Revista de Educação Matemática e Tecnológica Iberoamericana
Universidade Federal de Pernambuco
ISSN 2177-9309
Pós-Graduação em Educação Matemática e Tecnológica EDUMATEC

DESENVOLVENDO COMPREENSÃO MATEMÁTICA: RESÍDUOS DE UMA AULA BASEADA NA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

DEVELOPING MATH UNDERSTANDING: RESIDUES FROM A PROBLEM-SOLVING CLASS SUBTITLE

Dionei Cardozo
Mestre em Ensino de Ciências Naturais e Matemática
Universidade Regional de Blumenau – Santa Catarina – Brasil
dionei.cardozo95@gmail.com
https://orcid.org/0000-0003-0850-9664

Janaína Poffo Possamai
Pós-doutoranda em Ensino de Ciências
Doutora em Engenharia de Produção
Universidade Regional de Blumenau – Santa Catarina – Brasil
janainap@furb.br
https://orcid.org/0000-0003-3131-9316

Juliana Meneghelli
Mestre em Ensino de Ciências Naturais e Matemática
Universidade Regional de Blumenau – Santa Catarina – Brasil
juliana.meneghelli@hotmail.com
https://orcid.org/0000-0001-5308-8999

Resumo

Este artigo discute e orienta ações para o desenvolvimento de uma aula de matemática baseada na compreensão. São apresentadas as concepções teóricas de compreensão matemática e dos resíduos de aprendizagem, estruturadas pela metodologia de Resolução de Problemas. As questões que possibilitam obter tais resíduos, com foco no protagonismo do estudante, nem sempre são encontradas em livros didáticos, o que evidencia o papel do professor na estruturação ou modificação dessas questões com vistas a orientar os estudantes a aprender enquanto se faz Matemática. Nesse sentido, esse artigo tem como objetivo orientar a ação docente para a problematização da Matemática, discutindo como as questões presentes em livros didáticos e que têm potencial para possibilitar a construção de novos conhecimentos, podem ser reestruturadas ou abordadas na perspectiva de Resolução de Problemas com vistas a possibilitar a compreensão.

Palavras-Chave: Compreensão; Matemática; Resíduos; Resolução de Problemas.

Abstract

This article discusses and guides actions for the development of a mathematics class based on comprehension. The theoretical conceptions of mathematical comprehension and learning residues, structured by the Problem-Solving methodology, are presented. The questions that make it possible to obtain such residues, with a focus on student protagonism, are not always found in textbooks, which highlights the role of the teacher in structuring or modifying these questions to guide students to learn while doing mathematics. In this sense, this article aims to guide the teaching action for the problematization of mathematics, discussing how the questions present in textbooks which have potential to enable the construction of new knowledge, can be restructured or approached in the perspective of Problem Solving with understanding.

Keywords: Understanding; Mathematics; Residues; Problem-Solving.

https://doi.org/10.51359/2177-9309.2022.252983

INTRODUÇÃO

Os estudos e pesquisas referentes ao ensino da Matemática, sob a perspectiva da Resolução de Problemas, têm se intensificado nas últimas décadas, apontando sua utilização não apenas para apresentar as aplicações de um determinado conteúdo, mas principalmente como uma possibilidade para se aprender e fazer Matemática.

Diversos autores, ao longo dos últimos anos, como Davis (1992), Hiebert *et al*. (1997), Onuchic (1999), Van de Walle (2009, 2017), Allevato e Onuchic (2021), dentre outros, apontaram os benefícios e os procedimentos metodológicos necessários para se implementar uma prática de ensino na qual a construção de novos conhecimentos acontece enquanto o estudante resolve um problema matemático. Ensinar através da Resolução de Problemas, segundo Allevato e Onuchic (2021, p. 47) tem como "[...] premissa que a aprendizagem se realiza quando o aluno, ao confrontar suas concepções, constrói os conceitos pretendidos pelo professor".

Essa visão se diferencia do modelo tradicional de ensino (por instrução direta) no qual o professor tem o papel de apresentar e explicar todos os conteúdos aos estudantes, como um produto acabado que não requer novas problematizações ou questionamentos, sob uma única perspectiva de aprendizagem (aquela ensinada pelo professor). Assim, Hiebert *et al*. (1997) apontam que esse modelo tradicional não possibilita as melhores oportunidades para haver uma efetiva compreensão matemática: "Acreditamos que, se queremos que os estudantes compreendam a matemática, é mais útil pensar na compreensão como algo que resulta da resolução de problemas, em vez de algo que podemos ensinar diretamente" (p. 25, tradução nossa). Ademais, de acordo com Teixeira, Campos, Vasconcellos e Guimarães (2011), a grande diferença entre a matemática necessária na vida de um estudante e a matemática aprendida na escola, que geralmente visa privilegiar a memorização e a repetição, constitui-se como um dos grandes problemas concernentes ao ensino da matemática. “Nesse sentido, a resolução de problemas tem se mostrado uma das alternativas que podem contribuir para melhorar o processo de compreensão dos alunos” (TEIXEIRA *et al*., 2011, p. 248-249).

Tendo em vista esses aspectos, para que seja possível a construção de novos conhecimentos a partir da Resolução de Problemas, reitera-se a importância do desenvolvimento de problemas matemáticos, pelo professor, a fim de subsidiar essa prática, visto que “nessa metodologia, o problema é ponto de partida e orientação para a aprendizagem de novos conceitos e novos conteúdos matemáticos” (ALLEVATO; ONUCHIC, 2021, p. 51). Na visão de Van de Walle (2009), quando um estudante se depara com um problema, selecionado pelo professor, que desperte não apenas a sua curiosidade, mas que também possibilite gerar uma problematização a seu respeito, ele tende a se concentrar em seu próprio método de resolução e o que resulta desse processo são novas compreensões da Matemática presentes naquele problema.

> Enquanto os estudantes estão ativamente procurando relações, analisando padrões, descobrindo que métodos funcionam e quais não funcionam e justificando resultados ou avaliando e desafiando os raciocínios dos outros, eles estão necessária e favoravelmente se engajando em um pensamento reflexivo sobre as ideias envolvidas (VAN DE WALLE, 2009, p. 57).

