

ENSINO DE CÁLCULO: uma proposta para taxa de variação de funções reais de uma variável no GeoGebra

*TEACHING OF CALCULUS: a proposal for the rate of change of real functions of a
variable in GeoGebra*

Renata Feuser Silveira

Mestra em Ensino de Ciências, Matemática e Tecnologias
Universidade do Estado de Santa Catarina – Santa Catarina – Brasil

renata.feuser@gmail.com

<http://orcid.org/0000-0001-5519-6010>

Ana Paula Grimes de Souza

Mestra em Educação Científica e Tecnológica
Universidade Federal de Santa Catarina – Santa Catarina – Brasil

anapaulagrimes@gmail.com

<https://orcid.org/0000-0002-8554-479X>

Resumo

Este artigo versa sobre uma pesquisa qualitativa referente ao ensino de Cálculo, especificamente sobre o ensino de derivadas de funções reais de uma variável real e algumas de suas aplicações, visando propor uma abordagem dinâmica para o ensino de taxa de variação mediada pelas potencialidades do software GeoGebra. Para tanto, o objetivo deste artigo é divulgar um produto educacional no formato de um livro dinâmico, denominado “Dinamicidade e taxa de variação de funções reais de uma variável: um GeoGebraBook”, contendo objetos de aprendizagem (OAs) construídos com o software de geometria dinâmica supracitado. Neste contexto, destacaremos o OA “cilindro” o qual foi experimentado em duas turmas da Pós-Graduação, de uma universidade pública, nas disciplinas de Fundamentos do Cálculo e Fundamentos da Matemática. A experimentação teve o intuito de analisar a interação dos mestrandos com o referido OA, especialmente por se tratar de um público de possíveis professores ou futuros professores de Cálculo, além de recolher sugestões de melhoria para o produto educacional desenvolvido. O desenvolvimento e a experimentação do produto educacional ajudaram a refletir sobre as potencialidades e os desafios do uso de tecnologias na sala de aula, considerando aspectos importantes como a formação de professores e o ensino de Cálculo.

Palavras-Chave: Ensino, Cálculo, Taxa de variação, Objeto de aprendizagem, GeoGebra.

Abstract

This article is about a qualitative research related to the teaching of Calculus. More specifically, it covers the teaching of derivatives of real functions of a real variable and some of its applications using a dynamic approach mediated by the capabilities of the GeoGebra software. Therefore, the objective of this article is to disseminate an educational product entitled “Dynamicity and rate of variation of real functions of a variable: a GeoGebraBook”. Such a product contains learning objects (OAs) built with the dynamic geometry software, GeoGebra. In this context, the OA “cylinder”, which was tried in two postgraduate classes at a public university, in the subjects of Fundamentals of Calculus and Fundamentals of Mathematics will be highlighted. The objective of this initiative was to highlight an interaction of master's students in the experimentation of the aforementioned OA, as it is an audience of possible teachers or future teachers of Calculus. It was also sought to mention the suggestions for improvement collected for the educational product developed. The development and experimentation of the educational product helped to reflect on the potential and challenges of using technologies in the classroom, considering important aspects such as teacher training and teaching calculus.

Keywords: Teaching, Calculus, Rate of change, Learning object, GeoGebra.

<https://doi.org/10.51359/2177-9309.2022.251431>

INTRODUÇÃO

Como professoras de cursos da área tecnológica do Ensino Superior, com aproximadamente 10 anos de experiências, constatamos que muitos estudantes apresentam dificuldades na compreensão em um dos principais conteúdos de cálculo, a taxa de variação de funções reais de uma variável real (para evitar a repetição, ao nos referirmos a funções reais de uma variável real, usaremos apenas funções reais de uma variável ou F1V). Em muitas de nossas aulas, observamos que os estudantes estão habituados com a resolução algébrica e dificilmente conseguem determinar o comportamento da função que descreve a taxa de variação. Pensando nesse contexto, partimos do seguinte questionamento: de quais maneiras o professor de Ensino Superior pode abordar dinamicamente o ensino de taxa de variação de funções reais de uma variável na disciplina de Cálculo? Diante do exposto, apresentaremos neste artigo um produto educacional (originado da dissertação de mestrado de uma das autoras) e alguns resultados das aplicações deste produto, com o intuito de oferecer sugestões que podem colaborar nessa temática.

Para Borba e Penteado (2001), as ferramentas tecnológicas são interfaces relevantes no desenvolvimento de práticas em Educação Matemática. Os mesmos autores ressaltam que tratar atividades matemáticas com os recursos tecnológicos aponta um aspecto considerado essencial da disciplina, que é a experimentação. A partir dessas experiências, compreendemos que essa possibilidade de promover a experimentação mediada pelas potencialidades dos recursos tecnológicos, propicia situações nas quais o estudante tem condições de investigar, observar, conjecturar, refutar e/ou validar suas hipóteses de uma maneira diferenciada, haja vista que recursos tecnológicos como softwares de geometria dinâmica, por exemplo, possibilitam explorar propriedades geométricas de uma determinada construção. Assim, os estudantes podem ser encorajados a estudarem conceitos matemáticos, antes produzidos apenas no ambiente lápis e papel.

O produto educacional apresentado neste artigo é fruto da dissertação de mestrado da primeira autora, o qual consiste em um livro dinâmico, para o ensino de taxa de variação de FIV, voltado à professores do Ensino Superior que lecionam a disciplina de Cálculo e para professores de Matemática que queiram abordar ideias do Cálculo para o Ensino Médio. Pensamos que a tecnologia associada ao ensino de Cálculo, em especial, ao ensino do conteúdo de taxa de variação de FIV, pode contribuir nos processos de ensino e aprendizagem desta disciplina. Particularmente, “o uso do GeoGebra pode criar um ambiente favorável a superação de dificuldades relacionadas à construção de conceitos e ideias matemáticas” (CYRINO; BALDINI, 2012, p. 53).

A fim de alcançar o objetivo proposto, dividimos este artigo em algumas seções: no primeiro momento apresentamos algumas fontes da pesquisa referente ao GeoGebra no contexto do ensino de Matemática e também, especificamente, no contexto do ensino de Cálculo. Na sequência, trazemos a metodologia utilizada na pesquisa, desde a elaboração até a aplicação do produto educacional; apresentamos alguns detalhes do produto educacional construído, com foco em um dos OAs elaborados, destacando suas potencialidades ao ensino do Cálculo; também apontamos os resultados de experimentações realizadas em duas turmas de Pós-Graduação na área de Ensino de

Ciências e Matemática, com o intuito contribuir no processo de ensino de professores ou futuros professores.

GEOGEBRA E O ENSINO DE MATEMÁTICA

Nessa seção nos debruçamos a apresentar alguns trabalhos de pesquisadores que utilizaram o GeoGebra para o ensino de matemática no contexto do Ensino Médio.

Borsoi (2016) em sua dissertação de mestrado intitulada: “GeoGebra 3D no Ensino Médio: uma possibilidade para a aprendizagem da geometria espacial” apresenta um estudo envolvendo uma sequência didática que explora conceitos da Geometria Espacial com a utilização do software de geometria dinâmica GeoGebra. São propostas 10 atividades dentro do GeoGebraBook, tais como: explorando um cubo (construção do mesmo), cortando um cubo, criação de sólidos de revolução, construção de uma esfera inscrita num cilindro entre outras atividades. A proposta foi implementada em uma turma de 23 estudantes do 3º ano do Ensino Médio de uma escola da rede pública estadual de Farroupilha/RS, no ano de 2015. A autora relata que de acordo com as produções dos estudantes, foi possível observar que os mesmos se mostraram em constantes progressos no desenvolvimento do pensamento geométrico espacial, estabelecendo relações entre objetos geométricos e percebendo propriedades importantes dos objetos 3D. O trabalho da autora vem ao encontro deste trabalho, pois o produto didático desenvolvido pela autora, além da sequência didática e dos procedimentos de construção feitos no GeoGebra, inclui um GeoGebraBook voltados para professores e estudantes da Educação Básica.

