experimentação ou realizam-se intervenções didáticas. A problemática desse estudo surgiu a partir de indagações de como se dá o processo de desenvolvimento do pensamento algébrico e quais suas influências na aprendizagem da Matemática no 6º ano do EF. O conjunto dessas questões surgiu de um contexto estudado e vivenciado e foram articuladas e validadas num quadro teórico, a partir das hipóteses de que o desenvolvimento do pensamento algébrico contribui para a aprendizagem algébrica, e assim para a construção de conhecimento matemático, e testadas numa experimentação em sala de aula.

Este artigo é um recorte da pesquisa que culminou na tese de doutoramento de Campos (2019). Trazemos aqui os caminhos metodológicos traçados para o referido estudo, que foi guiado pelo objetivo central de: Investigar quais contribuições e as *condições e restrições* de implementação de uma Sequência Didática (SD) – elaborada para o ensino de operações com números naturais, no 6º ano do EF e com atividades de resolução de problemas – para o desenvolvimento do pensamento algébrico. Nesse estudo referimo-nos às suas *condições e restrições*, de acordo Chevallard (1999, 2002), como um sistema essencial que permeia a relação institucional com o objeto do conhecimento em estudo e que vive em determinada instituição. Neste artigo o objetivo central é descrever algumas dessas contribuições da SD implementada.

Os arcabouços teóricos da Engenharia Didática, tal como sistematizada por Artigue (1988, 1989, 1990) e que tem por suporte a aplicação de sequências de ensino em salas de aula de matemática, deram sustentação teórico-metodológica à elaboração, às análises e à discussão da SD proposta, em busca de validar as hipóteses de estudo. Trata-se de uma proposta metodológica pensada para minimizar as dificuldades no ensino e aprendizagem da matemática, especificamente da álgebra, a partir do desenvolvimento do pensamento algébrico (CHEVALLARD, 2002).

Há, com esse estudo, uma expectativa de aprendizagem explícita, de um mínimo que o aluno deve aprender para desenvolver as competências matemáticas básicas (*condições*). No entanto, esbarramos com a falta de conhecimentos prévios dos alunos, ou de familiaridade com problemas que tratam o desconhecido, como os problemas algébricos (*restrições*). E assim destacaremos neste artigo contribuições do nosso estudo

para a Didática da Matemática, inserindo-o no rol de interesse das pesquisas em Educação Matemática que se identifiquem com a abordagem metodológica experimental, indicando caminhos para novos estudos.

Inicialmente abordamos a necessidade do método e a sua vinculação com a pesquisa em Didática. Concentram-se, nas seções que se seguem: o delineamento metodológico do estudo de doutorado, base às discussões que propusemos; discussão da SD e as análises das experimentações; a discussão das fases da Engenharia Didática; e conclui-se discutindo as implicações da Engenharia Didática nas pesquisas em Didática, a partir da SD proposta e sua implicação na aprendizagem matemática, especificamente no desenvolvimento do pensamento algébrico na resolução de problemas numéricos.

### **Discussão metodológica**

Quanto aos objetivos trata-se de uma pesquisa descritiva, de abordagem experimental e de natureza qualitativa, uma vez que priorizou procedimentos descritivos de dados e resultados e dedicou-se à análise intuitiva do processo, com os participantes em seu ambiente natural, em consonância com os estudos de Creswell (2013) e Bogdan e Biklen (1994). Apresentam-se neste texto as dimensões: epistemológica, relacionada ao conhecimento e como ele pode ser obtido, ou seja, a relação do aluno com a pesquisa e o conhecimento; ontológica, referente à natureza do objeto pensamento algébrico; e a metodológica, referente aos processos utilizados pelos pesquisadores. Pela perspectiva interpretativista (SCHWANDT, 2006; CRESWELL, 2013), esse conhecimento é relativo, subjetivo e só pode ser entendido do ponto de vista dos indivíduos que estão diretamente envolvidos, no caso nós pesquisadores e alunos pesquisados, pela interpretação dos fenômenos.

O conteúdo abordado nos problemas que compuseram a SD foi números naturais, como já mencionado, que, além do caráter unificador faz parte do desenvolvimento de todos os níveis de ensino da matemática e consta no plano pedagógico da escola onde se deu a pesquisa. Ademais, atendendo ainda às *restrições* do estudo, apoiamo-nos também para esta escolha nos PCN (BRASIL, 1998), documentos curriculares vigentes à época, que preconizavam que o estudo da álgebra fosse introduzido no bloco números e operações por meio de atividades que possibilitassem observar regularidades e expressar generalizações. Não se trata de imprimir à álgebra uma visão de aritmética generalizada;

entendemos ir além e então buscamos atrelar a significação às suas diferentes concepções. E as recentes orientações curriculares presentes na BNCC (BRASIL, 2018) corroboram o nosso estudo ao indicar a álgebra como unidade temática que deve ser trabalhada de forma articulada desde os anos iniciais, pela formação do pensamento matemático e ligada à compreensão e à apreensão de significado aos objetos matemáticos.