Contudo, problemas matemáticos que possibilitem essa abordagem raramente estão presentes em livros didáticos, o que tende a dificultar o trabalho do professor quanto a sua utilização. De acordo com Diniz (2001), a maioria dos problemas encontrados nos livros didáticos estão centrados em enunciados que se constituem como sendo problemas convencionais que visam, em sua maioria, a aplicação de algoritmos ou fixação de técnicas ou regras. Essas atividades costumam apresentar algumas características em comum: as questões vêm sempre após a apresentação de determinado conteúdo, possuem parágrafos curtos, todos os dados necessários para resolução estão presentes no enunciado, costumam ser resolvidas pela simples aplicação de uma fórmula ou algoritmo, a solução numérica correta sempre existe e é única (DINIZ, 2001).

Apesar de essas atividades serem importantes para a aprendizagem matemática, elas não podem substituir a compreensão matemática, que tende a ocorrer durante uma prática de ensino através da Resolução de Problemas. Entretanto, mesmo que os livros didáticos não apresentem, em sua maioria, problemas matemáticos que possibilitem a construção de novos conhecimentos, o professor ainda tem a sua disposição algumas ações que lhe permita desenvolver ou adaptar questões provenientes dessas fontes. “O livro ainda pode ser usado como um recurso básico se você pensar em traduzir as unidades e lições para uma abordagem orientada para a resolução de problemas” (VAN DE WALLE, 2009, p. 68).

Apesar de haver diversas pesquisas que apresentam os benefícios da utilização dessa metodologia de ensino, percebe-se na literatura atual, a ausência de estudos focados essencialmente à elaboração ou adaptação dessas questões de modo a transformá-las em problemas desafiadores e que despertem a curiosidade e o interesse dos estudantes em resolvê-los. Face a essa situação, deseja-se com esse trabalho apresentar um suporte teórico que oriente e subsidie a ação docente com vistas à implementação da Resolução de Problemas em sala de aula, sob a perspectiva de se fazer e aprender Matemática com compreensão.

Assim, inicialmente faz-se uma discussão acerca das características necessárias para o desenvolvimento de um problema que possibilite a aprendizagem de novos conceitos, bem como as estratégias que o professor pode utilizar para possibilitar a problematização dessas atividades durante suas aulas. Além disso, também são apresentadas atividades com o intuito de discutir como é possível adaptar atividades presentes em livros didáticos de modo a torná-las o ponto de partida para a aprendizagem matemática.

COMPREENSÃO EM MATEMÁTICA

Os professores, ao ensinarem matemática, em geral, almejam que os estudantes entendam e compreendam a matemática, porém é necessário discutir o que é essa compreensão e quais as práticas docentes que a possibilitam.

Ensinar matemática por compreensão implica em permitir que os estudantes sejam o foco “[...] fornecendo evidências ou justificativas, encontrando ou criando exemplos, generalizando, analisando, fazendo previsões, aplicando conceitos, representando ideias em diferentes maneiras, articulando conexões ou relacionando um tópico dado com outras ideias.” (VAN DE WALLE, 2017, p. 6, tradução nossa). Essa concepção implica que o estudante avance além do saber, de conhecer informações, é mais do que ser capaz de seguir um procedimento ou utilizar um algoritmo.

O processo de ensino e de aprendizagem da matemática por compreensão requer que se crie uma cultura em sala de aula em que os estudantes possam aprender uns com os outros. Isso faz com que se dê atenção especial à como a matemática é ensinada e não apenas no que é ensinado. Segundo Van de Walle (2017), as características de uma aula em que se pretende promover a matemática por compreensão são:

- As ideias dos estudantes durante a resolução de um problema, que constituem o caminho de resolução, são o centro da explicação.
- A comunicação que ocorre quando o estudante justifica e argumenta sobre suas ideias matemáticas e questiona as ideias dos demais, precisa ser incentivada.
- Os erros precisam ser entendidos como oportunidades de aprendizagem, desenvolvendo um senso de confiança de que as ideias precisam ser compartilhadas, mesmo que estejam erradas, pois podem constituir uma fonte importante para conduzir à um caminho de solução.
- O professor precisa conduzir para uma problematização, ouvindo atentamente as discussões dos estudantes e fazendo perguntas criativas que ativem suas ideias, sem direcionar para respostas rotineiras como “sim, está certo” ou “não, está errado”.
- A matemática tem que fazer sentido aos estudantes, não sendo estendida como algo pronto e acabado, a aprendizagem precisa estar pautada na compreensão e não na simples repetição de regras e técnicas indicadas pelo professor.

Numa abordagem de ensino através da Resolução de Problemas, os estudantes constroem conhecimento matemático por compreensão, uma vez que, ao invés de resolverem exercícios rotineiros, argumentam, justificam e buscam caminhos para se chegar na solução. Nesse processo, cria-se uma conexão entre conhecimentos prévios e novos conceitos e procedimentos matemáticos. A ampliação da rede de ideias dos estudantes, resultado da estratégia de ensinar matemática através da resolução de um problema, se constitui como resíduo de aprendizagem, cuja concepção é discutida na sequência.

OS RESÍDUOS PROVENIENTES DA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

Davis (1992) em seu estudo intitulado *Understanding "Understanding"* apontou a importância de se iniciar o processo de aprendizagem matemática a partir de problemas, ao invés de ideias matemáticas que posteriormente são aplicadas ou exercitadas. Como exemplo, o autor cita que Fourier não desenvolveu as Séries de Fourier e depois decidiu aplicá-las ao estudo do fluxo de calor, ao contrário, ele se debruçou a partir de um problema e as Séries de Fourier foram um resultado da investigação proveniente da resolução daquela situação. É sob essa analogia que Davis (1992) utilizou o termo resíduos para designar as informações matemáticas importantes resultantes da Resolução de Problemas.

Em consonância à essa ideia, Hiebert *et al*. (1997) afirmam que além de considerar os resíduos provenientes de cada problema, o professor precisa desenvolver sequências de atividades que, com o passar do tempo, as experiências dos estudantes se somem aos resíduos provenientes de cada problema, possibilitando a construção e a compreensão dos aspectos relevantes de cada conteúdo. "Acreditamos que a seleção de sequências de tarefas deve ser guiada pela visão do professor sobre o que os alunos podem levar com eles ao longo do ano e como esses resíduos podem ser formados" (HIEBERT *et al*., 1997, p. 31, tradução nossa). Dito de outra maneira, um único problema não possibilita resíduos suficientes para a compreensão de todos os aspectos relevantes de um conteúdo, é por esse motivo que o professor deve selecionar uma sequência de atividades, tendo em mente quais resíduos relevantes devem resultar desse processo.