Costa, Tenório e Tenório (2014) trazem em seu artigo: “Resolução de exercícios e problemas de função polinomial do primeiro grau com e sem uso do GeoGebra” investigações na resolução de exercícios e problemas de função do 1º grau em duas turmas de 1ª série do Ensino Médio. A pesquisa foi desenvolvida no primeiro semestre de 2014, com 25 estudantes da rede pública estadual do Rio de Janeiro, uma turma foi denominada de controle (15 alunos) e outra, alvo (10 alunos). Depois da explicação em sala de aula, referente ao conteúdo de funções polinomiais do primeiro grau, foi

realizado um reforço pedagógico com uma lista de doze questões envolvendo seis exercícios (atividades estilo resolva, determine, construa o gráfico) e seis problemas (atividades contextualizadas). Na turma alvo, a abordagem foi realizada com o uso do GeoGebra no laboratório de informática e a turma controle resolveu as questões em sala de aula, sem o uso do GeoGebra, com o auxílio do professor. Foram realizados testes estatísticos para verificar a aprendizagem dos estudantes a partir do que eles responderam nas atividades propostas. Segundo esses autores, o estudo mostrou a importância de proporcionar aos estudantes um ambiente mais dinâmico, enriquecedor e motivador para o processo de ensino e aprendizagem por meio da inserção de um recurso tecnológico, o software GeoGebra. Porém, o uso do software não mostrou vantagens na resolução algébrica tanto dos exercícios quanto dos problemas.

A dissertação de Molon (2013) intitulada “Cálculo aplicado ao estudo de funções quadráticas no ensino médio: uma abordagem possível e necessária com auxílio do software GeoGebra” teve como objetivo principal “verificar a possibilidade da inserção, no Ensino Médio, das ideias intuitivas do Cálculo Diferencial. Ideias intuitivas de limites de uma função, de taxa de variação média, variação instantânea e o Cálculo de áreas abaixo do gráfico de funções positivas” (MOLON, 2013, p. 7). Para tanto, foram convidados estudantes do 1^a ano do Ensino Médio para participarem de um “minicurso” de matemática abordando tópicos de estudos sobre funções lineares e quadráticas, no laboratório de informática da Escola Municipal de Ensino Fundamental Francisco Zilli, do município de Flores da Cunha – RS, sendo que 14 estudantes aceitaram o convite e formaram uma turma experimental. O trabalho foi organizado com atividades que possibilitavam ao estudante a experimentação e a visualização com a utilização dos diversos recursos do software, foram propostas 24 atividades e 5 atividades complementares de avaliação. As atividades iam desde esboçar gráficos de funções polinomiais do primeiro e segundo grau, compreender o significado do limite de uma função quadrática, construir a reta tangente ao gráfico de uma função, relacionar a velocidade média com o Cálculo do coeficiente angular de uma reta até aproximar o valor da área de objetos utilizando os comandos “Soma Superior” e “Soma Inferior” do GeoGebra. Como resultado das atividades propostas, a autora descreve que as mesmas

pueram ser trabalhadas de modo intuitivo com o auxílio do software GeoGebra e que elas podem ser inseridas dentro do desenvolvimento dos programas de ensino já existentes, ajustando as abordagens aos conteúdos e proporcionando aos estudantes um ensino apoiado na experimentação, na visualização e na aplicação dos conceitos estudados.

Os trabalhos de Borsoi (2016) e Molon (2013) merecem destaque especial, pois ambos vêm ao encontro com questões trabalhadas neste artigo, ou seja, o primeiro em relação ao produto educacional - o qual também tratou-se de um GeoGebraBook - e o segundo, em relação ao conteúdo abordado de taxa de variação de FIV para o ensino de Cálculo que também poderá ser utilizado no Ensino Médio.

A busca por alguns trabalhos que utilizam o GeoGebra no Ensino Médio proporcionou reforçar o que já se imaginava, ou seja, existe a possibilidade da inserção no Ensino Médio de algumas ideias do Cálculo subsidiadas pelas potencialidades do GeoGebra. Dessa maneira, no próximo tópico será descrito alguns trabalhos que, especificamente, tratam do GeoGebra e o Ensino de Cálculo.

GEOGEBRA E O ENSINO DE CÁLCULO

O uso de softwares de geometria dinâmica, em especial o GeoGebra, podem servir de auxílio e ser interessantes nos processos de ensino e aprendizagem de Cálculo. Nesta perspectiva, relataremos alguns trabalhos nos quais podemos constatar a utilização do mesmo.

No trabalho "Contribuições do software GeoGebra no estudo de Cálculo Diferencial: uma experiência com alunos do curso de Geologia", Richit, et al., (2012) apresentam uma experiência que mostra como atividades envolvendo otimização, funções, limites, derivadas e continuidade de uma função mediadas pelo GeoGebra abrem possibilidades de compreensão de conceitos de Cálculo. A primeira atividade trata-se do estudo da função linear, na qual foi analisado o seu comportamento

alterando-se os valores dos parâmetros de uma função genérica. Esta primeira atividade tinha como objetivo promover a familiarização dos participantes com o software GeoGebra. Na segunda atividade aborda-se conceitos relacionados à continuidade da função, na qual estava implícito a ideia de limite, os estudantes puderam verificar a continuidade da função, sem ter que desenhar repetidas vezes os gráficos relativos a cada parâmetro por eles utilizado. Já a terceira atividade explorou o conceito de derivada, a partir de retas tangentes, sendo que o objetivo era verificar geometricamente o conceito de derivada. Ao trabalhar com parâmetros, os estudantes puderam verificar a alteração na inclinação da reta tangente a curva, a partir de um ponto.

Os autores desse trabalho avaliaram que “os processos de ensino e aprendizagem podem ser mais significativos e produtivos para o aluno com a inserção da tecnologia, porém não é algo trivial para o professor, e demanda um tempo para a sua incorporação dentro das aulas” (RICHIT, et al., 2012, p. 91). Observamos que os autores destacam um fator bem parecido com a pesquisa de mestrado da autora em relação a utilização de um software em sala de aula: “O que no papel e lápis seria preciso vários desenhos, o software mostrou, através da variação de parâmetros, o comportamento das funções” (RICHIT, et al., 2012, p. 98).

Outro trabalho é o de Diković (2009), o qual expõe “Aplicações no GeoGebra para ensinar alguns tópicos de matemática no nível Superior” vantagens do software GeoGebra no ensino de Cálculo. A autora apresenta exemplos para o Cálculo como a inclinação da reta tangente a uma curva e o gráfico da função derivada e a averiguação de continuidade/descontinuidade de uma função. Estes exemplos mostram potencialidades do GeoGebra, como a dinamicidade e interatividade entre representações algébricas e gráficas, proporcionando uma visualização do conteúdo em questão. A autora menciona uma experiência didática realizada em 2008/2009 em uma escola técnica de Uzice, na Sérvia. Usou uma amostra de 31 alunos. O objetivo era verificar se havia uma diferença na aprendizagem de Cálculo antes e após o uso do GeoGebra. O resultado do teste estatístico confirmou o fato de que o uso dos *applets* criados com a ajuda do GeoGebra e utilizados no Ensino de Cálculo, teve um efeito positivo na compreensão e conhecimento dos estudantes. Esse resultado mostrou ainda

que o GeoGebra pode ser “uma ferramenta poderosa para a visualização e simulação das noções-chave do Cálculo Diferencial (a inclinação da reta tangente, a conexão entre a inclinação da linha tangente e o gráfico da função gradiente, a continuidade/descontinuidade da função, etc.)” (DIKOVIĆ, 2009, p. 201, tradução nossa).