A instituição social de pesquisa foi uma escola da rede pública, onde a SD foi desenvolvida com 111 alunos de três de suas turmas de 6º ano do EF. A prática foi norteada pelo que é preconizado nos PCN (BRASIL, 1998) de Matemática e na BNCC (BRASIL, 2018), esta última em implementação à época. Fez-se também a análise de livro didático em uso, dada sua influência no ensino que é ministrado e sobre os saberes que são institucionalizados em sala de aula a partir dele.

Os problemas aplicados nas três sessões de experimentação foram elaborados a partir da análise preliminar do livro didático, das orientações curriculares e da revisão de literatura. Foram elaborados em linguagem natural, numérica e icônica com recursos *ostensivos*, como o registro escrito, as tabelas, bolinhas, figuras, que pudessem evocar elementos *não ostensivos*, como o pensamento algébrico de resolução. Os objetos *ostensivos* são de natureza sensível, de certa materialidade, manipulável, perceptível aos sujeitos e os *não ostensivos*, como o pensamento algébrico, são objetos no campo das ideias, noções, conceitos, com a atividade principal de justificar e explicar o *ostensivo* a ele associado (BOSCH; CHEVALLARD, 1999) Os problemas são apresentados na Figura 1 (aqui de forma condensada, mas nos testes aplicados aos alunos havia espaço destinado aos cálculos).

**Figura 1.** Problemas aplicados nas três sessões de experimentação

**ATIVIDADES: 1ª. Sessão de Experimentação**

1) Pedro precisa fazer uma tarefa de matemática onde os números estão escondidos nesses quadrinhos. Você pode ajudá-lo a descobrir o valor de cada um desses quadrinhos?

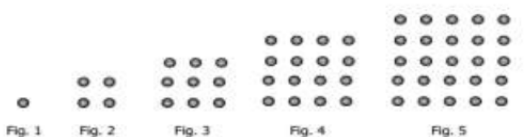
a)  $\blacksquare + 5 = 12$ . Então o  $\blacksquare$  vale \_\_\_\_\_ b)  $\blacksquare - 5 = 0$ . Então o  $\blacksquare$  vale \_\_\_\_\_

2) Rodrigo e João querem saber quem tem mais dinheiro. Rodrigo tem um valor dentro do bolso e mais R\$3,00 na mochila. João tem duas vezes mais dinheiro que o valor que Rodrigo tem dentro do bolso.

a) Quem tem mais dinheiro? \_\_\_\_\_ Por quê? \_\_\_\_\_

b) Quando eles tiverem a mesma quantia em reais, quanto Rodrigo terá dentro do seu bolso? \_\_\_\_\_

3) Observe a sequência das figuras quadrangulares ao lado formada por bolinhas. Seguindo esta mesma ordem quantas bolinhas serão necessárias para fazer 7ª figura?



Resp: \_\_\_\_\_

4) Ana gosta de brincar de sequências numéricas. Ela deverá concluir esta sequência obedecendo a mesma ordem. Qual será o 10º número (termo) que ela escreverá?

Resp: \_\_\_\_\_

5	9	13	17							?
---	---	----	----	--	--	--	--	--	--	---

**ATIVIDADES: 2ª. Sessão de Experimentação**

1) O dobro de um número mais 20 é igual a 50. Qual é esse número?

2) Pedro tem 12 figurinhas, Rodrigo tem o dobro de figurinhas de Pedro e Antônio tem 10 figurinhas a mais que Pedro. Quantas figurinhas os três têm, ao todo?

3) André, Maria e Luna têm, juntos, 72 figurinhas. Maria tem o dobro de figurinhas de André e Luna tem o triplo de figurinhas de André. Quantas figurinhas têm cada um?

4) Paulo, Beto e Mário vão repartir entre eles 90 figurinhas de modo que Beto receba o dobro de figurinhas de Paulo e Mário receba o triplo de Beto. Quantas figurinhas cada um vai receber?

5) Paulo, Beto e Mário vão repartir entre eles 90 figurinhas de modo que Beto fique com o dobro de figurinhas de Paulo e Mário fique com quatro figurinhas a mais que Beto. Quantas figurinhas cada uma vai receber?

**ATIVIDADES: 3ª. Sessão de Experimentação**

1) Os números da tabela obedecem a uma sequência. Descubra os números que estão faltando nos quadrinhos em branco e preencha-a.

9	15	21					39	
---	----	----	--	--	--	--	----	--

a) Nesta ordem, qual será o 10º. número dessa sequência?

2) Resolva os problemas:

a) Gabriel, Rodrigo e Henrique têm juntos 36 revistas em quadrinhos. Rodrigo tem o dobro de revistas de Gabriel e Henrique tem 12 revistas a mais que Gabriel. Quantas revistas têm cada um?

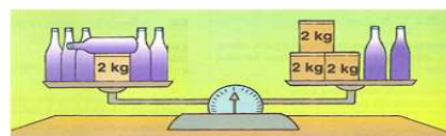
b) Clara, Guilherme e Antônio vão repartir 27 bombons de modo que Guilherme receba o dobro de bombons de Clara e Antônio receba três vezes mais bombons que Clara. Quantos bombons receberá cada uma das crianças?