> A seleção de um conjunto coerente de tarefas fornece uma maneira de os professores aprovarem ou concretizarem sua visão sobre o que os estudantes podem aprender ao longo do ano. Estabelecer metas em termos de experiências dos estudantes e dos resíduos que podem ser deixados é uma maneira diferente de se pensar do que as concepções mais tradicionais de metas como listas de objetivos instrucionais (HIEBERT *et al*., 1997, p. 34, tradução nossa).

Entretanto, elaborar uma estrutura de ensino e aprendizagem baseada na Resolução de Problemas e na ideia de resíduos provenientes dessas atividades, pode gerar no professor alguns questionamentos ou inquietações, como por exemplo a seguinte dúvida: "Como vou dar conta de cobrir todo o conteúdo utilizando essa metodologia?". Van de Walle (2009) sugere ao professor que adote uma perspectiva ampla de unidade, na qual ele não deve focar em todos os aspectos de um mesmo conteúdo, mas sim nas ideias importantes e nos conceitos principais de cada lição. Segundo o autor, a Matemática é muito mais conectada e integrada do que a divisão de conteúdos usualmente vista nos livros didáticos e, por isso, ao abordar os aspectos principais de um conteúdo, de maneira implícita, os demais tópicos também acabam sendo desenvolvidos ao longo das atividades. Ademais, quando o professor assume uma perspectiva de ensino que privilegia a divisão de um tema a partir de diversos tópicos, tal segmentação pode prejudicar o desenvolvimento da compreensão das grandes ideias envolvidas: “Se você focar separadamente cada item na lista, então as grandes ideias e conexões e a essência da compreensão provavelmente não serão desenvolvidas” (VAN DE WALLE, 2009, p. 76).

De acordo com Hiebert *et al*. (1997) não é possível criar uma lista contendo todos os resíduos que são importantes a serem desenvolvidos para cada conteúdo, tal seleção depende de uma série de fatores que perpassam pelo currículo adotado, pelas concepções prévias dos estudantes, pelos objetivos estabelecidos pelo professor, dentre outros. Porém, o referido autor afirma que é possível identificar dois tipos de resíduos que são essenciais de modo a orientar a seleção e elaboração de problemas com essas características. Um tipo refere-se as percepções sobre a estrutura da Matemática envolvida e o segundo são as próprias estratégias ou métodos para resolver problemas.

Na visão de Hiebert *et al*. (1997), atividades que incentivam a busca por padrões ou relações durante uma prática de Resolução de Problemas são as que possibilitam maiores oportunidades para o estudante compreender aspectos lógicos-estruturais da Matemática:

> As tarefas que provavelmente focalizam a atenção dos estudantes em relações matemáticas são tarefas como: desenvolver vários métodos diferentes para resolver 28×17 e discutir a eficiência desses métodos; descobrir quantos triângulos podem ser desenhados dentro de um retângulo, pentágono, hexágono e assim por diante, usando os vértices do polígono e procurando um padrão; decidir se é possível encontrar uma fração entre duas frações e explicar por que ou por que não. Tarefas como essas oferecem oportunidades para os estudantes compreenderem os sistemas matemáticos e descobrirem como eles funcionam. Em geral, as tarefas que os incentivem a refletir sobre as relações matemáticas, provavelmente deixam percepções sobre as suas estruturas (HIEBERT *et al*., 1997, p. 23, tradução nossa).

Já os resíduos que competem aos métodos de resolução de problemas, Hiebert *et al*. (1997) descrevem que podem ser divididos em outros dois tipos. O primeiro refere-se a técnicas específicas para resolver determinados tipos de problemas. De modo a ilustrar essa questão, o autor apresenta a situação de propor a estudantes que ainda não aprenderam operações envolvendo números decimais, a resolução da soma $1,34 + 2,5$. Segundo o autor, após os estudantes terem encontrado um raciocínio próprio de resolução, esse poderia constituir um ponto de partida para o desenvolvimento de técnicas para resolução de outras atividades no futuro. Nessa perspectiva, um raciocínio poderoso se constitui quando há uma generalização do processo, ou seja, quando os padrões de resolução construídos pelos estudantes não se restringem a uma particularidade do problema em questão.

Já o segundo tipo de resíduo é ainda mais importante que o primeiro: conforme os estudantes avançam em seus próprios métodos de resolução, eles desenvolvem abordagens gerais que lhes propiciam a criação de procedimentos específicos para adaptar aqueles que eles já conhecem de modo a lhes serem úteis para novos problemas. Esse resíduo é importante pois, conforme apontam Hiebert *et al*. (1997, p. 24, tradução nossa): "[...] ele permite que os estudantes resolvam uma variedade de problemas sem precisar memorizar procedimentos diferentes para cada novo tipo de problema".

Todos esses apontamentos evidenciam a importância que os resíduos possuem para as práticas de Resolução de Problemas. Em síntese, é necessário que, durante a seleção de tarefas, o professor reflita a respeito de quais resíduos são importantes de serem construídos para cada tema e quais problemas possibilitam atingir esses objetivos. A conexão entre os conhecimentos prévios e os resíduos se constitui na prática de fazer enquanto se aprende Matemática por compreensão. Não basta que o problema seja apenas atrativo ou interessante ao estudante, ele precisa estar acompanhado de novas compreensões acerca da Matemática envolvida.

PROBLEMAS MATEMÁTICOS

Conforme discutido anteriormente, encontrar problemas já construídos que permitem a troca de ideias por meio da reflexão e comunicação, despertem a curiosidade para sua resolução, propiciem o desenvolvimento de um senso investigativo perante a Matemática e ainda assim promovem resíduos importantes que propiciam a construção de novos conhecimentos, não é uma tarefa fácil a ser realizada. É possível afirmar que, na maioria das vezes, é o professor quem deve elaborar esse tipo de atividade e diante disso, espera-se, a seguir, promover uma reflexão teórica com vistas a orientar e nortear esse processo.

Como primeiro aspecto, é preciso estabelecer qual a concepção de problema que está sendo utilizada nesse estudo. Diversos autores já propuseram definições com o intuito de estabelecer um cenário que delimite as características que faz uma atividade matemática constituir-se um problema a quem irá resolvê-lo. Por mais que não exista um consenso sobre qual a melhor definição, é possível afirmar que muitas delas compactuam de algumas ideias semelhantes. A perspectiva de problema adotada nesse trabalho é aquela proposta por Vila e Callejo (2006, p. 27):

> Reservaremos, pois, o termo problema para designar uma situação, proposta com finalidade educativa, que propõe uma questão matemática cujo método de solução não é imediatamente acessível ao aluno/resolvedor ou ao grupo de alunos que tenta resolvê-la, porque não dispõe de um algoritmo que relaciona os dados e a incógnita ou de um processo que identifique automaticamente os dados com a conclusão e, portanto, deverá buscar, investigar, estabelecer relações e envolver suas emoções para enfrentar uma situação nova.