A tese de doutorado de Janzen (2011) ressalta “O papel do professor na formação do pensamento matemático de estudantes durante a construção de provas em um ambiente de geometria dinâmica” na cidade de Würzburg, na Alemanha, em um estudo de caso. Ela contou com a ajuda de dois professores da universidade alemã e dois estudantes voluntários que estavam cursando a disciplina de Elementos de Geometria para realizar sua pesquisa. Foram selecionadas duas atividades para serem exploradas no GeoGebra sendo que essas não envolviam conteúdo específico de geometria. A primeira atividade envolvendo um triângulo (pontos médios, simétricos e relação entre os vértices e os pontos simétricos) e a segunda atividade envolvendo um quadrilátero convexo (bissetrizes dos ângulos internos e seus pontos de interseção). Para coleta dos resultados a pesquisadora realizou a observação em dois momentos. No primeiro momento, ela gravou e observou questionamentos durante a experimentação entre o professor um e a estudante um e no segundo momento, entre o professor dois e o estudante dois. Assim, Janzen (2011) destaca que a utilização da tecnologia na educação resulta em mudanças tanto no professor como no estudante. Para ela o professor passa a ser um mediador, não é mais o dono do saber, e o estudante, por sua vez, precisa sair da passividade.

Estes trabalhos relatados discorrem sobre algumas das potencialidades do GeoGebra para o ensino de Cálculo que poderá auxiliar professores e estudantes a representar um problema em diferentes maneiras, fazer simulações, além de visualizar uma situação, o que, algumas vezes, seria mais difícil com outros recursos/ferramentas como o lápis e o papel. Sendo assim, optamos em divulgar neste artigo um produto educacional que contém sugestões de atividades implementadas no GeoGebra para o ensino de Cálculo e que podem ser utilizadas/adaptadas para o ensino da Matemática, ou seja, para o Ensino Médio.

Assim, ressaltamos que a utilização do software GeoGebra permite que alguns

conceitos de Matemática e de Cálculo sejam explorados por meio de construções não estáticas (podem ser exploradas transitando do algébrico para o geométrico), que podem ser manipuladas e proporcionar uma percepção diferente da Matemática e do Cálculo, ou seja, atividades realizadas no GeoGebra podem proporcionar aos usuários a explorarem situações além do lápis e papel, podendo fazer várias simulações dinamicamente.

ASPECTOS METODOLÓGICOS

Esta pesquisa, de natureza qualitativa (BOGDAN; BIKLEN, 2006), é caracterizada pela busca da compreensão, a descrição e interpretação de fenômenos sociais, nos quais o objeto de estudo faz referência aos produtos da mente humana. Este aspecto tende para o objetivo desta pesquisa que abrange o ensino de Cálculo acerca do conteúdo de taxa de variação de F1V, envolvendo estudantes e tecnologias, propiciado pelas atividades aplicadas.

Uma das características da pesquisa qualitativa no campo da Educação é o fato de que o pesquisador se insere no contexto da pesquisa. Desta forma, existe uma relação entre sujeito, objeto e pesquisador, sendo o pesquisador ao mesmo tempo sujeito e objeto de suas próprias pesquisas. Para Kauark; Manhães e Medeiros (2010), na pesquisa qualitativa existe uma ligação eficiente entre o mundo real e o sujeito, o ambiente natural é procedência direta para coleta de dados e o pesquisador é o instrumento-chave. Os pesquisadores visam a explorar seus dados indutivamente. O processo e seu significado são pontos essenciais de abordagem.

A execução da investigação realizada se deu por meio das seguintes etapas: a) seleção e discussão de artigos, teses e dissertações sobre a visualização, o ensino de Cálculo e o uso de softwares de geometria dinâmica em sala de aula; b) pesquisa de atividades de taxa de variação de F1V disponíveis no GeoGebra; c) desenvolvimento de alguns OAs no aplicativo do GeoGebra; d) experimentação e análise de um OA em duas turmas de Pós-Graduação. Para esta última etapa foram utilizados como instrumentos de coleta de dados: a observação; a gravação em áudio das interações verbais que

ocorreram durante a aplicação da sequência didática; registros fotográficos; os registros produzidos pelos estudantes na resolução da situação problema proposta; e, por fim, um questionário via *Google docs*, respondido pelos estudantes após a experimentação e que teve por objetivo colher sugestões de melhorias ao produto educacional. O questionário aplicado pode ser encontrado na íntegra na dissertação de mestrado de Silveira (2017).

A observação ocupa uma posição privilegiada dentro do campo da pesquisa educacional. De acordo com Lüdke e André (2020), este método de coleta de dados possui grande vantagem pois permite ao pesquisador um contato estreito com o fenômeno observado. Para que se torne um instrumento válido, é importante que a observação seja planejada e sistemática. No caso desta investigação, o objetivo deste método foi identificar elementos que permitissem inferir conclusões acerca das interações dos estudantes com a resolução de problemas envolvendo taxa de variação de FIV mediada pelo software GeoGebra. A gravação do áudio permitiu que diálogos fossem registrados a fim de a pesquisadora não perder informações importantes para sua análise e os registros das respostas dos estudantes permitiram identificar o raciocínio utilizado para resolução do problema no ambiente lápis e papel. Por fim, utilizou-se o questionário pois permite atingir um número maior de pessoas em menos tempo, garante o anonimato dos participantes, e não expõe os sujeitos de pesquisa à influência das opiniões e do aspecto pessoal do entrevistador (GIL, 2008), fator importante nesta investigação, uma vez que a própria pesquisadora aplicou a sequência didática envolvendo o uso do software GeoGebra.

Em relação a criação dos OAs, foi adotada a definição de Santos (2007) a qual afirma que estes podem ser maquetes, imagens, fotos, vídeos, animações, simulações, arquivos de texto, páginas de internet, que quando utilizados como recursos auxiliam processos de ensino e aprendizagem. Primeiramente foram construídos os OAs no GeoGebra e depois foram inseridas as atividades mediadas pelos OAs, sugestões de avaliação, manual de utilização e material de apoio para o professor no GeoGebraBook. Como referencial de livro didático para o ensino de Cálculo, apoiou-se principalmente em Stewart (2015).

Foram criados um OA sobre um problema de taxa de variação de um cilindro, outro OA envolvendo um problema de taxa de variação de um cone, e um terceiro envolvendo um problema de taxa de variação de uma esfera. A construção destes OAs visou oferecer recursos dinâmicos e suporte visual para auxiliar na compreensão dos resultados de um problema de taxa de variação de FIV, uma vez que, em cada OA, foi trabalhada a construção do gráfico do volume em relação ao tempo. Para obter contribuições de melhorias para o produto educacional, experimentou-se um o OA “cilindro”, o primeiro a ser construído. As experimentações foram realizadas em quatro momentos, dos quais dois serão descritos neste artigo. Em todas as experimentações foram solicitadas as assinaturas do termo de consentimento dos participantes.

