em teia
Revista de Educação Matemática e Tecnológica Iberoamericana
Universidade Federal de Pernambuco
ISSN 2177-9309
Pós-Graduação em Educação Matemática e Tecnológica
EDUMATEC

Os Teoremas da Incompletude de Gödel e possibilidades que abrem ao ensino e à aprendizagem de Matemática e Física

Godel's Incompleteness Theorems and possibilities that opens to the teaching and learning of Mathematics and Physics

César Oswaldo Vásquez Flores
Doutor em Física
Universidade Estadual da Região Tocantina do Maranhão
Grupo de Estudo em Matemática Pura, Aplicada e Ensino - GEMPAE
cesar.vasquez@uemasul.edu.br
https://orcid.org/0000-0003-1298-9920

Giovana Alves
Doutora em Matemática
Universidade Estadual da Região Tocantina do Maranhão
Grupo de Estudo em Matemática Pura, Aplicada e Ensino - GEMPAE
giovana.alves@uemasul.edu.br
https://orcid.org/0000-0002-9952-3391

José Milton Lopes Pinheiro
Doutor em Educação Matemática
Universidade Estadual da Região Tocantina do Maranhão
Grupo de Estudo em Matemática Pura, Aplicada e Ensino - GEMPAE
jose.pinheiro@uemasul.edu.br
https://orcid.org/0000-0002-0989-7403

Juscimar da Silva Araujo
Doutorando em Educação para a Ciência e a Matemática
Universidade Estadual da Região Tocantina do Maranhão
Grupo de Estudo em Matemática Pura, Aplicada e Ensino - GEMPAE
juscimararaujo@uemasul.edu.br
https://orcid.org/0000-0001-5328-0825

Resumo

Este artigo visa compreender: quais possibilidades se abrem ao ensino e à aprendizagem de Matemática e Física, quando compreendida a incompletude das mesmas frente aos teoremas de Gödel? Essa pergunta implica pensar os teoremas para além de suas estruturas amplamente formais e complexas, visando a produção de conhecimentos em sala de aula, que aparentemente são desconexos de tais estruturas. A busca por compreender a interrogação dá-se mediante estudo qualitativo, de cunho bibliográfico, atentando-se ao que dizem pesquisadores das áreas de Matemática, Física, Educação Matemática e Ensino de Física sobre os Teoremas da Incompletude de Gödel. O olhar que permite uma aproximação destes teoremas à sala de aula de Matemática e de Física é um olhar filosófico que permite pensar as implicações dos mesmos à constituição do conhecimento nestas áreas. Associa-se o revés produzido pelos teoremas às pretensões de fundar, sem contradições, toda a Matemática, ao movimento de aprender, que está sempre em constituição, bem como à percepção da correspondência entre sujeitos e ciências, quando pensados como seres cuja completude não se realiza, constituindo, assim, um modo de ser que é comum, contrariando, portanto, o pensamento que separa ou afasta a Matemática ou a Física daqueles que não são profissionais ou pesquisadores destas áreas.

Palavras-Chave: Teoremas da Incompletude de Gödel, Ensino de Física, Educação Matemática.

Abstract

This article intends to understand: what are the possibilities that opens to the teaching and learning of Mathematics and Physics, when understood their incompleteness in relation to Gödel's theorems? This question implies thinking the theorems beyond their formal and complex structures, considering the production of knowledge in the classroom, which are apparently disconnected from such structures. The search for understanding the questioning occurs through a qualitative study, of bibliographic nature, paying attention to what researchers in the areas of Mathematics, Physics, Mathematics Education and Physics Teaching say about Gödel's Incompleteness Theorems. The view that allows an approximation of these theorems to the Mathematics and Physics classroom is a philosophical view, which allows to think the implications of themselves to the constitution of knowledge in these areas. The opposite produced by the theorems is associated with the intentions of grounding, without contradictions, all mathematics, to the learning movement, which is always in constitution, as well as the perception of correspondence between subjects and sciences, when thought as beings whose completeness is not real, thus constituting a way of being that is common, going against, therefore, the thinking that separates or distances Mathematics or Physics from those who are not professionals or researchers in these areas.

Keywords: Godel's Incompleteness Theorems, Physics Teaching, Mathematical Education.

Introdução

Um nome importante para o século XX é o do lógico-matemático Kurt Friedrich Gödel (1906 - 1978), nascido em Brünn, no antigo império austro-húngaro (atualmente Brno, na República Checa). Os trabalhos de Gödel deram especial importância ao conhecimento empírico e suas classificações sistêmicas do conhecimento. Suas contribuições para a Matemática são notáveis, em especial, dois de seus teoremas destacaram-se à época e ainda são discutidos, os conhecidos Teoremas da Incompletude de Gödel (TIG).

Os estudos de Gödel remodelaram as bases da Matemática e da Lógica, ciências essencialmente formais, que tratam de entes ideais, abstratos ou interpretados, que existem apenas na mente humana. Essencialmente, o que tais teoremas nos dizem é que existiriam certas limitações ao pensamento matemático, com as quais dever-se-ia aprender a lidar. Esses teoremas foram impactantes, pois determinavam restrições a ideais científicos já consistentes no meio matemático. Curiosamente, o raciocínio contido nesses teoremas parece ter sido prontamente absorvido não apenas pela comunidade especializada, mas igualmente por ávidos pensadores de diversas áreas.