Nessa visão, para uma questão ser considerada um problema, a premissa principal é que o estudante não deve possuir, inicialmente, um método de resolução ou algoritmo que lhe permita resolver instantaneamente o que foi proposto. A busca desse método é fator preponderante para um processo reflexivo que possibilite o desenvolvimento de resíduos e posterior construção de novos conhecimentos.

Segundo Hiebert *et al*. (1997) a reflexão e a comunicação são os processos pelos quais a compreensão matemática é desenvolvida, o que implica que o professor precisa ter em mente esses dois princípios ao elaborar suas atividades. A reflexão demanda a transformação da informação, por meio da ressignificação mental, procurando relacioná-la com os conhecimentos prévios já desenvolvidos. A reflexão não acontece instantaneamente. Já a comunicação, envolve falar e ouvir, significa compartilhar o seu método e responder aos questionamentos dos colegas a fim de possibilitar que todos compreendam o raciocínio e reflexões desenvolvidas (HIEBERT *et al*., 1997). Essa última perspectiva é também citada por Cândido (2001, p. 15): “Se os alunos forem encorajados a se comunicar matematicamente com seus colegas, com o professor ou com os pais, eles terão oportunidade para explorar, organizar e conectar seus pensamentos, novos conhecimentos de diferentes pontos de vista sobre um mesmo assunto”. Desse modo, um problema matemático deve propiciar um ambiente de imersão, que permita o debate de ideias e uma ressignificação constante.

Para que os problemas possam incentivar, tanto a comunicação quanto a reflexão, são necessários que eles sejam acessíveis para todos os estudantes, de tal forma que, cada um, à sua maneira, possa contribuir na resolução e construção do conhecimento. Problemas acessíveis podem ser obtidos quando não se delimitam a um único método de resolução. Assim, Van de Walle (2009) afirma que se deve abandonar a ideia de que só existe um único método para resolver um problema e mesmo que essas questões apresentem uma única solução correta, elas devem possibilitar múltiplos pontos de partida. Tais questões, segundo o autor, não são difíceis de serem criadas ou adaptadas. Para alguns problemas, nem mesmo o enunciado precisa ser modificado, mas a adaptação refere-se à abordagem do professor.

De maneira semelhante, outra opção a ser utilizada pelo professor são os problemas considerados abertos, tal como é apontado por Clement e Terrazan (2011, p. 91) quando afirmam que esses problemas podem estimular "[...] os alunos a levantarem as 'variáveis' envolvidas, os parâmetros relevantes e as possibilidades de resolução, exigindo, assim, uma mobilização dos conhecimentos necessários para o encaminhamento do processo de resolução". Esses tipos de problemas oferecem a oportunidade de cada estudante atuar reflexivamente diante da questão, sem ser induzido a obter uma resposta baseada em um único método ou algoritmo que promovam apenas a replicação de ideias, sem construção de novos conceitos.

Até mesmo simples exercícios que buscam explorar a mecanização de técnicas operatórias podem, na medida do possível, serem reestruturados de modo a propiciarem uma maior problematização sobre uma determinada ideia. Considere, por exemplo, a situação em que um professor busca ilustrar a existência de polinômios nulos e, para tanto, propõe o seguinte exercício para os estudantes: "Seja $P(x) = -2x + 3 - 4x^2$ e $Q(x) = 4x^2 + 2x - 3$, qual o valor de $P(x) + Q(x)$?". Essa questão, tal como aqui proposta, não incentiva uma problematização a seu respeito, nem possibilita múltiplos caminhos de solução, visto que ela já induz a operação matemática a ser efetuada (soma de polinômios).

Ademais, quando o professor propõe uma questão como essa, com polinômios que possuem os mesmos coeficientes, mas com sinais opostos, fica claro que ele deseja abordar a existência do polinômio nulo, contudo, durante a resolução, o estudante não está resolvendo o problema com foco na compreensão dessa ideia, mas sim no algoritmo de adição de polinômios, visto que o enunciado direciona a sua atenção para a operação soma e não à problematização do conceito a ser desenvolvido.

É importante ressaltar que não se deseja abolir essas questões das aulas de Matemática, ao contrário, elas têm um papel importante a desempenhar, contudo, não podem constituir como única ferramenta de ensino do professor. É preciso haver também as questões que propiciem a problematização matemática. Nesse caso, o professor poderia efetuar a seguinte adaptação: "É possível encontrar dois polinômios que ao serem somados resultem em um polinômio identicamente nulo? Caso afirmativo, apresente alguns exemplos que ilustrem esse processo". Essa questão pode, inclusive, ser proposta antes mesmo de ter sido apresentado aos estudantes o conceito de polinômio identicamente nulo. A partir da troca de ideias e problematização é possível construir esse conceito durante a resolução da atividade. Além disso, esse problema não delimita o raciocínio dos estudantes a um único modo de pensar, nem pressupõe uma única resposta correta. Por fim, essa questão concentra o foco e atenção para o conteúdo a ser desenvolvido (polinômio nulo), que constitui o resíduo proveniente da resolução, e não às técnicas operatórias envolvidas (soma de polinômios), por mais que essas também serão utilizadas durante a resolução.

Na estruturação de uma aula por compreensão, baseada na construção da matemática por meio de resíduos provenientes da resolução de problemas, ao professor cabe pensar em atividades a partir de uma visão do que é provável que aconteça na mente dos estudantes enquanto estes estão resolvendo-as, uma vez que "Boas tarefas são atividades '*minds-on*' (ativadoras de mentes) e não apenas '*hands-on*' (ativadoras de mãos)" (VAN DE WALLE, 2009, p. 73, grifo do autor). Na sequência é discutido como elaborar problemas e como problematizar uma atividade.

COMO ELABORAR ATIVIDADES ATIVADORAS DE MENTES

Um problema matemático se torna uma atividade de compreensão quando a abordagem se dá centrada no estudante. Nessa perspectiva, Van de Walle (2009) aponta que os problemas devem começar pelas suas ideias, de modo que não sejam triviais, mas também não estejam longe do alcance de resolução. Além disso, é desejável que se façam relações com outras áreas do conhecimento e aplicações do mundo real, contudo esses aspectos não devem desviar a atenção da matemática envolvida. Na resolução, o mais importante é a justificativa, a argumentação das decisões para os caminhos de resolução e não apenas o indicativo de certo ou errado, sendo importante que o estudante seja capaz de verificar se uma resposta é válida e ao mesmo tempo indicar a razão de estar correta.