3) Um estacionamento cobra R\$ 3,00 pela primeira hora. A partir da segunda hora, o valor é de R\$ 2,00 por hora adicional. Preencha a tabela abaixo com os valores para cada tempo de permanência e responda:

Tempo(Horas)	1	2	3	7
Preço (R\$)	3,00			

a) Quanto pagará o proprietário de um carro que esteve estacionado durante 7 horas?

4) A balança ilustrada ao lado está com os pratos em equilíbrio. Todas as garrafas têm o mesmo peso e cada lata tem 2kg. Quanto pesa cada garrafa?



Fonte: Campos (2019).

Por se tratar de um estudo majoritariamente qualitativo, a produção dos dados que ofereceram interesse às nossas análises se deu a partir das ações dos participantes no processo, que primam pelos significados dados às ações (BOGDAN; BIKLEN, 1994), em consonância com os conhecimentos implícitos na atividade. Buscamos com as análises das respostas dadas aos problemas, que se apresentaram nos registros oral e escrito, aspectos de percepção de regularidades; de elementos invariantes em contraste com outros que variam; e a presença da generalização na expressão das relações (RADFORD, 2010) e conexões entre as variáveis dos problemas no registro da língua natural (DUVAL, 2003). A variedade de registros, de acordo Campos et al. (2021), possibilita verificar a ocorrência de pensamento algébrico, visto que o pensar é uma função cognitiva que só é comunicada pela linguagem, seja escrita, oral ou gestual.

Metodologicamente, a Teoria Antropológica do Didático – TAD, sistematizada por Chevallard (1999), nos deu aporte teórico para a elaboração e análises dos problemas que compuseram as experimentações na SD, suas implicações, *condições e restrições* para a aprendizagem matemática, especificamente quanto aos objetos *ostensivos e não ostensivos* no processo de construção dos conceitos algébricos e sua significação, e assim para o desenvolvimento do pensamento algébrico.

### **A engenharia didática: proposta metodológica para investigar o desenvolvimento do pensamento algébrico**

Discutiremos o objeto de estudo pensamento algébrico e o assumimos como “uma ação exclusivamente humana, cognitiva e revelada na atividade matemática através do estabelecimento de relações” (CAMPOS, 2019, p. 14), que se caracteriza pelas conexões e relações que são estabelecidas entre os dados de um problema no processo de construção das possíveis soluções. E o pensar algebricamente é lidar com o desconhecido como se fosse conhecido (RADFORD, 2010; SQUALLI, 2003), nesse estabelecimento de relações e conexões entre as ideias, num contínuo processo de produção de significados para os símbolos e objetos da álgebra, para os problemas algébricos.

Para esse fim elaboramos uma SD com o objetivo de conhecer, interpretar e analisar as estratégias mobilizadas pelos alunos ao se depararem com problemas matemáticos intencionalmente elaborados para a manifestação do pensamento algébrico de resolução. Esta foi sistematizada metodologicamente através de uma Engenharia



Didática clássica e se deu nas sessões de experimentação. Almouloud e Silva (2012, p. 26) explicam que

A noção de Engenharia Didática (clássica ou de primeira geração) emergiu na didática da matemática no início dos anos 1980. Primeiramente em 1982 por Yves Chevallard e Guy Brousseau, depois, em 1989, por Michèle Artigue. Ela foi apresentada como uma metodologia de pesquisa suscetível de fazer aparecer fenômenos didáticos em condições mais próximas possíveis do funcionamento de uma sala de aula clássica.

Artigue (1988, p. 285, tradução nossa) caracteriza a Engenharia Didática “como um esquema experimental baseado nas realizações didáticas em sala de aula, ou seja, na concepção, realização, observação e análise de sequências de ensino”, que perpassa por quatro fases: análises preliminares, concepção e análise *a priori* das situações didáticas, experimentação e análise *a posteriori*, e validação. Buscamos com a Engenharia Didática essas realizações didáticas como também comunicar à comunidade interessada as atividades de ensino realizadas em busca de avanços no ensino da matemática, no caso, o desenvolvimento do pensamento algébrico.

Segundo Chevallard (2009), a Engenharia Didática enquanto método de pesquisa pode oferecer ao investigador as possibilidades únicas de uma metodologia, a que chama de praxeologias de investigação em didática, pois faz emergir fenômenos didáticos únicos para estudar a partir das experimentações montadas em função da questão de pesquisa.

### **A sequência didática: as experimentações e a produção de dados para as análises**

Para a produção dos dados de análise construímos uma SD com oito momentos didáticos distribuídos em onze encontros de uma hora-aula, em cada uma das três turmas. Concebemo-la como uma ação de ensino com resolução de problemas.

Centramo-nos nas análises: didática, *a priori*, dos problemas que compuseram as sessões de experimentação da sequência e dos momentos didáticos que a constituíram; e *a posteriori* dos resultados, fases da Engenharia Didática descritas por Artigue (1988).

A partir dos princípios metodológicos da Engenharia Didática (ARTIGUE, 1988), fizemos as análises preliminares dos problemas propostos, evidenciando os saberes e os conhecimentos matemáticos relacionados com cada um deles. Realizamos as experimentações desses problemas em sala de aula e suas análises serviram à validação da proposta didática, após analisarmos as orientações curriculares para o 6º ano do EF.