Ao lançarmos um olhar sobre o impacto e as contribuições que os trabalhos de Gödel trouxeram para a Matemática e a Lógica da época, somos levados a refletir sobre sua obra, em particular, aquelas direcionadas à área das denominadas Ciências Exatas, o que nos leva a seguinte indagação: quais possibilidades se abrem ao ensino e à aprendizagem de Matemática e Física, quando compreendida a incompletude das mesmas frente aos teoremas de Gödel?

O estudo aqui proposto difere de abordagens puramente técnicas e complexas, sem preocupar-se em estabelecer relações entre campos da Matemática e outros, evitando produzir modos de pensar estanques; na contramão disso, pensamos que, para o desenvolvimento de um novo olhar, mais dinâmico e relacionado com as realidade de outras áreas do conhecimento, tais como a Física, a Química, a Filosofia, a Astronomia, entre outras, necessitamos lançar mão de instrumentos matemáticos inter-relacionados a outras áreas do conhecimento humano.

Compreende-se que, no que se refere às pesquisas científicas, a Matemática, enquanto Ciência, tem se colocado como agente unificador, devido, especialmente, a sua capacidade de condensação e de generalização. Com isso, a própria Matemática não se põe, na atualidade, numa forma terminada e fechada em si, muito em decorrência do que é solicitado pelas diversas áreas de pesquisa, por novos olhares balizados na interação da Matemática e outros campos do conhecimento humano (PINHEIRO; BATISTELA, 2021).

Buscando tecer compreensões sobre a interrogação aqui colocada, assume-se uma metodologia qualitativa de investigação, com a qual empreende-se a interrogação tendo-a como norte de pesquisa, no entanto, sem dela fazer suposições prévias. Foi realizado um estudo bibliográfico e, com ele, fez-se uma articulação entre o dito pelos pesquisadores estudados e o compreendido pelos autores deste texto, evidenciando modos pelos quais os estudos de Gödel se apresentam junto às mais diversas áreas das ciências. O foco deste estudo direciona-se ao que dizem os pesquisadores no âmbito da Educação Matemática, da Matemática, da Física e do Ensino de Física sobre a temática, já explicitando que ela mesma não permite afirmar que serão contempladas todas as abordagens, bem como todos os estudiosos que a ela se voltam.

Os Teoremas da Incompletude de Gödel e suas implicações junto às pretensões matemáticas

Durante o século XIX, a Matemática teve um desenvolvimento extraordinário. Os progressos desenvolvidos em Cálculo e, principalmente, em Geometria, alavancados por resultados da Teoria de Conjuntos, tornaram esta área mais poderosa e abstrata. Contudo, ao final do século XIX e no início do século XX, foram descobertos vários paradoxos, entre os quais se destacaram o Paradoxo de Burali-Forti, o Paradoxo de Cantor e o Paradoxo de Russell, que mostraram a necessidade de organizar e apoiar esse conhecimento matemático em bases sólidas, e garantir que não continha contradições.

Essa necessidade de organização, bem como as inciativas voltadas a ela culminaram em uma crise dos fundamentos da Matemática, ocorrida no período acima posto, proporcionando o aparecimento de escolas filosóficas que apresentaram uma nova compreensão de como a Matemática deveria ser estruturada. Tais escolas diferiam a respeito de pontos de vista sobre o que seria legítimo considerar na base da fundamentação. Três correntes de pensamento que se destacaram foram: o Logicismo, o Intuicionismo e o Formalismo.

A primeira dessas doutrinas que se apresentou foi o Logicismo, iniciada por volta de 1884, sendo que alguns de seus defensores mais expressivos eram Gottlob Frege (1848-1925), Giuseppe Peano (1858-1932), Bertrand Russell (1872- 1970) e Alfred North Whitehead (1861-1947).

As ideias centrais do Logicismo giraram em torno das proposições analíticas da lógica, uma vez que estas eram tidas como o fundamento sobre o qual o conhecimento matemático poderia se justificar. Assim, a proposta logicista apresentava dois eixos importantes: a) os axiomas matemáticos são princípios da lógica; e b) a Matemática pode ser deduzida da lógica (BATISTELA et al., 2018).

A escola Intuicionista tem em Luitzen Egbertus Jan Brouwer (1881-1966) a síntese de formação e fundação, no ano de 1908. Os intuicionistas, também chamados de construtivistas, assumiam, segundo Machado (2005), que a Matemática poderia ser construída através de métodos construtivos finitos, a partir dos números naturais, os quais são subsidiados aos sujeitos através de uma intuição fundamental.

Para os intuicionistas, toda Matemática deveria ser reconstruída, considerando que "as entidades abstratas existiam somente quando eram construídas pela mente humana. Desse modo, o que não partisse da intuição não era Matemática" (MONDINI, 2008, p. 5).

A terceira corrente que se manifestou foi o Formalismo, por volta de 1910, com o matemático alemão David Hilbert (1862-1943). O propósito dos formalistas era trazer para as teorias matemáticas um conjunto de axiomas e regras de inferência, acompanhado de uma simbologia, e criar um método simples de verificação que decidisse quais sentenças pertenciam ao sistema e quais não pertenciam.

De acordo com Leary (2000), o plano de Hilbert era refutar a visão intuicionista, segundo a qual grande parte da Matemática estava sob suspeita, por não ser obtida por constructos finitistas. Assim, ele se comprometeu a provar que toda Matemática clássica era consistente, valendo-se de métodos finitários, também usados pelos intuicionistas, pois, sendo assim, teria certeza de que sua prova seria aceita por Brouwer e seguidores.