A seguir, em um processo de síntese, são listadas as ideias de Van de Walle (2009), que têm a finalidade de orientar a ação docente, tanto para organização quanto aplicação de problemas matemáticos:

- Analise os conhecimentos prévios – se necessário, elabore questões iniciais que tragam as ideias necessárias à tarefa para o nível consciente dos alunos;
- Procure problemas que possibilitem diferentes caminhos de solução ou problemas abertos;
- Os problemas devem promover a necessidade de alguma exploração e investigação, devem possibilitar a construção de um processo de busca de padrões e de generalização, para que não se esvazie a resolução num processo de acerto e erro;
- O que você quer que os estudantes aprendam de novo? – Deve haver um resíduo, um novo conhecimento resultante da Resolução do Problema;
- Problematize a atividade – se necessário, divida o problema em subquestões que possibilitem a reflexão, exploração, busca de padrões, validação dos resultados;
- Deixe claro o que você espera dos estudantes na descrição da resolução.

O planejamento e a seleção de tarefas podem requerer ou uma mudança de abordagem ou uma reestruturação e problematização da atividade, de modo a promover um ambiente de Resolução de Problemas.

Nos livros didáticos é comum as atividades serem direcionadas para seguir o modelo "explicar-então-praticar", ou seja, o professor explica um algoritmo ou caminho de solução e os estudantes resolvem todos da mesma forma e ficam condicionados a resolver questões semelhantes sempre de uma forma padrão (VAN DE WALLE, 2017). A Figura 1 apresenta uma questão com essa organização.

Figura 1 – Exemplo de abordagem de resolução de exercícios envolvendo porcentagem

Carlos recebia um salário de R$ 800,00 e ganhou um aumento de 12%. Qual passou a ser seu salário?

Resolução

Para responder, primeiramente calculamos o aumento, ou seja, 12% de R$ 800,00.

Esquema

$$\begin{array}{rccl} & 100\% & \longrightarrow & 800 \\ \div 100 & \downarrow & & \downarrow \ \div 100 \\ & 1\% & \longrightarrow & 8 \\ \times 12 & \downarrow & & \downarrow \ \times 12 \\ & 12\% & \longrightarrow & 96 \end{array}$$

Cálculos

$800 \div 100 = 8$

$12 \times 8 = 96$

Depois, calculamos o salário final: $800 + 96 = 896$

Portanto, o salário de Carlos passou a ser R$ 896,00.

Fonte: Imenes e Lellis (2009, p. 128).

Nesse tipo de aula os estudantes são propensos a usar o mesmo método para calcular a porcentagem, ou seja, seguem o modelo de dividir por 100 para obter 1% e então multiplicar para alcançar o valor desejado. Por exemplo, os estudantes tenderão a calcular 50% de 800 pelo processo padrão de dividir 800 por 100 e então multiplicar por 50. Assim, o foco da atividade se restringe a um processo de divisão e multiplicação, deixando de se pensar sobre o significado de porcentagem e de produzir estratégias mais eficientes de resolução, como no exemplo em que 50% indicam a metade do valor e bastaria dividir por 2.

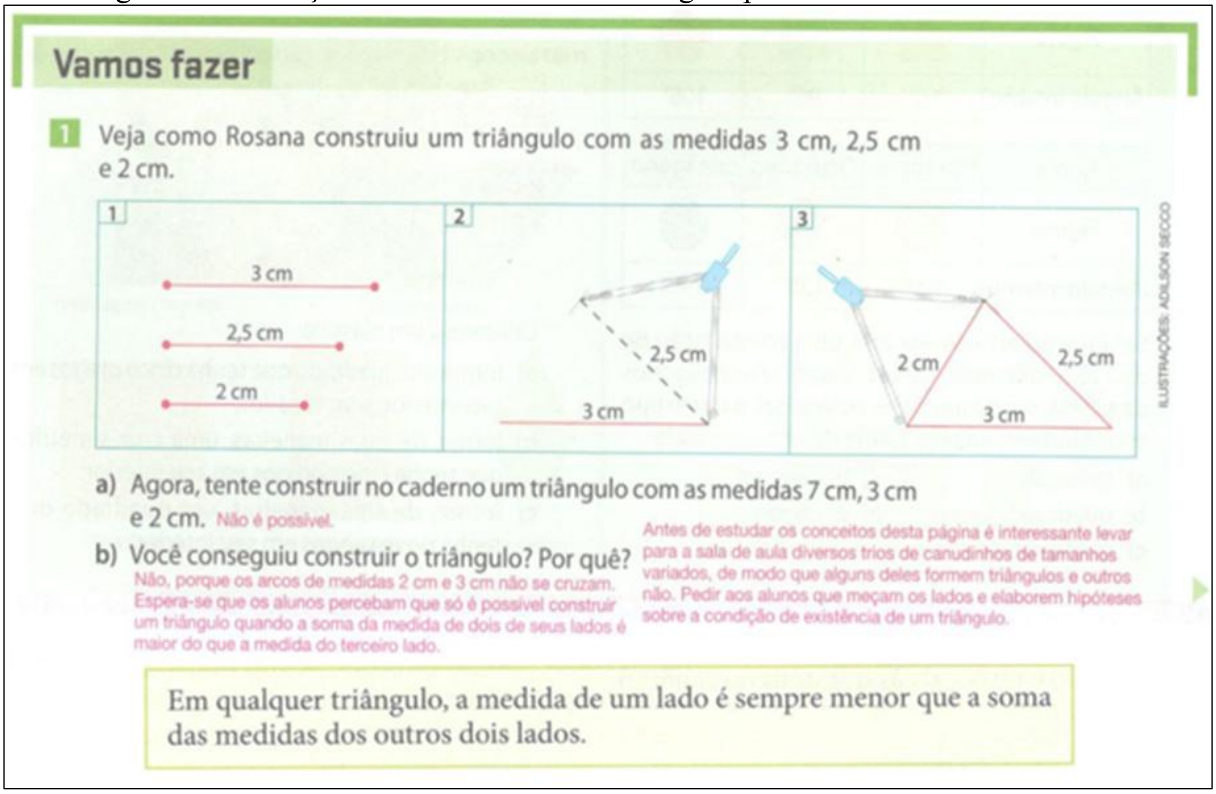
Essa atividade em uma aula baseada na compreensão da Matemática, não requer uma reestruturação ou reescrita do problema, mas sim, apenas uma mudança na abordagem do professor possibilitando que se caminhe para um ambiente de Resolução de Problemas. Ao invés de propor uma resolução, o professor pode deixar que os estudantes olhem os números da questão e busquem relações entre eles, desenvolvendo estratégias diferentes de resolução. Nessa aula, o conceito de porcentagem já precisa ser conhecido pelos estudantes, enquanto o cálculo da porcentagem de um número é o resíduo pretendido.