Os instrumentos de produção de dados foram testes diagnósticos aplicados individualmente, como se vê na Figura 1, e a partir deles buscamos analisar o desempenho dos alunos e interpretar suas ações, centrando na atividade humana enquanto experiência social e na produção de significados aos problemas da experimentação. Segundo Bogdan e Biklen (1994), as diversas formas de interpretar as experiências são acessíveis aos investigadores através da sua interação com os pesquisados quando buscam compreender o pensamento subjetivo destes.

A SD proposta ficou assim sistematizada: o primeiro momento denominamos apresentação e foi reservado para um diálogo com os alunos sobre sua participação no projeto, e contou com a presença da professora (única para as três turmas pesquisadas); as fases seguintes, exceto o último encontro que foi reservado à avaliação da proposta e da participação da pesquisadora em sala, são descritas como experimentações e compreendem do segundo ao sétimo momentos. São fases diagnósticas de produção de dados. Sintetizamos o desenho do experimento na Tabela 1.

**Tabela 1** - Desenho do Experimento

ATIVIDADE	DURAÇÃO/ PREVISÃO	DESCRIÇÃO/OBJETIVOS DA ATIVIDADE
Apresentação da pesquisa	1 encontro Junho/2018	Apresentação da pesquisa, objetivos, termos legais, a função de cada participante na pesquisa; entrega e explicação do TCLE.
Experimentação: 1ª. sessão	2 encontros Junho/2018	A pesquisadora assumirá a sala de aula por duas aulas, trabalhando atividades intencionalmente elaborada para verificar o desenvolvimento do pensamento algébrico.
Avaliação da 1ª. Sessão de Experimentação	1 encontro Julho/2018	Discutir a 1ª. Sessão da Experimentação; Realizar questionamentos, entrevistas, se necessário e esclarecer possíveis dúvidas nas resoluções.
Experimentação: 2ª. Sessão	2 encontros Julho/2018	A pesquisadora assumirá a sala de aula por duas aulas, como na sessão anterior.
Avaliação da 2ª. Sessão de Experimentação	1 encontro Julho/2018	Discutir a 2ª. Sessão da Experimentação; Realizar questionamentos, entrevistas, se necessário e esclarecer possíveis dúvidas nas resoluções.
Experimentação: 3ª. Sessão	2 encontros Julho/2018	A pesquisadora assumirá a sala de aula por duas aulas, como na sessão anterior.
Avaliação da 3ª. Sessão de Experimentação	1 encontro Julho/2018	Discutir a 3ª. Sessão da Experimentação; Realizar questionamentos, entrevistas, se necessário e esclarecer possíveis dúvidas nas resoluções.
Encerramento	1 encontro Agosto/2018	Encerramento: discussão sobre a pesquisa, a participação da pesquisadora e avaliação das atividades desenvolvidas.

Fonte: Campos (2019)

As entrevistas, pelo caráter mais aberto e flexível, retratam a espontaneidade dos entrevistados (BOGDAN; BIKLEN, 1994), e assim foram essenciais às nossas análises.

Possibilitaram esclarecer possíveis dúvidas quanto aos procedimentos de resolução dos problemas registrados em meio escrito pelos alunos nas atividades de experimentação. O uso de entrevistas, além dos instrumentos escritos, justifica-se pela necessidade de dispormos de mais um tipo de registro, o oral. Segundo Bosch e Chevallard (1999), os conceitos só são construídos a partir da manipulação de objetos *ostensivos*, que são signos dotados de significado e sentido, caracterizados pelo registro oral, escrito, gráfico, gestual ou material. Registro é o sistema no qual ocorre ou se realiza a representação de um dado objeto (DUVAL, 2003), externando assim o objeto não *ostensivo* (ideia, noção) pensado pelo sujeito. No nosso caso, esperávamos que esse aluno externasse o não *ostensivo* pensamento algébrico.

A experimentação é o momento de se colocar em funcionamento a sequência construída e seus instrumentos diagnósticos, corrigindo-os se necessário, o que implica em um retorno à análise *a priori*, em um processo de complementação. Dessa forma, as fases de experimentação coadunam com a preocupação em analisar a evolução do aluno ao longo da realização da SD. Não se trata de traçar paralelos e comparação dos conhecimentos do aluno antes e depois destas, é um processo de validação externa “porque são externas à classe” (ARTIGUE, 1996, p. 284). São confrontos contínuos que surgem naturalmente ao longo da realização da SD, entre as análises *a priori* e *a posteriori*, que podem redefinir rumos e tarefas, se necessário. E assim fizemos, as fases anteriores serviram de base à construção das posteriores, pela análise dos problemas e pelas observações dos alunos no processo de construção das respostas aos problemas.

### **O estudo: fases da Engenharia Didática**

Em nosso estudo as três sessões de experimentação se deram em ambiente presencial com atividades de resolução de problemas, intencionalmente elaborados com o conteúdo números naturais e com o objetivo de investigar as estratégias mobilizadas pelos alunos a partir das produções orais e escritas ao resolvê-los, que revelassem aspectos inerentes ao desenvolvimento do pensamento algébrico.