Escolhemos relatar as experimentações com as turmas de Pós-graduação por se tratar de experiências com professores ou futuros professores de Cálculo, ou seja, vimos uma ferramenta de ensino de Cálculo com potencial e que deveria atingir maior número de interessados ao ser divulgada em formato de artigo. As duas experimentações descritas ocorreram em uma universidade pública do estado de Santa Catarina, ambas experimentações foram aplicadas por uma das autoras deste artigo. A primeira experimentação do OA “cilindro” foi realizada na disciplina de Fundamentos do Cálculo, com quatro participantes, dois mestrados de um Programa de Pós-Graduação na área de Ensino de Ciências e Matemática, a docente da disciplina e uma professora de Cálculo da mesma instituição. A segunda experimentação do OA “cilindro”, ocorreu na disciplina de Fundamentos da Matemática, com quinze mestrados do mesmo programa supracitado.

Nas experimentações foram utilizados os recursos do computador (PowerPoint, GeoGebra, Internet), projetor multimídia, notebooks, televisão, quadro, canetão, lápis e papel. Para melhor entendimento das experimentações serão apresentados a seguir: o produto educacional desenvolvido, as atividades aplicadas e os resultados referente as experimentações realizadas.

O PRODUTO EDUCACIONAL

O produto educacional (disponível em: <<https://ggbm.at/aZvy94me>>. Acesso em: 29 jul. 2021) em questão é um livro dinâmico elaborado na opção de livro *on-line* disponibilizado no site do GeoGebra, denominado “Dinamicidade e taxa de variação de funções reais de uma variável: um GeoGebraBook”, o qual contém objetos de aprendizagem, vídeos, imagens, textos, arquivos em pdf e slides. Para utilizar os materiais basta que o usuário tenha acesso ao link. O usuário também poderá salvar os arquivos e utilizá-los de modo *off-line*. Na sua página inicial aparecem o título, o autor (perfil do GeoGebra), a capa, uma breve descrição do produto educacional e o índice, conforme Figura 1:

Figura 1 – Página inicial do GeoGebraBook

The screenshot shows the GeoGebraBook interface. On the left is a sidebar with a table of contents:

- Dinamicidade e taxa de variação de F1V
- 1. Apresentação
- 2. Derivadas: introdução
- 3. Derivadas: interpretação Geométrica
- 4. Taxa de variação
- 5. Taxa de variação: esfera

The main content area displays the book title "Dinamicidade e taxa de variação de F1V" by Raiane Lemke and Renata Feuser, dated 02/06/2017. Below the title is the book cover, which reads: "DINAMICIDADE E TAXA DE VARIAÇÃO DE FUNÇÕES REAIS DE UMA VARIÁVEL: UM GEOGEBRABOOK. Renata F. Silveira e Ivanete Z. Siple. JOINVILLE, 2017".

Below the cover is a description: "Produto Educacional desenvolvido por Renata Feuser Silveira, sob orientação de Ivanete Zuchi Siple, no mestrado profissional do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências, Matemática e Tecnologias - PPGECMT, da Universidade do Estado de Santa Catarina. Abordamos algumas aplicações de derivadas de funções de uma variável, em especial, taxa de variação. Este material está relacionado à dissertação: "Dinamicidade no Ensino de Cálculo: uma proposta para taxa de variação de funções reais de uma variável no GeoGebra.""

Below the description is an "Índice" section:

- 1. Apresentação
 1. Apresentação
 2. Sobre as autoras
 3. Ícones
 4. Descrição do produto educacional

Fonte: Silveira, 2017, p. 57.

O objetivo desse produto educacional é propor uma abordagem dinâmica para o ensino de taxa de variação de F1V mediada pelas potencialidades do software GeoGebra. Ao clicar no link deste produto educacional, o usuário encontrará a página inicial e poderá se direcionar ao capítulo desejado: Capítulo 1 – Apresentação; Capítulo 2 – Derivadas: introdução; Capítulo 3 – Derivadas: interpretação Geométrica; Capítulo 4 – Taxa de variação; Capítulo 5 – Taxa de variação – esfera; Capítulo 6 – Taxa de variação – cilindro; Capítulo 7 – Taxa de variação – cone; Capítulo 8 – Taxa de variação – escada; Capítulo 9 – Conexões com o Ensino Médio; Capítulo 10 – Sugestão de avaliação; Capítulo 11 – Manual; Capítulo 12 – Deixe sua opinião.

O destaque dado ao referido produto educacional, neste artigo, é no capítulo 6. Pois, é neste capítulo que contém as atividades mencionadas nas experimentações realizadas, ou seja, onde encontra-se a proposta de atividades que tem como objetivo utilizar a regra da cadeia na resolução de problemas de taxa de variação envolvendo um cilindro e explorar o aspecto dinâmico do conceito de taxa de variação.

ATIVIDADES DA EXPERIMENTAÇÃO

A proposta dessas atividades (disponível no capítulo 6) será descrita de forma breve, uma vez que a mesma poderá ser acessada na íntegra no próprio produto educacional. A descrição dos demais capítulos podem ser encontradas na dissertação de mestrado de Silveira (2017) assim como no produto educacional da autora.

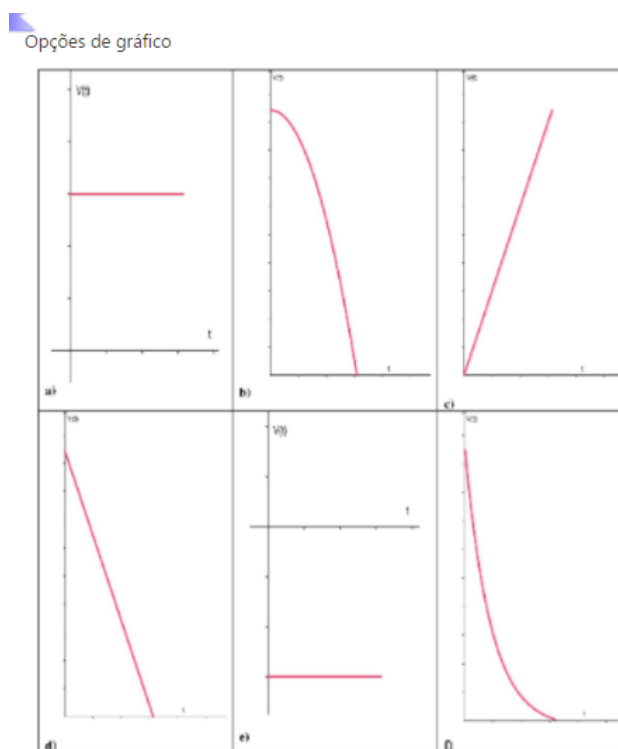
Inicialmente são exibidos os objetivos das atividades e as noções de taxa de variação e regra da cadeia. Na sequência é proposto um exercício que tem como objetivo determinar numericamente o valor da taxa de variação do volume de um cilindro quando seu raio é alterado (a resolução dessa questão é apresentada em arquivo do PowerPoint).

Para explorar a situação problema proposta sugere-se a observação de imagens de objetos cilíndricos (tanques de armazenamento), apresentando-se algumas imagens de cilindros. São realizados questionamentos sobre as semelhanças das figuras apresentadas, do tipo: Há relação entre um tanque de armazenamento e o Cálculo? O que é um tanque de armazenamento? Como é sua construção? Qual é a sua finalidade? Quais são seus formatos? Como classificar um tanque? Como é sua utilização? Quais são suas dimensões?

Em seguida, é proposto a resolução da seguinte situação problema: A taxa de variação do volume da água em um tanque cilíndrico está relacionada à taxa de variação no nível de água do tanque. Um tanque cilíndrico reto, inicialmente cheio de água, tem raio igual a 1 metro (m) e altura igual a 3 metros (m). Sabendo que a taxa do nível (altura) da água dentro deste tanque diminui a $3/\pi$ metros por minuto (m/min),

determine qual dos seis gráficos abaixo (vide Figura 2) representa melhor a variação do volume da água em relação ao tempo: (justifique sua escolha).