No Congresso Internacional de Matemática, ocorrido em 1900, em Paris, Hilbert apresentou uma lista contendo os 23 problemas matemáticos mais importantes, não resolvidos, até a entrada do século XX. Dentre esses, o problema 2 solicitava a prova da consistência dos axiomas da Aritmética. Em 1931, quando ainda vigorava a proposta de Hilbert de obter a completa construção da teoria matemática, através da lógica formal, Gödel publicou o seu trabalho "Sobre proposições formalmente indecidíveis nos Principia Mathematica e sistemas correlatos"[1], pondo fim a essa expectativa.

Os Principia Mathematica mencionados no título do artigo de Gödel, são os três volumes do tratado de Russell e Whitehead sobre Lógica Matemática e fundamentos da Matemática. Gödel mostrou que o sistema utilizado nos Principia ou qualquer outro sistema, no âmbito do qual a aritmética de Peano possa ser desenvolvida, é essencialmente incompleto (BATISTELA et al., 2018).

Os TIG, como ficaram conhecidos os teoremas VI e XI expostos no artigo, mostram, respectivamente, "que a aritmética formal, e por extensão a maior parte das teorias matemáticas interessantes, era incompleta (e, pior, incompletável)" (DA SILVA, 2007, p. 204); e no segundo teorema, um corolário do primeiro, "que a demonstração da consistência da aritmética formal era impossível por métodos que pudessem ser formalizados na própria aritmética formal." (DA SILVA, 2007, p. 204 - 205). No artigo original de Gödel,

[1] Nome original: Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme I, Divulgado na revista Monatshefte für Mathematik und Physik, p. 349–360.

encontramos a demonstração do primeiro teorema e um argumento da demonstração para o segundo.

De acordo com Wang (1981), algumas interpretações do papel de Gödel, ao demonstrar este resultado que colocou fim aos planos dos formalistas de fundamentar a Matemática, apoiando-se na aritmética, o apresentam como um iconoclasta. O próprio Gödel expõe que seu empenho incidia sobre provar a consistência da Análise Matemática, pois ele precisava provar alguma coisa maior para obter o posto de Privatdozent e ter acesso à carreira universitária na Universidade de Viena. Para isso, tomou o caminho de provar que a Análise seria consistente se, e somente se, a Aritmética o fosse, ao invés de atacar diretamente o problema da não contradição da Análise.

Decorre disso uma compreensão, da própria comunidade matemática, a respeito de que o trabalho do matemático seria investigar se as conclusões matemáticas obtidas são consequências lógicas necessárias das pressuposições iniciais, ao invés de averiguar se os postulados ou as conclusões assumidas são verdadeiros. Unindo-se essa compreensão à crescente abstração da Matemática, levanta-se a questão de saber se um dado conjunto de postulados, tomados como fundamento de um sistema, é internamente consistente (BATISTELA et al., 2018).

No caso da Geometria Riemanniana, a questão sobre a consistência do conjunto de axiomas propostos por Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826-1866) poderia ser formulada, de forma a questionar se o conjunto de axiomas criado não conduzia a teoremas contraditórios. No entanto, tão logo iniciadas as tentativas, pode-se discernir que elas apenas deslocavam o problema para outro domínio, pois a prova, por exemplo, da consistência da Geometria de Riemann apelava para a consistência da Geometria Euclidiana. A tentativa de fazê-lo, por meio da geometria de coordenadas cartesianas, que transformava os axiomas de Euclides em verdades algébricas, mostrou-se vulnerável, pois a prova da consistência pelo método de descoberta de um modelo não era absoluta, uma vez que transferia o problema para outro domínio, e então a Geometria seria consistente se a Álgebra o fosse (NAGEL; NEWMAN, 1973).

Os TIG atingiram como um golpe à aspiração de Hilbert "ao mostrar que demonstrações de consistência de teorias formais interessantes da matemática exigiriam recursos não finitários" (DA SILVA, 2003, p. 34 - 35). Assim, mostrou que a incompletude da Matemática formal é irredutível e, desse modo, a impossibilidade de se formalizar completamente toda a Matemática.

A Incompletude da Física

A Física é uma ciência experimental, que figura entre as mais bem sucedidas das ciências da natureza. O seu procedimento consiste em elaborar hipóteses para explicar um determinado conjunto de fenômenos. Se essas hipóteses forem corroboradas pelos experimentos, esse corpo de afirmações se transforma em uma teoria bem estabelecida.

Por exemplo, a mecânica newtoniana é uma teoria que, dadas as condições iniciais de posição e velocidade das partículas do Universo, prediz o seu comportamento futuro. Laplace foi quem introduziu esta ideia de determinismo científico (LAPLACE, 1990, p. 326), mas esta sensação de segurança se perdeu rapidamente com a descoberta dos fenômenos quânticos. Na mecânica quântica, a informação que é obtida sobre uma partícula está contida na função de onda. Por exemplo, a amplitude dessa onda nos dá a probabilidade de localizar a partícula. Assim, podemos pensar que melhorando nossos aparelhos experimentais calcularemos melhor a posição da partícula, e logo só faltaria calcular com precisão a velocidade. Mas essa possibilidade é ofuscada pelo princípio de incerteza de Heisenberg, segundo esse princípio nosso incremento na precisão do cálculo da posição de uma partícula vem acompanhado pela diminuição na precisão do cálculo da velocidade. Vemos, então, que o princípio de incerteza parece destruir o determinismo científico.