A primeira fase, a análise prévia, compreendeu a análise epistemológica dos conteúdos constantes no plano de ensino; o ensino habitual e seus efeitos/consequências; a compreensão dos alunos e das dificuldades e obstáculos que pontuam seu

desenvolvimento; o campo de sujeição no qual se estabelecerá a realização didática e os objetivos da pesquisa (ARTIGUE, 1996).

Realizou-se uma análise epistemológica prévia do objeto matemático pensamento algébrico, análise institucional do livro didático, dos documentos curriculares que orientam o ensino da matemática no 6º ano do EF e uma análise didática de pesquisas correlatas. Esta última compreendeu uma revisão de literatura, situando o problema de pesquisa num contexto maior, para identificar os possíveis obstáculos epistemológicos a serem enfrentados na formação do pensamento algébrico e justificar a sua inserção no ensino.

A segunda fase, concepção e análise *a priori*, segundo Artigue (1996, p. 205), objetiva

determinar de que forma permitem as escolhas efetuadas controlar os comportamentos dos alunos e o sentido desses comportamentos. Para isso, ela funda-se em hipóteses; será a validação destas hipóteses que estará, em princípio, indiretamente em jogo no confronto, operado na quarta fase, entre a análise *a priori* e a análise *a posteriori*.

Aqui a nossa hipótese de estudo de observação dos comportamentos dos alunos frente a uma tarefa proposta foi explicitada, a SD concebida e a fundamentação teórica testada quanto à validade para respondê-la. E então foram pensadas as variáveis didáticas e como elas se relacionavam com a hipótese de dificuldade na aprendizagem matemática e o desenvolvimento do pensamento algébrico.

Artigue (1996, p. 202) indica a distinção de dois tipos de variáveis de comando: “as variáveis globais que dizem respeito da organização geral da engenharia; e as variáveis locais, que dizem respeito a uma sessão ou fase da engenharia”. Nesse sentido, a nossa variável global partiu do questionamento como se dá o desempenho do aluno diante de cada objeto matemático, sejam *ostensivos* ou *não ostensivos*. E as nossas variáveis locais de estudo, *a priori*, foram: apresentação, linguagem, tipo e nível de dificuldade dos problemas. Como exemplo, destacamos a análise *a priori* de uma das atividades de experimentação na Figura 2.

**Figura 2.** Problema 1 da 1ª. Fase de Experimentação

1) Pedro precisa fazer uma tarefa de matemática onde os números estão escondidos nesses quadrinhos. Você pode ajudá-lo a descobrir o valor de cada um desses quadrinhos?

a)  $\square + 5 = 12$ . Então o  $\square$  vale \_\_\_\_\_

b)  $\square - 5 = 0$ . Então o  $\square$  vale \_\_\_\_\_

Fonte: Campos (2019)

O problema destacado na Figura 2 apresenta uma tarefa em linguagem natural de natureza mista – numérica e icônica – e de dificuldade simples. A *condição* para a sua realização é o estabelecimento de relações (quadrinhos e números) e utilização de cálculos mentais e/ou explícitos com os objetos que representam o desconhecido, que remetem a uma equação, além do domínio das operações de adição e subtração. Esperava-se com esse problema a formação de um pensamento algébrico que subsidiasse as primeiras ideias dos *não ostensivos* incógnita e variável.

A terceira fase, a experimentação, conforme delimita Artigue (1996), é constituída pelo período de aplicação das atividades planejadas, seguida da análise do conjunto dos dados obtidos durante as sessões de ensino. No nosso estudo se deu em três fases, com aplicação de atividades de resolução de problemas em três salas de aula, tal como ocorre no ensino regular. Observamos as produções dos alunos com o objetivo de identificar o desenvolvimento do pensamento algébrico, discutindo a proposta e fazendo ajustes necessários nos instrumentos a partir do que foi observado.

Na análise *a posteriori* e validação, quarta fase, consideram-se todas as informações obtidas na investigação das produções dos alunos. Realizamos nessa fase a análise dos dados obtidos na dinâmica da aplicação da SD, comparando e interpretando teoricamente os resultados das análises *a priori* e *a posteriori* e os fenômenos observados e produzidos com os instrumentos utilizados, e por fim, a validação teórica dos dados.

A análise *a posteriori* do problema destacado na Figura 2 mostrou as percepções dos alunos em relação ao aspecto de variável: ora o quadrinho assume o valor 7, ora o mesmo quadrinho assume valor 5. Campos (2019) destaca ainda que o índice de acertos de 52% a esse problema reforça as discussões quanto às competências dos estudantes em resolver problemas simples envolvendo as noções básicas de operações fundamentais, que já fazem parte do seu repertório de conceitos. Reside, de forma *não ostensiva* nesse problema, a noção de igualdade como princípio de equivalência. São noções básicas

destacadas no currículo de Matemática dos anos iniciais do Ensino Fundamental à espera de serem despertadas. E assim valida a hipótese deste estudo de ser o 6º ano do EF um momento propício.

Segundo Bittar (2017, p. 106), no processo de validação deve-se fazer uma “análise dos comportamentos cognitivos dos alunos diante das situações propostas” validando-os a partir das análises feitas inicialmente e durante todo o desenvolvimento da SD. E assim, fizemos uma validação interna das hipóteses de investigação, analisando as contribuições da SD para a superação do problema de falta de significação dos problemas algébricos e assim para a aprendizagem matemática.