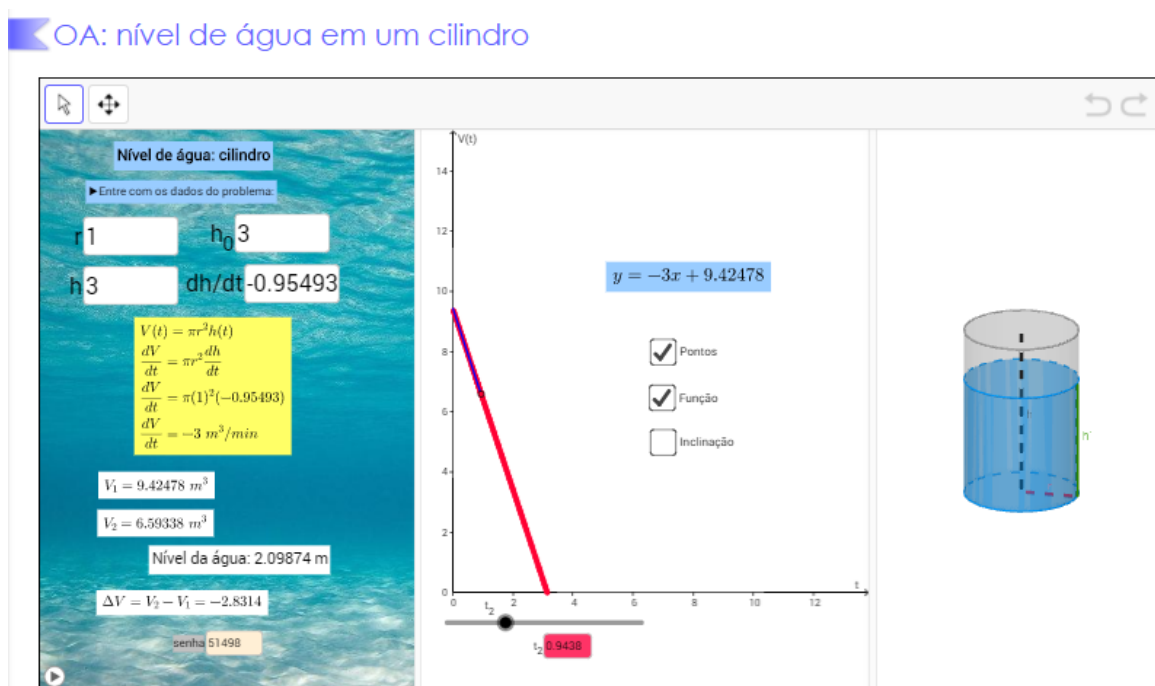
Figura 2 – Opções de gráficos na situação problema do cilindro



Fonte: Silveira, 2017, p. 60.

Primeiramente, é sugerido que esta situação problema fosse resolvida no ambiente do lápis e do papel, para depois as respostas serem confrontadas no ambiente computacional com o OA cilindro. A Figura 3 ilustra o objeto de aprendizagem “cilindro”. Na janela de álgebra, o usuário entra com os dados do problema, o raio e a altura do cilindro, digita também a taxa de variação da altura e h_0 , que é a altura inicial da água. Também temos a resolução algébrica da situação (digitar no campo de entrada “senha”, o número **51498**, que aparecerá itens, tais como a resolução algébrica e a lei da função do volume pelo tempo). Na janela gráfica o usuário pode arrastar o controle deslizante do tempo e observar as mudanças que ocorrem. Tem-se também a representação, a partir de alguns pontos, da função do volume pelo tempo. Já na janela 3D temos a representação do tanque cilíndrico e da água que está variando.

Figura 3 – OA “cilindro”



Fonte: Silveira, 2017, p. 61.

Depois de utilizar o OA “cilindro”, sugere-se o levantamento das seguintes questões:

a) Um tanque cilíndrico reto, inicialmente cheio de água, tem raio igual a 1 m e altura igual a 3 m. Sabendo que a taxa do nível (altura) da água dentro deste tanque diminui a $3/m/min$, determine a taxa de variação do volume da água deste tanque. Depois de 2 minutos, qual será, aproximadamente, a quantidade de água neste tanque? Depois de quanto tempo o tanque esvaziará completamente? Se o nível de água estivesse inicialmente em 2.5 metros, qual seria a taxa de variação do volume de água desse tanque? Por quê?

b) Qual será a taxa de variação do volume de água se a taxa do nível da água dentro do tanque diminui a $4/\pi m/min$? (Considere o tanque cheio, $r = 1 m$ e $h = 3 m$)

c) Qual será a taxa de variação do volume, quando a taxa do nível de água diminui a $3/\pi m/min$, se o tanque estiver completamente cheio e tiver $r = 3 m$ e $h = 1 m$?

d) Caso o tanque esteja inicialmente vazio, e tenha as dimensões $r = 2$ m e $h = 5$ m, sendo que a altura cresce à uma taxa de $3/\pi$ m/min, qual será taxa de variação do volume da água? Nessa situação, qual é o comportamento do gráfico a variação do volume da água em relação ao tempo? Quanto tempo o tanque levará para encher completamente?”

Como contextualização, são indicados dois vídeos envolvendo a temática do cilindro, clicando em vídeos o professor/usuário poderá acessar os vídeos: “Modelo do Vazamento de um Tanque” (disponível em: <<https://www.youtube.com/watch?v=KyeHOudqAes>>. Acesso em 29 jul. 2021) e “Oficina de construção de cisterna de placas para armazenamento de água das chuvas” (Disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=mim_r6bH0E8>. Acesso em 29 jul. 2021). Em materiais, estão disponibilizados slides em PowerPoint com a sequência aqui mencionada.

Diante do exposto descreve-se, na próxima seção, duas das quatro experimentações realizadas com o OA do cilindro e os resultados que foram obtidos em relação a essas experimentações.

EXPERIMENTAÇÕES E RESULTADOS DO OBJETO DE APRENDIZAGEM

Esta seção apresenta dois momentos referente a experimentação realizada com o OA do cilindro cujo objetivo principal foi colher as contribuições e sugestões de melhoria para o produto educacional, tanto em nível de implementação, no GeoGebra, quanto da ordem de desenvolvimento das atividades, envolvendo o aspecto dinâmico da taxa de variação.

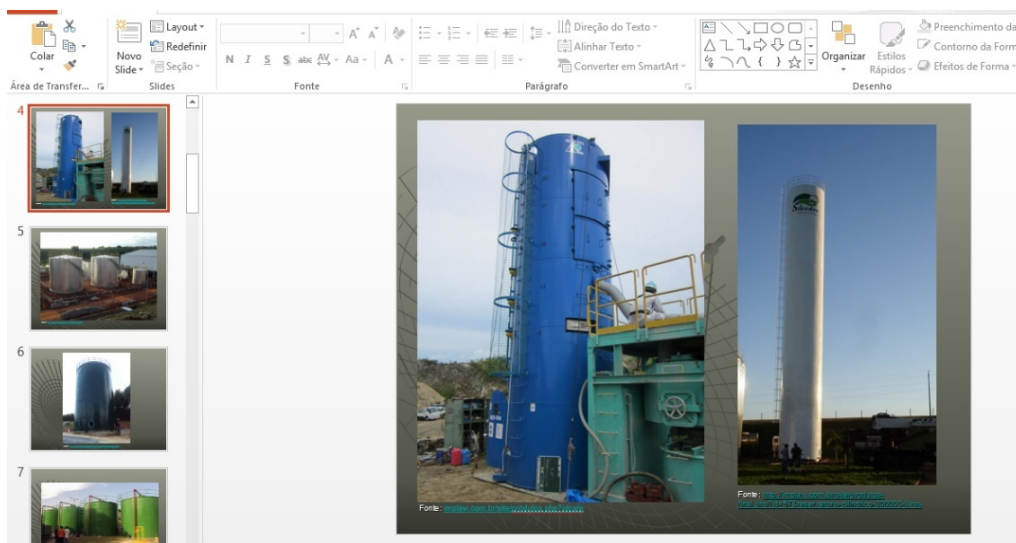
Experimentação na turma de mestrado – disciplina de Fundamentos do Cálculo