Nesse tipo de abordagem, o professor precisa atuar ouvindo atentamente, o que implica em fazer perguntas. Van de Walle (2009, p. 65) sugere quatro perguntas que indicam o interesse do professor pelas ideias dos estudantes: "O que você acha que o problema está perguntando? Que ideias você já tentou até agora? Você tem alguma ideia sobre qual deve ser a resposta? Por que você pensa assim?".

Se um estudante se mostra inseguro e lhe falta confiança para começar a resolver o problema, o professor pode sugerir que tentem representar com figuras ou tabelas suas ideias, ou ainda pode indicar que experimentem um problema mais simples da mesma questão (Van de Walle, 2009). Na situação da Figura 1, o professor pode propor, ao estudante com dificuldade para iniciar, que desenhe o significado de 12% ou que verifique como obter 10% de 100. Nesse sentido observe que "essas sugestões não são diretivas [receitas], mas funcionam como pontos de partida e disparadoras de ideias" (VAN DE WALLE, 2009, p. 65).

Algumas atividades presentes em livros didáticos, são abordadas como conhecimento pronto e acabado, mas com potencial para serem reestruturadas e possibilitar a construção dos conceitos como resíduos da resolução do problema. A Figura 2 ilustra como é abordada a condição de existência de um triângulo em alguns livros didáticos.

Figura 2 – Condição de existência de um triângulo presente em um livro didático


Vamos fazer

1 Veja como Rosana construiu um triângulo com as medidas 3 cm, 2,5 cm e 2 cm.

a) Agora, tente construir no caderno um triângulo com as medidas 7 cm, 3 cm e 2 cm. Não é possível.

b) Você conseguiu construir o triângulo? Por quê? Não, porque os arcos de medidas 2 cm e 3 cm não se cruzam. Espera-se que os alunos percebam que só é possível construir um triângulo quando a soma da medida de dois de seus lados é maior do que a medida do terceiro lado.

Antes de estudar os conceitos desta página é interessante levar para a sala de aula diversos trios de canudinhos de tamanhos variados, de modo que alguns deles formem triângulos e outros não. Pedir aos alunos que meçam os lados e elaborem hipóteses sobre a condição de existência de um triângulo.

Em qualquer triângulo, a medida de um lado é sempre menor que a soma das medidas dos outros dois lados.

Fonte: Moderna (2010, p. 70-71).

Apesar de inicialmente haver uma pequena problematização a respeito do conhecimento envolvido, essa abordagem ainda privilegia a transmissão de ideias prontas, sem levar os próprios estudantes a desenvolverem a sua compreensão. Para reestruturação dessa atividade, sugere-se entregar aos estudantes palitos de churrasco com diferentes medidas e solicitar que construam triângulos, procurando um padrão que indique quais as condições para que seja possível obter um triângulo. Sugere-se que sejam entregues palitos de

2, 4, 5 e 8 cm. É importante dizer a eles o que se espera dessa exploração, indicando que eles estabeleçam um critério com base na medida dos palitos (que representam os lados dos triângulos). Assim, um possível problema a ser apresentado aos estudantes está presente no Quadro 1:

Quadro 1 – Questão sugerida para abordagem da condição de existência de um triângulo

Faça testes com os palitos recebidos, desenhando todos os possíveis triângulos que podem ser construídos com essas medidas. Qual a condição para que três palitos possam formar um triângulo?

Fonte: Elaborado pelos autores.

Também é importante criar questões secundárias que orientem o processo de problematização da atividade, instigando os estudantes na busca de padrões, na validação de suas ideias e na justificativa da solução, evitando que a resolução seja reduzida a um processo de tentativa e erro ou apenas a uma pesquisa na internet ou livros. Sugere-se que além do enunciado principal, indicado no Quadro 1, também sejam propostas as questões apresentadas no Quadro 2:

Quadro 2 – Questões secundárias com vistas a promover a compreensão

a) Descreva o que você fez para chegar à condição para construir um triângulo.
b) Teste suas ideias. Utilizando um ou mais palitos de churrasco, construa três lados para os quais você acredita que seja possível construir um triângulo e o construa. Verifique se ele atende ao critério estabelecido por você.
c) Utilizando a, b e c para indicar as medidas dos lados de um triângulo, escreva uma relação matemática que represente a condição descrita por você.

Fonte: Elaborado pelos autores.

Nessa atividade é importante que o professor tenha consciência que os estudantes poderão estabelecer padrões sem usar a nomenclatura indicada nos livros didáticos, porém os termos adequados devem ser introduzidos pelo professor apenas quando for verificado que houve a compreensão e que as ideias estão estruturadas.

> As convenções sociais de simbolismo e de terminologia (nomenclatura) importantes em matemática nunca serão desenvolvidas por pensamento reflexivo. [...] O importante é oferecer esses símbolos e palavras apenas quando os alunos precisarem deles ou os acharem úteis. Como uma regra geral, o simbolismo e a terminologia só devem ser introduzidos depois de os conceitos serem desenvolvidos, como um meio de expressar ou nomear ideias. Eles raramente devem ser apresentados de início ou como coisas a serem memorizadas (VAN DE WALLE, 2009, p. 75-76).

Nesse tipo de abordagem é importante que o professor acredite que os estudantes são capazes de produzir e fazer matemática, deixando explorar suas ideias e incentivando que as compartilhem com os colegas. Uma marca de que existe compreensão é de que o estudante é capaz de justificar se uma solução é correta e porque é correta.

RELATO DE ALGUMAS PRÁTICAS DESENVOLVIDAS

Cabe ressaltar que algumas pesquisas já foram realizadas, com base nas discussões apresentadas neste artigo, e aplicadas com estudantes da Educação Básica e Ensino Superior.

Na pesquisa de mestrado de Cardozo (2018) foi desenvolvida e utilizada com estudantes da 1ª série do Ensino Médio uma sequência didática composta organizada em três sessões.