### **Discutindo a proposta metodológica e os resultados do estudo**

Ao apresentarmos o experimento didático como um caminho possível para a pesquisa na sala de aula de matemática, destacamos que o seu desenvolvimento permite a apreensão do conhecimento e do sentido da atuação do professor e do aluno frente a uma educação que exige novas ações dos sujeitos. Essa é uma realidade da educação.

Analisamos que a SD que propusemos é uma contribuição de nossa pesquisa para com a comunidade de Educação Matemática sob dois aspectos: o primeiro diz respeito ao campo científico, pois a originalidade está no entrelaçamento que se deu entre a SD e as definições teóricas que subsidiaram a sua construção, aplicação e as análises; o segundo aspecto diz respeito a um modo de conceber o pensamento algébrico como um objeto matemático capaz de contribuir com a aprendizagem, não se limitando à aprendizagem algébrica, dada a riqueza de conexões e relações que esse tipo de pensar estabelece com outros conhecimentos, seja se apropriando dele, seja problematizando a partir dele.

Os resultados alcançados por Campos (2019) permitiram inferir que a SD proposta mostrou-se consistente e coerente, visto que sua construção apoiou em alicerces teóricos e metodológicos firmes, planejados, como preconizado pelos princípios da Engenharia Didática, e que se edificou na relação entre teoria e experimentação, possibilitando sua validação e institucionalização.

Considerando as experimentações, que configuram uma intervenção didática pelos momentos de troca com os alunos pesquisados, como um todo, verificamos que houve ganho de entendimento, o que, para a perspectiva qualitativa adotada na pesquisa, configura-se em aprendizagem. E ainda, reforça-nos a hipótese de que os conteúdos e

conceitos da álgebra não estão localizados em um determinado ano, ou no uso de letras, símbolos. Estes residem ao longo da formação matemática escolar do estudante. E estas constatações vão ao encontro do que preconiza a BNCC (BRASIL, 2018), o movimento *Early Algebra* e as demais pesquisas que investigamos (ALMEIDA, 2016; CAMPOS, 2015; CARRAHER; SCHLIEMANN, 2007, entre outras), que defendem a introdução precoce da educação algébrica na perspectiva da formação do pensamento algébrico, a partir de intervenções intencionalmente planejadas para esse fim.

A pesquisa de Campos (2019) mostrou que a *condição* que mais prevaleceu na solução dos problemas foi tratar o desconhecido como se fosse conhecido (RADFORD, 2010; SQUALLI, 2003), como aconteceu, por exemplo, nas respostas dos alunos (Figura 3) ao problema destacado na Figura 2.

**Figura 3.** Protocolo de Pesquisa - Resoluções do problema 1 pelos alunos TA2 e TA23

<p>1) Pedro precisa fazer uma tarefa de matemática onde os números estão escondidos nesses quadrinhos. Você pode ajudá-lo a descobrir o valor de cada um desses quadrinhos?</p> <p>a) <math>\square + 5 = 12</math>. Então o <math>\square</math> vale <u>7</u></p> <p>b) <math>\square - 5 = 0</math>. Então o <math>\square</math> vale <u>5</u></p>	<p>Espaço para Rascunhos</p> $\begin{array}{r} 12 \\ -5 \\ \hline 07 \end{array} \quad \begin{array}{r} 0 \\ +5 \\ \hline 5 \end{array}$	<p>Espaço para Rascunhos</p> $\begin{array}{l} 7 + 5 = 12 \\ 5 - 5 = 0 \end{array}$
--	--	---

Fonte: Campos (2019)

Interessava-nos analisar como surgiu o raciocínio algébrico de pensar o *ostensivo* quadrinho como uma incógnita. Entendemos que há aí uma *restrição* imposta pelo currículo do 6º ano do EF, o fato dos alunos pesquisados não terem visto equação algébrica, por época da aplicação do teste. Nesse sentido é que nos propusemos analisar as *condições* e *restrições* para que essa sequência pudesse ser implementada no 6º ano do EF, não como um modelo de ensino, mas como uma proposta pensada para o desenvolvimento do pensamento algébrico.

Despertou-nos a pensar que um ensino que valorize os saberes, o contexto, as relações, a significação e o caminho percorrido possibilita o desenvolvimento não só do pensamento algébrico, como também de muitos outros objetos de estudo da matemática. Nesse sentido, a TAD (CHEVALLARD, 1999, 2002, 2009) nos deu aporte ao lidar com uma gama de registros semióticos, como os objetos *ostensivos* e *não ostensivos* da

matemática algébrica, dotando-os de significado e sentido, o que favoreceu a realização das atividades e a comunicação de seus resultados.

É fato que “o aluno é agente da construção do seu conhecimento, pelas conexões que estabelece com seu conhecimento prévio num contexto de resolução de problemas” (BRASIL, 1998, p. 37), no entanto a condução didática é parte relevante.

### **Considerações Finais**

Processo de investigação que implica na apreensão da realidade através de ferramentas metodológicas qualitativas requer dialogicidade, conhecimento reflexivo e um compromisso com a realidade concreta. E a proposta metodológica da SD nos proporcionou esses momentos; pudemos dialogar sobre o ensino e a aprendizagem matemática no momento em que eles se ajustavam à prática docente.