Na teoria quântica, o objeto mais importante é a função de onda, a qual é governada pela equação de Schrödinger. Essa equação é determinista já que dadas as condições iniciais ela prediz o comportamento futuro da função de onda, portanto é evidente que temos um determinismo sobre um novo tipo de objeto. A teoria quântica continuou sendo desenvolvida por diferentes cientistas e se mostrou exitosa nas aplicações físicas. Posteriormente, a teoria quântica foi unificada com a relatividade restrita e em seguida foi aplicada ao estudo dos fenômenos eletromagnéticos, essa teoria é chamada de eletrodinâmica quântica.

Como sabemos, além da interação eletromagnética, existem outras interações fundamentais na natureza, tais como a interação fraca, forte e a gravitacional. Por exemplo, a compreensão da interação fraca explica o decaimento beta dos núcleos radioativos e o entendimento da interação forte nos permite explicar a estabilidade da maioria dos núcleos atômicos. Sem dúvida, a teoria quântica foi essencial para ter uma boa descrição da interação fraca e forte. Posteriormente, percebeu-se que a interação eletromagnética e a fraca são na verdade duas faces diferentes de uma mesma interação que é chamada de interação eletrofraca. Por outro lado, temos também a teoria quântica da interação forte, que é chamada de cromodinâmica quântica. Contudo, até agora não foi possível encontrar uma teoria que unifique as interações eletrofraca e forte. A descoberta de unificações nos fez suspeitar que esse processo continuaria até encontrar a descrição de uma única força, que representaria a unificação final da Física.

Decidimos deixar a discussão sobre a interação gravitacional para depois, já que a teoria que a descreve é a relatividade geral. Essa teoria nos diz que na verdade a gravidade que experimentamos no dia a dia é uma deformação do espaço-tempo e, para ser mais precisos, essa deformação é a curvatura do espaço-tempo. Nessa teoria, as partículas ao moverem-se seguem trajetórias nesse espaço-tempo curvo, assim podemos ver que falar de trajetória significa implicitamente que a posição e velocidade de uma partícula devem estar bem definidas. Mas isso vai de encontro à possibilidade de uma descrição quântica da gravidade, já que na mecânica quântica a posição e velocidade de uma partícula obedecem ao princípio de incerteza de Heisenberg. Portanto, podemos ver que a ideia clássica de trajetória é completamente destruída, logo numa teoria quântica da gravidade não faz sentido falar de uma "trajetória num espaço-tempo curvo".

A interação gravitacional é fraca quando comparada com as outras interações, talvez seja por isso que alguns cientistas não estão muito interessados na quantização da gravidade. Porém, perto do Big Bang, alguns efeitos quânticos da gravidade podem ter ajudado a definir as condições iniciais do Universo, então mesmo sendo uma minoria, alguns cientistas decidiram procurar alguma descrição quântica da gravidade. Fruto do esforço de muitos cientistas surgiu a proposta da super-gravidade (o termo "super" vem de supersimetria). Nessa proposta, a interação gravitacional é acoplada às outras interações e cada partícula tem sua parceira supersimétrica (essa proposta foi uma tentativa de eliminar infinitos que aparecem na tentativa de descrever a gravidade numa formulação quântica).

Pouco depois apareceu uma alternativa mais promissora ainda, a chamada teoria de supercordas (ZWIEBACH, 2009). Segundo os seus defensores, esta teoria inclui por princípio (num dos tipos de oscilação da corda) os grávitons, assim naturalmente a teoria de supercordas inclui a quantização da gravidade e ao mesmo tempo prediz as outras partículas já conhecidas, porém uma das condições de consistência da teoria exige que o espaço-tempo tenha dez dimensões. Até agora não se encontrou evidências dessas dimensões extras e nem da supersimetria da teoria, mas se mantém vivos os esforços dos cientistas por essas evidências.

Como podemos ver, o ser humano segue procurando uma teoria física que possa incluir todas as interações na sua descrição. Porém, a procura de uma teoria completa que explique todas as leis da Física parece estar condenada ao fracasso ou no melhor dos casos só podemos continuar construindo (eternamente) teorias que melhorem nossa descrição da realidade, estabelecendo nesse processo, a cada descoberta, um novo corpo de conhecimento, que pode ser usado para explicar e predizer novos fenômenos físicos. Como exemplos de novos paradigmas na Física, que transformaram a nossa visão do mundo material, temos a Física Quântica e a Relatividade Geral.

Esse movimento de constituição de conhecimento na Física encontra correlatos nos Teoremas de Gödel, ao não se poder afirmar a completude da Física e a demonstrabilidade de teorias, mesmo havendo evidências bem descritas pelos métodos da Física. A Matéria Escura, por exemplo, vem sendo observada pelos seus efeitos gravitacionais, sendo estes analisados e descritos, mas, até o momento, a Matéria Escura não possui uma explicação teórica demonstrável. Existem propostas de explicação, mas os argumentos se valem de teorias físicas pré-estabelecidas, estas que não se mostram suficientes. Assim, a Matéria Escura é um "resultado" que não pode ser provado a partir dos axiomas existentes, e não se pode afirmar que tal prova será completada com a inserção de novos axiomas. Essa é uma implicação dos teoremas de Gödel. Em outras palavras, se alguns resultados não podem ser provados, alguns fenômenos físicos não podem ser preditos (D'ALKAINE, 2006, p. 528 - 529).