A primeira seção, intitulada "Introdução ao conceito e identificação da representação gráfica" tem como objetivo apresentar aos estudantes problemas que possibilitem, durante a sua resolução, a construção do conceito da Função Exponencial, bem como a identificação do gráfico correspondente a essa função.

A segunda seção "Estruturação da função a partir de um conjunto de dados", busca a exploração das diversas representações algébricas que as funções exponenciais podem assumir.

Por fim, a terceira seção, chamada de "Experimentação e consolidação dos conceitos" é composta por duas atividades de caráter experimental que possibilitarão aos estudantes a construção de um modelo matemático que representa situações do mundo físico em que os dados serão coletados por eles. Ressalta-se que algumas dessas atividades, têm como suporte o software GeoGebra ou Microsoft Excel para manipulação gráfica das funções envolvidas.

Com essa sequência de atividades foi possível desenvolver resíduos a cada problema que culminaram no desenvolvimento dos objetos de conhecimento relacionados com função exponencial.

Na pesquisa de mestrado de Meneghelli (2018) foi desenvolvida uma sequência didática, organizada em “3 momentos”, que foi utilizada com estudantes da 2ª série do Ensino Médio, visando a construção de resíduos que culminam na construção de aprendizagens relativas à função seno e cosseno.

O Momento 01, denominado de Movimentos Cíclicos, envolveu construções utilizando o software GeoGebra, com o intuito de promover um ambiente dinâmico no qual as constantes são tratadas como parâmetros, podendo ser modificadas e as hipóteses testadas na busca de padrões e relações que permitam definir as funções seno e cosseno, relacionando a lei de formação, parâmetros gráficos e suas principais características.

Esse tipo de manipulação no GeoGebra para funções seno e cosseno é verificada em outros trabalhos (OLIVEIRA, 2010; PEDROSO, 2012; LOPES JUNIOR, 2013), porém o diferencial dessa proposta está em problematizar a manipulação da construção no GeoGebra, norteando para um pensamento reflexivo de modo que os estudantes aprendam os conceitos enquanto buscam padrões.

> O pensamento reflexivo certamente envolve alguma forma de atividade mental. É um esforço ativo e não uma atitude passiva. Envolve tentar compreender algo ou conectar ideias que pareçam estar relacionadas. Ocorre quando os estudantes tentam dar sentido às explicações de outros, quando eles fazem perguntas, e quando eles apresentam explicações ou justificam suas próprias ideias (VAN DE WALLE, 2009, p. 49).

No Momento 02, denominado de Modelagem, a partir da coleta, análise e investigação de dados, são construídas as leis de formação que descrevem o comportamento periódico de três situações do mundo real (ondas de marés, duração do dia e temperatura do ar). Pretende-se que os estudantes construam procedimentos, a partir da disposição dos pontos do gráfico, para determinar os parâmetros da lei de formação que permitem ajustar o fenômeno à uma função.

Nessas atividades têm-se como objetivo que os estudantes reconheçam pela disposição dos pontos que se trata de uma função seno ou cosseno e que identifiquem qual parâmetro deve ser inserido para ajustar à função aos pontos, sendo que a determinação do valor desses parâmetros seja o novo resíduo a ser construído como resultado dos problemas propostos.

No Momento 03, denominado de Analisando Situações, o período, amplitude da curva, domínio e conjunto-imagem são determinados tanto a partir da lei de formação, quanto do gráfico da função, o que possibilita verificar a compreensão dos conceitos e procedimentos construídos nas atividades anteriores. O que se pretende como novo resíduo é que os estudantes consigam dar significado aos parâmetros no contexto de uma situação, bem como que associem a medida de um ângulo também a variável dependente

Também, resultados no Ensino Superior foram apresentados por Cardozo, Possamai e Meneghelli (2020) ao abordar o resíduo proporcionalidade na disciplina de Matemática Básica no curso de Administração, utilizando a Resolução de Problemas.

Essas práticas que foram desenvolvidas, utilizadas com turmas de estudantes e analisadas em pesquisas, foram norteadas pela Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas (ALLEVATO; ONUCHIC, 2021) no qual os problemas são o ponto de partida e orientação para as aprendizagens desenvolvidas.

Nessa metodologia, os resíduos construídos pelos estudantes que resolvem os problemas em momentos de trabalho individual, em pequenos grupos e em plenária com a turma, são formalizados pelo professor quando a compreensão matemática tenha sido desenvolvida pelos estudantes.

Por fim, é importante ressaltar que, sob orientação da segunda autora deste artigo, a dissertação de Fernandes (2020) desenvolve resíduos relacionados com Geometria Espacial, com uma sequência didática desenvolvida e aplicada com estudantes da 3ª série do Ensino Médio; a dissertação Poffo (2021) trata do Letramento Estatístico construído com crianças do 1º ano Ensino Fundamental; na dissertação de Stein (2021) se desenvolveu e utilizou com estudantes do 6º ano, uma sequência didática com a construção de resíduos relacionados com frações; a dissertação de Bertotti Junior, trata da construção de resíduos relacionados com Integração Numérica, por meio de uma sequência didática utilizada com estudantes de Cálculo Numérico de cursos de Engenharia. Todas essas pesquisas desenvolveram a construção de resíduos a partir da Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Diante da discussão realizada, pode-se verificar que o planejamento de uma aula baseada na Resolução de Problemas, depende mais da abordagem do professor do que do próprio problema. Pode-se ter uma questão que tem potencial para ser tratada como um problema, mas se o professor orientar a aula para um processo de instrução direta, os estudantes resolverão a questão com base na repetição dos mecanismos apresentados pelo professor.

Salienta-se a importância de se ter mente três pontos na estruturação de uma aula baseada na Resolução de Problemas: o estudante é o centro do processo e a aprendizagem prioriza a compreensão da Matemática; as ideias dos estudantes precisam estruturadas, orientadas para a justificação e discussão com os colegas; a solução do problema deve resultar em um novo conhecimento que se constitui como um resíduo de aprendizagem.

Esse tipo de metodologia de ensino, implica na necessidade de dispor mais tempo na execução da aula planejada para uma lição, em relação à uma aula tradicional, no qual o professor explica o conteúdo e o estudante resolve listas de exercícios. Van de Walle (2009, p. 76) enfatiza que passamos muito tempo com aulas de revisão de conteúdos, visto que os estudantes não têm compreendido significativamente as ideias, e afirma que "o tempo gasto para ajudá-los a desenvolver redes significativas de ideias reduz drasticamente a necessidade de reensinar e de recuperação, criando, assim, tempo a longo prazo".