A pesquisadora aplicou a atividade (inicialmente dividida em três atividades) referentes ao objeto de aprendizagem de taxa de variação do volume da água de um tanque cilíndrico em uma turma de Pós-graduação, na disciplina de Fundamentos do Cálculo (FCA), em uma universidade pública, com quatro participantes, sendo um deles

uma professora de Cálculo da instituição, a professora da disciplina de FCA e outros dois mestrandos. Vale destacar que, na ocasião, a pesquisadora era mestranda da disciplina. Visto que, os objetivos da disciplina eram reconhecer, refletir e aprofundar as ideias fundamentais do Cálculo, em termos de teoria e prática, buscando compreender os elos entre os conteúdos da Matemática de nível universitário com o Ensino Médio, propiciando oportunidades que possam enriquecer a formação do professor. Nessa perspectiva, os mestrandos de FCA foram motivados pela professora da disciplina a apresentarem uma prática envolvendo um determinado conteúdo de Cálculo que possibilitasse estabelecer conexões entre o Ensino Superior e o Médio. Surgiu, então, a possibilidade de realizar a primeira experimentação do OA envolvendo cilindro, uma vez que o cilindro é um conteúdo abordado desde o Ensino Fundamental. Alguns dias antes da experimentação da prática foi solicitado pela pesquisadora, por e-mail, que os participantes trouxessem seus notebooks para utilizarem em sala de aula no dia da experimentação.

No dia da prática os participantes foram acomodados em uma sala de aula e a atividade foi iniciada apresentando algumas imagens (vide Figura 4) de diferentes tanques de armazenamento em formato cilíndrico, questionando-os o que aqueles tanques de armazenamento tinham em comum.

Figura 4 – Apresentação das imagens do cilindro



Fonte: Silveira, 2017, p. 66.

Em relação as imagens apresentadas no PowerPoint, o objetivo foi atingido. Em geral, os participantes responderam que os objetos das imagem serviam para armazenar algo e que tinham formatos cilíndricos.

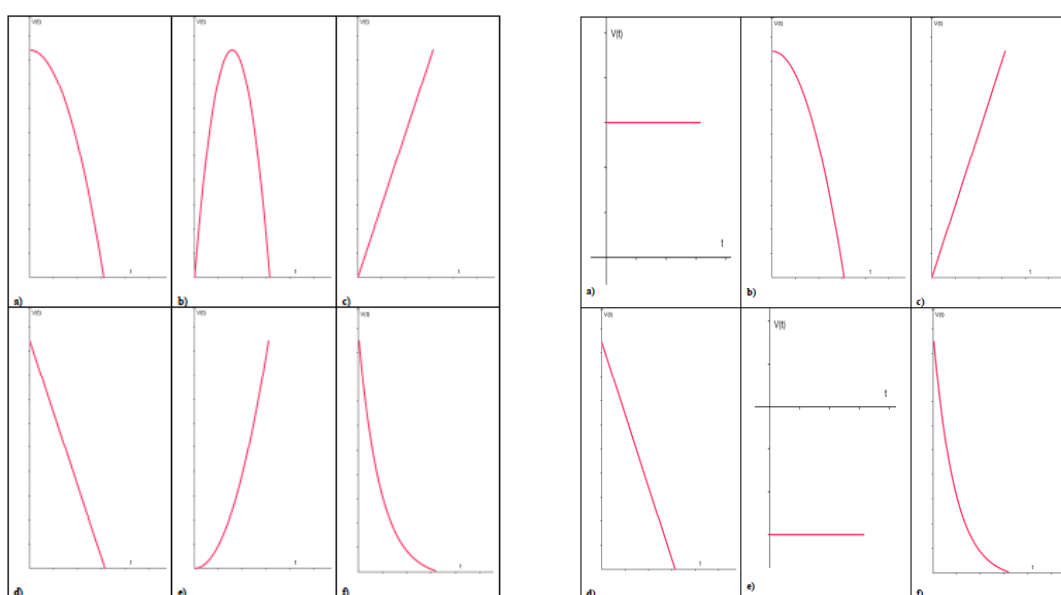
Na sequência, foi entregue uma primeira atividade (um problema de vazão) para os participantes resolverem com lápis e papel. Foi solicitado que respondessem individualmente e entregassem seus registros, para posterior análise. O objetivo dessa atividade era que os participantes identificassem geometricamente qual o gráfico que representava a melhor variação do volume da água em relação ao tempo.

Depois de alguns minutos, em plenária, discutiu-se sobre a representação gráfica da variação do volume em função do tempo. Um dos participantes respondeu que o gráfico seria uma função do primeiro grau decrescente. Nos registros recolhidos, um dos participantes justificou apresentando os cálculos envolvidos. Notou-se que todos os participantes na experimentação responderam corretamente a atividade 1 (Figura 2). Assim, foi concluído que o gráfico que representa melhor a variação do volume da água em relação ao tempo era uma função afim decrescente (alternativa d), ou seja, a taxa decresce de modo constante, sendo seu comportamento uma função polinomial do 1º grau.

É importante ressaltar que, em um primeiro momento, os gráficos apresentados para análise dos participantes estão representados na Figura 5(a). Como resultado da experimentação, uma das contribuições de melhoria para esta primeira atividade,

sugerida pela professora da graduação, foi a alteração das opções de resposta do gráfico, para tanto, uma alternativa passou a ser uma função constante positiva e a outra uma função constante negativa (vide Figura 5(b)), e ainda, foi solicitado para justificar a resposta, pois as novas opções de respostas nos gráficos poderiam induzir os estudantes ao erro, alguns poderiam pensar que a taxa de variação seria uma função constante. As alterações foram realizadas e incorporadas na versão final do produto educacional.

Figura 5(a) e (b) – Representação gráfica da variação do volume em função do tempo



Fonte: Silveira, 2017, p. 63.

Fonte: Silveira, 2017, p. 68.

Já na segunda atividade, foi entregue a situação problema mencionada na seção anterior, e solicitado a resolução da mesma, sendo que os participantes ficaram livres para discutirem entre si. O objetivo desta atividade era determinar algebricamente, para uma situação específica, a taxa de variação do volume da água num tanque de armazenamento. A análise dessa atividade foi embasada nas observações em sala e nos registros entregues pelos participantes. Foi observado que os participantes não tiveram dificuldades em responder os questionamentos propostos. Nos registros da pesquisadora, foi possível constatar que todos acertaram essa atividade.