Os experimentos físicos fornecem um conjunto de dados sobre determinados fenômenos, que devem ser explicados ou interpretados pela comunidade científica e só depois de muitas propostas e discussões se tem um consenso sobre as leis que os governam. Essas leis são equivalentes aos axiomas na Matemática, já que servem para construir afirmações mais complexas sobre fenômenos que posteriormente podem ser observados, eis aí o poder da Física. Nessa linha de pensamento, devemos entender que às vezes podem existir novas observações que não podem ser explicadas, nesse caso o que acontece é uma mudança de paradigma, que pode consistir numa nova reformulação das leis da natureza para assim poder explicar os novos fenômenos. Portanto, diante de fenômenos que não podem ser explicados as leis físicas são modificadas (talvez algum outro novo princípio seja adicionado) e, como resultado, pode-se ter uma nova teoria mais abrangente, que predize um novo corpo de fenômenos antes não previstos. Assim, vemos que, não sendo muito rigorosos, a Física continua construindo e reconstruindo novas teorias, talvez num processo que nunca termine, garantindo o ofício da Física.

A relevância de conhecer a incompletude da Matemática e da Física: retomando reflexivamente a pergunta de pesquisa

Se compreendidos os TIG apenas pelo olhar do matemático ou do físico, pode ser que haja grande ênfase à compreensão da relevância do mesmo direcionada apenas à Matemática ou à Física. Esse direcionamento não seria estranho, tendo em vista que esses profissionais têm diante de si uma demonstração rigorosa que contém muitos significados lógicos e formais expressos matematicamente, tal como lhes foram apresentados em toda sua formação científica, e que, portanto, lhes saltam aos olhos, enlaçando-os pela riqueza do processo demonstrativo e pelas implicações matemáticas do mesmo.

No entanto, entende-se, e visa-se mostrar neste tópico a relevância dos TIG para os não-matemáticos e não-físicos, focando o ensino, para tecer compreensões sobre a pergunta norteadora deste estudo: quais possibilidades se abrem ao ensino e à aprendizagem de Matemática e Física, quando compreendida a incompletude das mesmas frente aos teoremas de Gödel? Esse direcionamento se faz possível por estarem a Matemática e a Física de Gödel intimamente relacionadas com sua postura filosófica e é a partir dela que suas contribuições a estas áreas podem transcender o movimento de cientificação dada pela formalidade da linguagem matemática, bem como pela visão operacional de fazer ciência. Por outro lado, tal discussão não aprofunda a face mais matemática dos TIG, o que se faz necessário ao intento de aproximá-los reflexivamente aos alunos e professores, fazendo-os acessíveis de outros modos, mediante pensar mais abrangente.

Mesmo não conhecendo profundamente a Matemática e a Física, os alunos (não-físicos e não-matemáticos) têm percepções, fazem interpretações do que é a Matemática e a Física e, como muitos estudos apontam, muitas impressões negativas atravessam as relações dessas pessoas com essas áreas, que em muitos casos as deixam atônitas diante de elementos que são tacitamente postos já impondo dificuldades antes mesmo que essas pessoas lancem um primeiro olhar interrogador.

Em Batistela (2017), entende-se que o olhar à demonstração de Gödel pode ser mais amplo, podendo estender sua relevância para outras áreas do conhecimento, para o campo do ensino e da aprendizagem, bem como para modos de compreensão de mundo. Para tanto, afasta-se um pouco da técnica matemática, faz-se uma pergunta, e, desse modo, abre-se possibilidade para que outras compreensões possam surgir, para além da lógica formal. Deste modo, os TIG não precisam ser vistos apenas como fatores que impõem barreiras a algumas pretensões matemáticas, mas, também, como oportunidade de uma mudança de direção, pensando em como lidar com os limites que os teoremas expõem, repensando o sistema produzido e em como ainda deixá-lo em funcionamento, ou, avançando em outros caminhos investigativos, cujas descobertas possam ser tão relevantes quanto o pretendido inicialmente.

Em muitas discussões não científicas, que produzem conhecimentos comumente compartilhados, entende-se, muitas vezes, a Matemática e a Física, especialmente a Matemática, como ciências acabadas, que já oferecem uma totalidade de conhecimentos com os quais se possa trabalhar, que por sua vez estão expressos em livros e manuais. No entanto, a história das ciências expõe o viés de pesquisa que as constitui e que as amplia. Na Física, por exemplo, há desenvolvimento teórico possível por atividades de experimentação, onde valem os processos dialéticos, junto aos quais uma compreensão pode se mostrar. Esta que, uma vez articulada, pode vir a ser apresentada como conhecimento físico. Desta forma, o mundo teórico das ciências exatas, desde o século XX, vem se desenvolvendo, e não há de se dizer de uma terminalidade desse desenvolvimento. Sendo este mundo teórico (como o da mecânica, por exemplo) também posto em linguagem matemática, de cálculos de predicados de primeira ordem, trazendo Gödel, compreende-se a sempre possibilidade de inclusão de novos axiomas, ou seja, novas fórmulas bem formadas verdadeiras, mas não demonstráveis.