Com a aprendizagem norteada pela Resolução de Problemas, em especial com a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas, os estudantes têm a oportunidade de estudar a Matemática de forma investigativa, exploratória e com significado, deixando de entendê-la como um conjunto absoluto e rígido de técnicas ou regras que precisam ser memorizadas. Assim, a Matemática é reconhecida como uma ciência de padrões e não apenas como um conjunto de regras sobre números.

REFERÊNCIAS

ALLEVATO, N. S. G; ONUCHIC, L. R. Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática: Por que através da Resolução de Problemas? *I*n: ONUCHIC, L. R. *et. al*. (org*)* **Resolução de Problemas: teoria e prática.** E-book. 2 ed. Jundiaí: Paco, 2021. p. 37-57.

BERTOTTI JUNIOR, V. I. **A resolução de problemas como proposta de abordagem do conteúdo de integração numérica em aulas de cálculo numérico na educação superior**: uma prática educativa realizada em contexto de ensino remoto. 2021. 258 f., il. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências Naturais e Matemática) - Programa de Pós-Graduação em

Ensino de Ciências Naturais e Matemática, Universidade Regional de Blumenau, Blumenau, 2021. Disponível em: http://www.bc.furb.br/docs/DS/2021/367905_1_1.pdf. Acesso em: 25 abr. 2022.

CÂNDIDO, P. T. Comunicação em Matemática. *In*: SMOLE, K. S.; DINIZ, M. I. (org.). **Ler, escrever e resolver problemas: Habilidades básicas para aprender matemática.** Porto Alegre: Artmed, 2001, p. 15-28.

CARDOZO, D. **Do átomo de carbono às grandes populações**: o ensino de funções exponenciais sob a perspectiva da resolução de problemas. 2018. 158 f., il. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências Naturais e Matemática) - Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências Naturais e Matemática, Universidade Regional de Blumenau, Blumenau, 2018. Disponível em: http://www.bc.furb.br/docs/DS/2018/365229_1_1.pdf. Acesso em: 25 abr. 2022.

CARDOZO, D.; POSSAMAI, J. P.; MENEGHELLI, J. Aprendendo matemática por compreensão - uma prática realizada no curso de Administração. **Vidya***,* v. 40, p. 217-236, 2020.

CLEMENT, L.; TERRAZZAN, E. A. Atividades Didáticas de Resolução de Problemas e o Ensino de Conteúdos Procedimentais. **Revista Electrónica de Investigación en Educación en Ciencias**, v. 6, n. 1, p. 87-101, 2011. Disponível em: http://www.scielo.org.ar/pdf/reiec/v6n1/v6n1a08.pdf. Acesso em: 17 jan. 2021.

DAVIS, R. B. Understanding "Understanding". **Journal of Mathematical Behavior**, v. 11, p. 225-241, 1992.

DINIZ, M. I. de S. V. Os Problemas Convencionais nos Livros Didáticos. *In*: SMOLE, K. C. S.; DINIZ, M. I. de S. V. (org.). **Ler, escrever e resolver problemas: Habilidades básicas para aprender matemática**. Porto Alegre: Artmed, 2001, p. 99-101.

FERNANDES, D. L. **Geometria espacial no Ensino Médio**: uma abordagem de ensino-aprendizagem-avaliação através da resolução de problemas. 2020. 121 f., il. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências Naturais e Matemática) - Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências Naturais e Matemática, Universidade Regional de Blumenau, Blumenau, 2020. Disponível em: http://www.bc.furb.br/docs/DS/2020/367120_1_1.pdf. Acesso em: 25 abr. 2022.

HIEBERT, J., *et al*. **Making Sense: Teaching and Learning Mathematics with Understanding**. Portsmouth: Heinemann, 1997.

IMENES, L. M.; LELLIS, M. **Matemática - 8º ano**. São Paulo: Moderna, 2009.

MENEGHELLI, J. **Resolução de Problemas e o software GeoGebra**: um caminho para o ensino das funções trigonométricas seno e cosseno. 2018. 165 f., il. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências Naturais e Matemática) - Programa de Pós-Graduação em Ensino de

Ciências Naturais e Matemática, Universidade Regional de Blumenau, Blumenau, 2018. Disponível em: http://www.bc.furb.br/docs/DS/2018/365400_1_1.pdf. Acesso em: 25 abr. 2022.

MODERNA (org.). **Projeto Araribá Matemática 8º ano**. São Paulo: Moderna, 2010.

ONUCHIC, L. de la R. Ensino-Aprendizagem de Matemática Através da Resolução de Problemas. *In*: BICUDO, M. A. V. (org.). **Pesquisa em Educação Matemática: Concepções e Perspectivas.** São Paulo: Editora Unesp, 1999, p. 199-218.

POFFO, C. **Letramento estatístico na perspectiva do ensino através da resolução de problemas no primeiro ano do Ensino Fundamental**. 2021. 205 f., il. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências Naturais e Matemática) - Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências Naturais e Matemática, Universidade Regional de Blumenau, Blumenau, 2021. Disponível em: http://www.bc.furb.br/docs/DS/2021/367949_1_1.PDF. Acesso em: 25 abr. 2022.

STEIN, S. S. **Ensino de fração sob a perspectiva da resolução de problemas**. 2021. 122 f., il. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências Naturais e Matemática) - Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências Naturais e Matemática, Universidade Regional de Blumenau, Blumenau, 2021. Disponível em: http://www.bc.furb.br/docs/DS/2021/367903_1_1.PDF. Acesso em: 25 abr. 2022.

TEIXEIRA, L. R. M., *et al*. Problemas multiplicativos envolvendo combinatória: estratégias de resolução empregadas por alunos do Ensino Fundamental público. **Educar em Revista**, v. 27, n. 1/2011, p. 245-270, 2011. Disponível em: https://revistas.ufpr.br/educar/article/view/22633/14859. Acesso em: 20 jan. 2021

VAN DE WALLE, J. A. **Matemática no Ensino Fundamental: Formação de Professores e Aplicações em Sala de Aula**. Porto Alegre: Artmed, 2009.

VAN DE WALLE, J. A. Teaching Mathematics for Understanding. *In:* J. A. VAN DE WALLE, J. A., *et al*. **Teaching Student-Centered Mathematics**. Person, 2017, p. 1-12.

VILA, A.; CALLEJO, M. L. **Matemática para aprender a pensar: O papel das crenças na resolução de problemas**. Porto Alegre: Artmed, 2006.

Submetido em 14 de janeiro de 2022.
Aceito em 28 de abril de 2022.