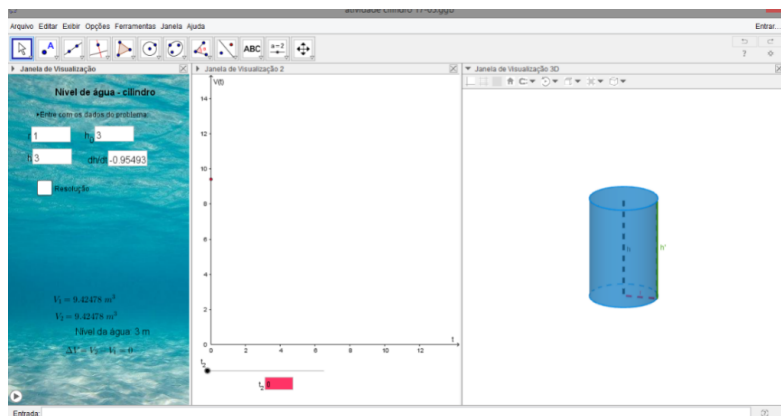
O OA “cilindro” foi disponibilizado, num segundo momento, após os participantes terem realizado as atividades 01 e 02, no ambiente lápis e papel, para que

eles pudessem explorar a situação proposta, bem como simular novas dimensões para o formato do tanque cilíndrico confrontando as conjecturas realizadas a priori, bem como explorar a atividade nos diferentes registros de representação (geométrico e algébrico).

Dando continuidade na experimentação foi apresentada a terceira atividade, a qual consistia na utilização do software GeoGebra. Os participantes deveriam realizar simulações no ambiente tecnológico e descrever o que estava acontecendo. Para realizar a atividade 3 – simulações no software GeoGebra - foi apresentado e disponibilizado o OA no GeoGebra e solicitado para responder os questionamentos propostos (já apresentados na seção anterior).

No decorrer da terceira atividade, foi solicitado a formação de duplas ou grupos para responder as questões. Constatou-se que uma das duplas respondeu as questões primeiramente no papel e só depois utilizaram o OA disponibilizado no GeoGebra. Neste momento a pesquisadora notou que os participantes ficaram interessados com a simulação dinâmica do OA “cilindro”, sendo que um dos participantes comentou “não sabia que era possível representar ao mesmo tempo o cilindro esvaziando e a função no GeoGebra”. Como resultado da experimentação da atividade 3, os participantes sugeriram melhoras para o OA no aplicativo, assim foram efetuados os ajustes para posterior experimentações do OA “cilindro” (conforme Figuras 6 e 7). As alterações foram: fixação das caixas de entrada dos valores, fixação do gráfico, alteração da cor de fundo azul nos campos numéricos.

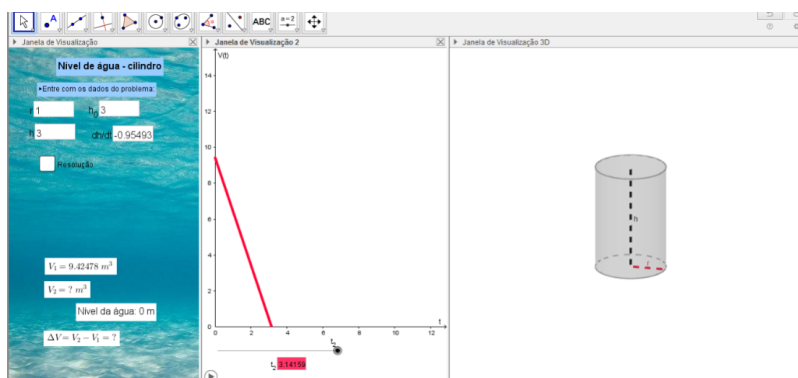
Figura 6 – Objeto de aprendizagem no GeoGebra – proposto inicialmente



Fonte:
Silveira,

2017, p. 69.

Figura 7 – Objeto de aprendizagem no GeoGebra – com alterações



Fonte:
2017, p. 70.

Silveira,

Ainda em

sugestões

relação às

de melhorias, realizou-se a junção da atividade 2 com a atividade 3 e foi acrescentado a questão para considerar um tanque cilíndrico reto, cheio de água, com medida de raio r metros, altura h metros e solicitado para determinar qual a taxa de variação do volume no instante em que o nível da água é igual a h_0 metros, sendo que, a medida do nível (altura) da água dentro deste tanque diminui k m/min, sendo k uma constante.

De acordo com a pesquisadora as contribuições oriundas dessa prática foram relevantes, tanto no que diz respeito à implementação do OA “cilindro” quanto na proposição dessa prática. Os participantes, baseados em suas experiências, verificaram que era necessário adaptar as possibilidades de representação gráfica da variação do volume. Além, dos aspectos de layout, cores, tamanhos do OA implementado no ambiente GeoGebra. Assim, essas contribuições foram implementadas pela pesquisadora e utilizadas na nova versão.

Experimentação da proposta na turma de mestrado – disciplina de Fundamentos da Matemática

No semestre seguinte, a pesquisadora aplicou as atividades referente ao objeto de aprendizagem de taxa de variação do volume da água em um tanque cilíndrico na segunda turma de mestrado, na universidade já mencionada anteriormente, na disciplina de Fundamentos da Matemática, com quinze mestrandos. Nesta prática, o professor da disciplina cedeu sua aula para a pesquisadora aplicar o OA “cilindro” e apresentar o GeoGebraBook com o intuito de colher sugestões de melhoria dos mesmos. O professor

da disciplina optou por não participar da prática. Ao iniciar, os mestrados já se encontravam na sua sala de aula de costume, que por sinal era um laboratório de informática.

Ao iniciar a aula, a pesquisadora solicitou aos mestrados a autorização para uso das respostas das atividades realizadas, colhendo a assinatura dos mesmos no termo de consentimento. Assim como na experimentação anterior, foram mostradas algumas imagens de tanques de armazenamento de formato cilíndrico (no PowerPoint) e os mestrados foram questionados sobre o que elas tinham em comum, sendo que, o objetivo era que identificassem o formato das imagens apresentadas. A primeira atividade foi entregue e solicitado que eles respondessem no ambiente lápis e papel. Foi permitido resolver em duplas. Após o recolhimento das atividades, de acordo com as observações da pesquisadora, dois mestrados estavam aflitos e relataram não lembrar mais de derivadas.

Em relação aos dados obtidos, 13 mestrados responderam corretamente a representação gráfica (alternativa “d”) e dois responderam a alternativa “b”, sendo que a maioria utilizou cálculos para justificar a escolha da resposta. Um dos participantes respondeu “quanto maior o tempo menor o volume” e identificou o comportamento gráfico erroneamente, ou seja, a noção intuitiva estava correta, porém não transitou entre os diferentes registros para analisar como ocorria a variação dessa taxa.

Depois que os mestrados entregaram a primeira atividade, foi apresentado o OA “cilindro” no GeoGebra. De acordo com os registros da pesquisadora, via formulário *on-line*, foi constatado maior interesse na atividade. Sendo assim, compreende-se que a visualização dinâmica e gráfica da variação do volume da água em relação ao tempo possibilitada pelo objeto de aprendizagem pode ter proporcionado um melhor entendimento da situação apresentada, principalmente para os mestrados que não haviam respondido corretamente a atividade no ambiente lápis e papel.

Na sequência, após entrega da atividade 2, foi solicitado aos mestrados que acessassem o OA “cilindro” disponível no GeoGebra, e que resolvessem as questões solicitadas. Nesta aplicação, as atividades 2 e 3 já foram unificadas, conforme sugestão dos participantes da primeira aplicação. Desta vez, foi possível observar, nos relatos da

pesquisadora, que seis dos mestrados (40% do total de participantes) resolveram as questões no ambiente lápis e papel e só depois utilizaram o OA do GeoGebra, os demais responderam apenas com as simulações no GeoGebra.

Neste dia, os mestrados foram apresentados ao GeoGebraBook, em construção, com o intuito de receber contribuições para o aprimoramento do produto educacional. Em sala de aula, foi apresentado como ter acesso ao produto educacional, explorando o referido produto. Para as sugestões/comentários de melhoria, a pesquisadora disponibilizou um link no GeoGebraBook, pelo Ambiente Virtual de Aprendizagem Moodle, contendo um questionário do google docs. para que os mestrados pudessem realizar suas sugestões até um dado prazo.