Neste contexto, o conhecimento dos TIG pode mudar as configurações da inserção dessas ciências nos diferentes espaços sociais, dentre os quais o espaço escolar, mostrando que elas estão ainda em constituição, portanto não acabadas. As chamadas ciências exatas, dentre as quais a Matemática e a Física, historicamente sobressaíram com o crédito de produtoras de "verdades indiscutíveis". Esta é, também, uma produção sociocultural que, tradicionalmente, é levada às gerações. Com isso, enquanto para o matemático e para o físico, a Matemática e a Física atingem status de ciências exatas, e de ferramentas fundamentais à comunidade científica; para os não-matemáticos e não-físicos, elas podem ultrapassam limites técnicos, atingindo status, pode-se dizer quase "religioso". "O termo 'exata' associada a ela, para o 'leigo' pode suscitar uma ideia de perfeição e completude, o que inviabiliza qualquer possibilidade de crítica a seus resultados, cabendo apenas aceitação e certa submissão" (PINHEIRO; BATISTELA, 2021, p. 60).

O termo "exata" associado à Física e à Matemática, para o "leigo" suscita uma ideia de perfeição e completude, o que inviabiliza qualquer possibilidade de crítica a seus resultados, cabendo apenas aceitação e certa submissão (D'AMBRÓSIO, 2003). O conhecimento e compreensão dos TIG pode, em parte, mudar esta atitude de reverenciamento, tendo em vista que a representatividade muda, não compondo mais uma relação entre um sujeito incompleto (com defeitos, com problemas, dúvidas e carências) e ciências que reinam por serem elas perfeitas e completas aos olhos desse sujeito. A relação passa a ser do humano (ser que a cada instante está se constituindo) com conhecimentos que exatamente por serem produções humanas, também podem se transformar, sendo, portanto, também incompletos.

Compreende-se, aqui, a atuação de Gödel como referência àquele que queira ir à Matemática e à Física contrariando noções comumente compartilhadas; que é difícil, ou impossível, que são ciências perfeitas e completas. Em sua época, o que avançava e sobressaia no âmbito da comunidade matemática, eram as constatações da escola de Hilbert, cujo trabalho era dedicado a formalizar, sem contradições, toda a Matemática, buscando, silenciosamente, provas contrárias a essa meta. Subjaz a esse trabalho uma ideia de terminalidade, frustrada pela não demonstrabilidade do problema 2 de Hilbert (um dos 23 apresentados), que solicitava a prova da consistência da aritmética dos números inteiros não negativos, que, se demostrada, ter-se-ia a Matemática terminada enquanto ciência. Tal objetivo é distante da ideia de Gödel, que, supostamente, nesse caso, se apresenta aos seus contemporâneos como aquele que "'quebra a imagem' da Matemática, ou que não respeita as tradições e as concepções estabelecidas. A interpretação do próprio Gödel sobre os TIG é que a Matemática é inesgotável, sendo de se esperar que ela não se deixasse circunscrever em um sistema único e total" (BATISTELA, 2017, p. 205).

Esta interpretação, entende-se, influenciou a cultura matemática de uma época e tem suas implicações em tempos atuais. Assim como se defende a relevância da sociedade atual conhecer culturas antigas, estudar suas implicações para o que se tem hoje, defende-se neste texto, por meio da História da Matemática, que os professores de Matemática e de Física conheçam os TIG, o contexto de seu surgimento, bem como suas implicações. Entende-se a importância desse conhecimento por ser ele historicamente transformador, podendo, também, transformar modos de um professor compreender a Matemática e a Física, e, com isso, modos de ele ensinar conteúdos destas disciplinas.

Entende-se em Feferman (2006) que os TIG têm resultados especificamente no cerne da Matemática formal e não atinge diretamente nenhum conteúdo da Matemática e da Física escolar. Os indecidíveis não estão na escola. No entanto, entende-se que os TIG podem influenciar todos os níveis de ensino, quando pensado junto à figura do professor, pois sua contribuição pode ser não apenas teórica, mas também comportamental, influenciando no modo de ser professor. Entende-se que o professor, atento aos teoremas, e tomando-os numa concepção filosófica, pode atuar de modo a não "alimentar a ideia plasmada na concepção de soberania, tomando a Matemática como ciência da verdade absoluta, muitas vezes mitificada no meio acadêmico" (BATISTELA, 2018, p. 3).

Quando o ensino de Matemática e de Física se pauta na concepção hilbertiana de que não há problema bem colocado, que com o devido empenho matemático não tenha solução, lança-se sobre professores e alunos uma grande responsabilidade. Se para todos os referidos problemas há respostas, frustram-se todos que não as encontram, bem como o receio do insucesso nessa busca pode criar barreiras aparentemente intransponíveis, que muitas vezes impedem até o primeiro ato de busca das soluções. Nesse caso, o pensamento que subjaz à demonstração de que há sentenças matemáticas bem formuladas e verdadeiras que não podem formalmente serem expressas como tal, apresenta um novo modo de olhar, podendo, com ele, articular práticas de ensino, das mais simples às mais complexas, sem que o professor carregue sobre si o status de perfeição científica da Matemática e da Física, adquirida por herança e sem reflexão.

Da perspectiva do aluno, a relevância do conhecimento dos teoremas, mesmo que numa visão filosófica, se mostra importante, pois pode constituir uma "humanização" da Matemática e da Física, quando os teoremas as colocam na posição de conjunto de conhecimentos em constituição e, portanto, não fechadas ou completas, representando, desta forma, um modo de ser do aluno, que também é ser em transformação. Esta compreensão, entende-se aqui ser aproximativa, o que se mostra relevante em meio ao cenário que apresenta distanciamento entre alunos e ciências exatas, ao qual, por mais simples que seja, toda ação pedagógica ou filosófica de aproximação é relevante.