Contudo, é imprescindível que o pesquisador da Educação Matemática, que opte pelo experimento didático, tenha consciência da importância de ter um aporte teórico que justifique e sustente este tipo de atividade de pesquisa. É um caminho didático que possibilita não cairmos em reflexões simplistas, pontuais e inconsistentes. Os arcabouços teóricos da TAD e da Engenharia Didática nos possibilitaram tais reflexões.

A Engenharia Didática que desenvolvemos se constitui em um instrumento privilegiado para se considerar a complexidade da sala de aula, dadas suas funções diagnóstica e formativa. Realizá-la foi frutífero, direcionou nossas análises, sistematizou a metodologia e possibilitou uma interessante interlocução entre os objetivos que traçamos, a partir do que os estudos nos mostraram preliminarmente, e o que recolhemos de dados nas experimentações. Chamamos esse momento de análise cruzada entre as análises *a priori* e *a posteriori*. Para esta última recolhemos dados nos momentos de experimentação e então validamos a nossa SD.

As principais contribuições e o diferencial da SD experimentada residem na atividade de resolução de problemas em linguagem natural que privilegiaram o desenvolvimento do pensamento algébrico pelas relações e conexões exigidas no processo de resolução. E privilegiar o desenvolvimento do pensamento algébrico nos mostrou os estudos correlatos e o que desenvolvemos, contribui para a aprendizagem matemática através da memória e da linguagem, como também das ferramentas da aritmética que são disponibilizadas nos repertórios conceituais dos alunos e que lhes



permitiram manipular *ostensivos e não ostensivos* nos problemas propostos. Aportamos o nosso estudo no 6º ano do EF, não como preparação para a educação algébrica futura, mas para o estudo de toda a matemática que visa à significação de seus conteúdos.

Trata-se de uma proposta didática que, se implementada, pode levar ao conhecimento, como toda e qualquer ação didática pensada e sistematizada para esse fim, pois nenhuma ação didática existe no vácuo. As abordagens experimentais, enquanto proposta metodológica, têm trabalhado com os diversos temas inscritos no rol de interesses das pesquisas em Educação Matemática que visam amenizar os problemas com a aprendizagem matemática e se mostram eficientes, como neste estudo, que focou na aprendizagem algébrica a partir do desenvolvimento do pensamento algébrico.

## Referências

ALMEIDA, J. R. **Níveis de desenvolvimento do pensamento algébrico**: um modelo para os problemas de partilha de quantidade. 2016. Tese (Doutorado em Educação Matemática e Tecnológica). Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2016. Disponível em <http://www.tede2.ufrpe.br:8080/tede2/handle/tede2/7451>.

ALMOULOUD, S.; SILVA, M. J. F. Engenharia didática: evolução e diversidade. **Revemat**. Florianópolis, v. 07, n. 2, p. 22-52, 2012.

ARTIGUE, M. Ingénierie didactique. In: **Equipe DIDIREM**, Université Paris (Org.) *Recherches en Didactique des Mathématiques*. La Pensée Sauvage Éditions, v. 9, n.3, 1988, p. 281–308. Recuperado de <https://revue-rdm.com/bibliotheque/>

ARTIGUE, M. Ingénierie didactique. **l’Institut de recherche mathématiques de Rennes**. Fascicule S6, p. 124-128, 1989. Recuperado de [http://www.numdam.org/item?id=PSMIR\\_1989\\_\\_S6\\_124\\_0](http://www.numdam.org/item?id=PSMIR_1989__S6_124_0).

ARTIGUE, M. Épistémologie et didactique. **Recherches en Didactique des Mathématiques**. Grenoble: La Pensée Sauvage éditions, v. 10, n. 2.3, p. 241-286, 1990. Recuperado de <https://revue-rdm.com/bibliotheque/>.

ARTIGUE, M. Engenharia Didática. In: BRUN, J. (org.) **Didáctica das Matemáticas**. Lisboa: Instituto Piaget, 1996, p. 193-217.

BITTAR, M. Contribuições da teoria das situações didáticas e da engenharia didática para discutir o ensino de matemática. In: TELES, R. A. M.; BORBA, R. E. S. R.; MONTEIRO, C. E. F. (Org.). **Investigações em didática da matemática**. Recife: UFPE, v. 1, 2017, p. 101-132.

BLANTON, M.; KAPUT, J. Characterizing a classroom practice that promotes algebraic reasoning. **Journal for Research in Mathematics Education**, v. 5, n. 36, p. 412-446, 2005. Recuperado de <https://www.jstor.org/stable/30034944>.

BOGDAN, R.; BIKLEN, S. **Investigação qualitativa em educação**. Porto: Porto Editora, 1994.

BOSCH, M.; CHEVALLARD, Y. La sensibilité de l'activité mathématique aux ostensifs objet d'étude et problématique. **Recherche en Didactique des Mathématiques**, v. 19, n. 1, p. 77-124, 1999. Recuperado de <https://revue-rdm.com/1999/la-sensibilite-de-l-activite/>.