Depois de uma semana da experimentação desta prática a pesquisadora realizou a coleta dos registros no questionário do google docs., no qual os mestrados deixaram comentários, sugestões e/ou contribuições. Os comentários e sugestões de modo geral apresentaram pontos fortes e alguns fracos, tais como: “Nunca vi o GeoGebra de forma tão dinâmica”, “Muito interessante sai dos moldes tradicionais e facilita a aprendizagem”, “Tentar ser objetivo, sem muitos textos e imagens”, “Poderia ter um material de instruções”.

Diante destes comentários a pesquisadora percebeu que, de modo geral, a proposta das atividades chamou atenção dos participantes devido a maneira dinâmica de ser abordada. Porém, também foi destacada pela pesquisadora a necessidade de um material de instruções destinado para usuários que possivelmente não possuem familiaridade com o GeoGebra. Dessa forma, aderiu-se a sugestão e o material de instruções encontra-se disponível no produto educacional.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Com este artigo percebemos que o uso da tecnologia, em especial o software de geometria dinâmica GeoGebra, cria a possibilidade de potencializar o ensino de Cálculo Diferencial, mais especificamente o ensino de taxa de variação de F1V, tornando-o assim mais interessante ao olhar dos estudantes.

A visualização “atraente” dos objetos de aprendizagem desenvolvidos no GeoGebra, gerada na tela do computador, associada à dinamicidade desse software pode oportunizar ao estudante formular, conjecturas, resolver situações e até mesmo construir alguns conceitos matemáticos, como por exemplo, taxa de variação e reta tangente. Neste sentido, tem-se o intuito de divulgar um GeoGebraBook já concebido e com potencial para o ensino de Cálculo, por ser dinâmico, por poder ser adaptado/editado, fácil de compartilhar, organizado, com opções de recursos, pela possibilidade de inserir pdfs, vídeos, link, imagens, texto, equações, etc. E, ainda, pela possibilidade de o usuário baixar os OAs e trabalhar de modo *off-line* em qualquer momento.

Ao aplicar o OA “cilindro” foi possível constatar as contribuições e sugestões de melhoria para o produto educacional, tais como: alteração da sequência didática das atividades, modificações nas opções de resposta da situação problema, fixação das caixas de entradas dos valores nos OAs desenvolvidos no GeoGebra, entre outras, sendo que as mesmas foram implementadas e constam na versão final do produto educacional.

É importante destacar que o produto educacional gerado não é fechado, ou seja, qualquer usuário do GeoGebra poderá utilizá-lo, adaptá-lo, gerando um novo GeoGebraBook com as ideias propostas. O intuito não é impor ou trazer algo fechado, acabado, mas sim trazer sugestões, indicações, propostas para que possa favorecer uma abordagem dinâmica de alguns conteúdos de Cálculo como, por exemplo, a reta tangente e a taxa de variação de FIV. A utilização do software GeoGebra permite que alguns conceitos de Cálculo sejam explorados por meio de construções não estáticas, que podem ser manipuladas e proporcionar uma percepção diferente do Cálculo.

Como sugestão para trabalhos futuros, propomos aplicar essas atividades, ou algumas delas, em uma turma do Ensino Médio e realizar análises do aprendizado dos estudantes. Outra sugestão seria a implementação de outros OAs, como por exemplo, de carros se aproximando, avião decolando, dentre outros que possam relacionar à outras áreas do conhecimento, como a Física.

Espera-se que o produto educacional desenvolvido, apresentando parcialmente neste artigo e que contém OAs pertinente ao conteúdo de taxa de variação de FIV,

assim como, as ideais aqui apresentadas e discutidas, possam contribuir para prática de outros professores, assim como tem contribuído para a nossa.

REFERÊNCIAS

BOGDAN, Robert; BIKLEN, Sari Knopp. **Investigação qualitativa em educação: uma introdução à teoria e aos métodos**. Porto: Porto, 2006.

BORBA, Marcelo de Carvalho; PENTEADO, Maria Godoy. **Informática e Educação Matemática**. Belo Horizonte: Autêntica Editora, 2001.

BORSOI, Caroline. **GeoGebra 3D no ensino médio: uma possibilidade para a aprendizagem da geometria espacial**. 2016. Dissertação (Mestrado em Ensino) - Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2016.

CYRINO, Márcia Cristina de Costa Trindade; BALDINI, Loreni Aparecida Ferreira. O software GeoGebra na formação de professores de Matemática – uma visão a partir de dissertações e teses. In: **Revista Paranaense de Educação Matemática**. RPEM, Campo Mourão, Pr, v.1, n.1, jul-dez. 2012. Disponível em: <http://www.fecilcam.br/revista/index.php/rpem/article/viewFile/870/pdf_76>. Acesso em: 09 abr. 2016.

COSTA, Zélia de Souza Santos; TENÓRIO, André; TENÓRIO, Thaís. Resolução de exercícios e problemas de função polinomial do 1º grau com e sem o GeoGebra. 2014. **Revista do Instituto GeoGebra Internacional**. São Paulo, v. 3, n. 2, pp.104-119, 2014. Disponível em: <<https://revistas.pucsp.br/index.php/IGISP/article/view/21771/16108>>. Acesso em: 10 mai. 2017.

DIKOVIĆ, Ljubica. Applications GeoGebra into Teaching Some Topics of Mathematics at the College Level. In: **eLibrary of Mathematical Institute of the Serbian Academy of Sciences and Arts - Journal: Computer Science and Information Systems**; v. 6 nº2. p. 191 – 203, 2009. Disponível em: <<http://posgrad.fae.ufmg.br/posgrad/viiienpec/pdfs/600.pdf>>. Acesso em: 21 fev. 2017.

GIL, Antônio Carlos. **Métodos e Técnicas da Pesquisa Social**. São Paulo: Editora Atlas AS, 2008.

JANZEN, Elen Andrea. **O papel do professor na formação do pensamento matemático de estudantes durante a construção de provas em um ambiente de geometria dinâmica**. Tese (Doutorado em Educação) – Universidade Federal do Paraná, Curitiba, 2011.

KAUARK, Fabiana da Silva; MANHÃES, Fernanda Castro e MEDEIROS, Carlos Henrique. **Metodologia da Pesquisa: um guia prático**. Via Litterarum: Itabuna/Bahia, 2010.

LÜDKE, Menga; ANDRÉ, Marli Elisa Dalmazo Afonso. **Pesquisa em Educação: abordagens qualitativas**. Rio de Janeiro: E.P.U, 2020.

MOLON, Jaqueline. **Cálculo aplicado ao estudo de funções quadráticas no ensino médio: uma abordagem possível e necessária com auxílio do software GeoGebra**. 2013. Dissertação (Mestrado em Matemática) – Universidade Federal de Santa Maria. Paraná, 2013.

RICHIT, Andriceli, et al.. Contribuições do software GeoGebra no estudo de Cálculo Diferencial: uma experiência com alunos do curso de geologia. In: **1ª. Conferência Latino Americana de GeoGebra**, pp.90-99, 2012.

SANTOS, Luciane Mulazani. **Produção de significados para objetos de aprendizagem: de autores e leitores para a educação matemática**. Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal do Paraná, Curitiba, 2007.

SILVEIRA, Renata Feuser. **Dinamicidade no Ensino de Cálculo: uma proposta para taxa de variação de funções reais de uma variável no GeoGebra**. Dissertação (Mestrado) – UDESC, Santa Catarina, 2017.

STEWART, James. **Cálculo**. São Paulo: Cengage Learning, 2015.

Submetido em 12 de agosto de 2021.

Aceito em 03 de março de 2022.