Com essa compreensão, relacionada ao professor de Matemática e de Física, sugere-se que os TIG sejam trabalhados nas Licenciaturas em Matemática e nas em Física, desde o primeiro período de curso, abordando inicialmente os conceitos de verdade e de demonstrabilidade, que atravessam toda a prova dos teoremas e que podem ser, a cada ano do curso, ampliados em termos de complexidade (BATISTELA, 2017).

Para além das ciências, os TIG podem ser compreendidos, em linha gerais, como modo de olhar o mundo e para nós mesmo enquanto seres que o habitam, estando o mundo, e nós, em um movimento incessante de transformação, não cabendo, portanto, uma síntese totalizante. Tendo isso como visão de mundo e de vivência, pode-se melhor pensar o agora, sem uma pré-ocupação em premeditar a totalidade do por vir, abdicando-se da plenitude desse agora vivenciado.

Essa compreensão de mundo frente aos TIG faz sempre presente a possibilidade de uma atualização e transformação, o que não implica dizer que o ser que está em transformação perde suas características fundamentais ou deixa de ser importante no contexto ao qual se insere. Esse pensamento é o mesmo direcionado à Matemática e à Física. Mesmo quase noventa anos depois da prova dos TIG, nem à época de sua demonstração, nem agora, elas deixaram de ser ciência (ou menos científicas) e não perderam credibilidade diante dos cientistas e da sociedade como um todo. Os TIG se apresentam aos matemáticos e físicos profissionais como esclarecimento para o poder de alcance de sua produção, expondo os contornos efetivos dos sistemas axiomáticos, o que não se caracteriza como impedimento à continuidade das produções matemáticas, nem aos modos como se realiza esta produção.

Retomando o dito e abrindo outras compreensões

Como explicitado neste texto, embora se possa entender o feito de Gödel como um golpe às pretensões da escola formalista de Hilbert, por outro lado, pode-se entender também como uma possibilidade de mudança e avanço, ao transmitir uma mensagem que, segundo D'Ambrósio (2003), é de revigoramento para a ciência Matemática e, portanto, para a Física.

Embora os TIG tenham imposto limites à fundamentação dos sistemas formais da Matemática, Gödel entende que uma fundamentação ainda possa existir, pois "a certeza da matemática não deve ser assegurada pela prova de certas propriedades na projeção à sistemas matérias – nomeadamente, a manipulação de símbolos da física – mas invés pelo cultivo (aprofundado) do conhecimento sobre os conceitos abstratos" (CASSOU-NOGUÈS, 2007, p. 331). Ao admitir a ainda viva possibilidade de fundamentação, Gödel mantém vivo também o exercício e a pesquisa matemática.

Uma interpretação à incompletude demonstrada por Gödel é: "qualquer coisa em que você pode desenhar um círculo ao redor não pode ser explicada por si mesma sem se referir a algo fora do círculo – algo que você tem que assumir, mas não pode provar" Num pensar filosófico, tal como o constituído pela Fenomenologia, "seria absurdo pensar a Matemática como o que contém, visto que nesta filosofia, isso, por si só, lhe imporia limites, dando-o caráter de totalidade, sem nada para além dela, não estando em constituição" (PINHEIRO, BATISTELA, 2021, p, 56) . Assim, fenomenologicamente, pode-se entender a Matemática como o que está contido, aquilo além do qual sempre há algo e, dessa forma, qualquer ato totalizante não imporá barreira, mas sim fronteira, podendo ser transposta mediando avanço do conhecimento humano.

Se existisse uma totalidade/terminalidade que, no seu definir, já estaria livre de contradições, a qual todas as construções se direcionam, e se ela fosse conhecida e compreendida, ter-se-ia a possibilidade de pré-determinar e antecipar o todo, visto que, a partir de um todo determinado e bem definido, poder-se-ia ter previamente a certeza de suas partes constituintes e a descrição de como se relacionam. O desejo desta certeza, o anseio por um domínio, marca o ideário e a busca das ciências europeias por abarcar a totalidade dos conhecimentos, conforme afirma Husserl (2012).

Gödel, também conhecido como matemático filósofo, faz atualizar-se a compreensão de muitos pensadores de que uma ação que busque por uma totalidade configura-se como um ir, um constante ir. No entanto, por ser este ato uma realização humana, há sempre um novo ponto de vista que nasce no âmbito da subjetividade e da intencionalidade, que faz da totalidade visada, nunca abarcada na totalidade de sua complexidade (HUSSERL, 2012). Dessa forma, o resultado da incompletude promove abertura, propõem novos olhares, novos problemas, mantendo vivo o ato criativo da pesquisa em Matemática e em Física e, com isso, ao ensino e à aprendizagem nessas áreas.

O olhar com o qual se inicia este tópico é o mesmo sobre o qual o tópico anterior propôs pensar o ensino e a aprendizagem de Matemática e Física (que também tem correlatos nas outras ciências), trata-se do olhar filosófico. Esse olhar permite transcender os teoremas enquanto provas matemáticas, avançando em leituras possíveis a partir das mesmas. Uma destas leituras é a possibilidade que os teoremas trazem à "humanização" do conhecimento científico, aparentemente inacessível aos não-cientistas. Ao se assumir que a Matemática e a Física não são ciências prontas e acabadas, que elas estão ainda em constituição, e que esta constituição se dá nas relações humanas, pode-se pensar o ato de conhecimento direcionado a estas ciências como ato que não tem por obrigação dar conta de uma totalidade.