BRASIL. **PCN - Parâmetros Curriculares Nacionais (5ª a 8ª Séries) – Matemática**. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Fundamental. Brasília, DF, 1998. Recuperado de <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/matematica.pdf>.

BRASIL. **BNCC – Base Nacional Comum Curricular – Ensino Fundamental**. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Fundamental. Brasília, DF, 2018. Recuperado de <http://basenacionalcomum.mec.gov.br>.

CAMPOS, M. A. **Construindo significados para o x do problema**. 2015. 167 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Universidade Estadual de Santa Cruz, Ilhéus/BA, 2015. Disponível em <http://www.biblioteca.uesc.br/biblioteca/bdtd/201360047D.pdf>.

CAMPOS, M. A. **Uma sequência didática para o desenvolvimento do pensamento algébrico no 6º ano do ensino fundamental**. 2019. 206 fls. Tese (Doutorado em Ensino, Filosofia e História das Ciências) - Universidade Federal da Bahia, Salvador, 2019.

CAMPOS, M. A.; CARVALHO, E. F.; OLIVEIRA, E. S. S; FONSECA, L. S. O psicocognitivismo de Piaget, o sociocognitivismo de Vygotsky e os registros de representação semiótica na aprendizagem matemática. In: FONSECA, L. S. (org). **Fenômenos da Aprendizagem: princípios ativos para o ensino de ciências e matemática**. (Recurso eletrônico). São Cristóvão: Editora UFS, 2021, p. 25-39.

CARRAHER, D. W.; SCHLIEMANN, A. D. Early Algebra and algebraic reasoning. In: LESTER, F. (Ed.). **Second handbook of mathematics teaching and learning**. Greenwich: Information Age Publishing, 2007, p. 669-705.

CHEVALLARD, Y. L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. **Recherche en Didactique des Mathématiques**, v. 19, n. 2, p. 221-266, 1999. Recuperado de <https://revue-rdm.com/1999/l-analyse-des-pratiques/>.

CHEVALLARD, Y. Organiser l'étude. *Ecologie & regulation. Actes de la École d'Été de Didactique des Mathématiques*. France: La Pensée Sauvage, p. 41-55, 2002.  
Recuperado de [http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/article.php3?id\\_article=62](http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/article.php3?id_article=62).

CHEVALLARD, Y. La notion d'ingénierie didactique, un concept à refonder: La notion d'ingénierie didactique, un concept à refonder. In: *École d'été de didactique des mathématiques*, 15. Clermont-Ferrand. **Acté...** Clermont-Ferrand: Université Clermont Auvergne, p. 1-44, 2009.

CRESWELL, J. W. **Qualitative inquiry and research design: Choosing among five approaches**. 2. ed. Thousand Oaks, Canadá: Sage, 2013.

DA ROCHA FALCÃO, J. T. A álgebra como ferramenta de representação e resolução de problemas. In: SCHILLIEMAN, A. D. *et al.* (Org.). **Estudos em Psicologia da Educação Matemática**. Recife: Ed. Universitária da UFPE, 1993, p. 85-107.

DUVAL, R. Registros de representações semióticas e funcionamento cognitivo da compreensão matemática. In: MACHADO, S. D. A. (Org.). **Aprendizagem em matemática: registros de representação semiótica**. Campinas, SP: Papirus, 2003, p. 11-33.

FIORENTINI, D.; MIORIM, M. A.; MIGUEL, A. Contribuição para um repensar... a Educação Algébrica Elementar. **Pro-Posições**, Campinas, v. 4, n. 1, p. 78-91, 1993.

KAPUT, J. Teaching and learning a new algebra. In: FENNEMA, E; ROMBERG, T.A. (Eds.). **Mathematics classrooms that promote understanding**. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates, 1999, p. 133–155.

LINS, R. C. **A framework for understanding what algebraic thinking is**. 1992. Tese (Doctor of Philosophy) – School of Education, University of Nottingham, Nottingham, UK, 1992.

ONUCHIC, L. de la R.; ALLEVATO, N. S. G. Proporcionalidade através da Resolução de Problemas no Curso Superior de Licenciatura em Matemática. In: Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática, 6., 2015, Pirenópolis. **Anais...** Goiânia: UFG, 2015.

RADFORD, L. Signs, gestures, meanings: Algebraic thinking from a cultural semiotic perspective. In: Durand-Guerrier, V.; Soury-Lavergne, S.; Arzarello, F. (Eds.). **Proceedings of the Sixth Conference of European Research in Mathematics Education (CERME 6)**, Université Claude Bernard, Lyon, France, 2010, p. XXXIII – LIII.

SCHWANDT, T. A. Três posturas epistemológicas para a investigação qualitativa: interpretativismo, hermenêutica e construcionismo social. In: DENZIN, N. K.;

LINCOLN, Y. S. (Orgs.). **O planejamento da pesquisa qualitativa: teorias e abordagens**. 2. ed. Porto Alegre: Artmed, 2006, p. 193-217.

SQUALLI, H. **Tout, tout, tout, vous saurez tout sur l'algèbre**. Trois-Rivières: Éditions Bande Didactique, 2003.

*Recebido em 16 de julho de 2021*  
*Aprovado em 01 de dezembro de 2021*