Essa compreensão é relevante ao "chão" de sala de aula, pois pode ser interpretada como conscientização epistemológica sobre a constituição de conhecimento como processo, e, portanto, todo conhecimento é conhecimento, é relevante e significativo ao movimento de aprendizagem. Assim, algumas barreiras que se mostram em sala de aula, como o constrangimento ou como a sensação de inferioridade, podem ser atenuados, tendo em vista que o conhecimento de cada aluno, de cada professor, mesmo sendo uns mais apurados e amplos que outros, ainda são conhecimentos em desenvolvimento, cuja completude está num horizonte apenas visado. Nesse olhar, a Matemática e Física, embora não se negue aqui sua complexidade, podem se abrir aos alunos de modo mais convidativo, se fazendo mais próximas, se assumindo incompletas, ainda em constituição, assim como é cada olhar, cada ato de cada aluno que a elas se voltam, nos diferentes níveis de ensino.

Deste modo pode-se iniciar um diálogo entre não-cientistas e ciência, que há muito tempo vem se perdendo, mediante constante fuga do debate filosófico. Uma vez retomado este diálogo, trazendo como fundo a filosofia, tal como se faz neste texto, configura-se apenas um modo ou caminho possível, que consiste, também, em "decidirmos porque precisamos da ciência como feita atualmente para nos dizer qualquer coisa que seja, e que questões estão aí implicadas nas atividades de produção de conhecimento que vão além da competência dos sistemas lógicos, já limitados pelos resultados da incompletude de Gödel" (BARCO, 2011, p. 103).

Bibliografia

BARCO, A. P. A pertinência da crise nas ciências constatada por Husserl frente ao Teorema da Incompletude de Gödel. In: CONGRESSO DE FENOMENOLOGIA DA REGIÃO CENTRO-OESTE, 4, 2011, Goiás. **Atas...** Goiás: UFG, 2011. p. 97-104.

BATISTELA, R. F. **O Teorema da Incompletude de Gödel em cursos de licenciatura em Matemática**. 2017, 140 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) - Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2017.

BATISTELA, R. F.; BICUDO, M. A. V.; LAZARI, H. O Cenário do Surgimento e o Impacto do Teorema da Incompletude de Gödel na Matemática. **Jornal Internacional de Estudos em Educação Matemática**, v. 10, n. 3, p. 198-207, 2018.

CASSOU-NOGUÈS, P. **The Two-Sidedness and the Rationalistic Ideal of Formal Logic: Husserl And Gödel.** Dordrecht: Springer, 2007.

COHEN-TANNOUDJI C. et al., **Quantum Mechanics.** 2ed. Wiley-VCH, 2019.

D'ALKAINE C.V. Os trabalhos de Gödel e as denominadas ciências exatas: em homenagem ao centenário do nascimento de Kurt Gödel. **Revista Brasileira de Ensino de Física**, v. 28, n. 4, p. 525-530, 2006.

D'AMBRÓSIO, U. Um brasileiro no Congresso Internacional de Matemáticos de 1900. **Revista Brasileira de História da Matemática**, v. 3, n. 5, p. 131-139, 2003.

DA SILVA, J. J. **Filosofias da Matemática**. UNESP. São Paulo: 2007.

DA SILVA, J. J. O segundo problema de Hilbert. **Revista Brasileira de História da Matemática**, v. 3, n. 5, p. 29-37, 2003.

FEFERMAN, S. The Impact of the Incompleteness Theorems on Mathematics. **Notices American Mathematical Society**, v. 53, n. 4, p. 434-439, 2006.

HUSSERL, E. **A Crise das Ciências Europeias e a Fenomenologia Transcendental: uma introdução à filosofia fenomenológica**. Trad. Diogo Falcão Ferrer. 1. ed. Rio de Janeiro: Forense Universitária, 2012.

LAPLACE, P. S. **Probability.** In: HUTCHINS, M.A.; ADLER, M. J.; FADIMAN, C. Gateway to the great books. - Mathematics. Chicago: Encyclopaedia Britannica, 1990.

LEARY, C. C. A friendly introduction to mathematical logic. **Prentice Hall.** New Jersey: 2000.

MACHADO, N. J. **Matemática e realidade**: análise dos pressupostos filosóficos que fundamentam o ensino da matemática. 6. ed. Cortez. São Paulo: 2005.

MONDINI, F. O logicismo, o formalismo e o intuicionismo e seus diferentes modos de pensar a matemática. In: ENCONTRO BRASILEIRO DE ESTUDANTES DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 12, 2008, Rio de Janeiro. **Atas...** Rio Claro: PPGEM, 2008, p. 1-10.

NAGEL, E.; NEWMAN, J. R. **A Prova de Gödel**. Perspectiva. São Paulo: 1973.

PINHEIRO, J. M. L.; BATISTELA, R. F. A relevância de conhecer e compreender a incompletude da matemática: um olhar fenomenológico sobreo teorema da incompletude de Gödel. **Revista Paranaense de Educação Matemática**, v.10, n.21, p.44-63, 2021.

WANG, H. Some facts about Kurt Gödel. **J Symbolic Logic**, v. 46, n. 3, p. 653-659, 1981.

ZWIEBACH B**. A first course in string theory**, Cambridge University Press, 2009.

Recebido em 27 de fevereiro de 2020.
Aprovado em 02 de setembro de 2021.