



CONTRIBUIÇÕES DA METODOLOGIA ANÁLISE DE ERRO PARA O ENSINO E APRENDIZAGEM DA ANÁLISE COMBINATÓRIA NO ENSINO MÉDIO

*Error analysis mythology contributions to teaching and learning combinatorial
analysis in High School*

Levy De Oliveira Coelho

Graduado em Matemática
Universidade Federal Fluminense (UFF) – Rio de Janeiro – Brasil
levyoliveira@id.uff.br
<https://orcid.org/0000-0002-6274-828X>

Mônica Souto da Silva Dias

Doutora em Educação Matemática
Universidade Federal Fluminense (UFF) – Rio de Janeiro – Brasil
msouto@id.uff.br
<https://orcid.org/0000-0003-4071-0536>

Resumo

Esse estudo analisou as soluções de alunos do Ensino Médio ao resolverem questões de Análise Combinatória apresentadas no Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM). O objetivo deste trabalho é investigar de que modo a metodologia de ensino e aprendizagem Análise de Erros pode contribuir para a construção de conhecimentos em Análise Combinatória. Os instrumentos de coleta de dados foram um questionário sobre o perfil do aluno, uma atividade diagnóstica com questões do ENEM abordando os principais conceitos do conteúdo escolar da Análise Combinatória, e uma entrevista clínica. Por meio da metodologia da Análise de Erro, foi possível elaborar uma classificação das respostas dos estudantes na atividade diagnóstica, pela qual foram mapeados os tipos de erros e acertos com relação ao conteúdo. Os resultados mostraram que os participantes da investigação apresentaram maior domínio no uso do Princípio Multiplicativo. As fórmulas de Arranjo e Combinação foram as que mais estiveram relacionadas ao uso incorreto para os cálculos das possibilidades. A metodologia de Análise de Erro contribui para o ensino e aprendizagem da Análise Combinatória na medida em que abre espaço para o aluno rever a sua resolução, refletir sobre ela com a orientação do professor e rever suas estratégias. Este processo pode contribuir com a construção do conhecimento

matemático pelo aluno.

Palavras-Chave: Análise Combinatória; Análise de Erro; Ensino Médio; Princípio Multiplicativo.

Abstract

This study analyzed the solutions of high school students when solving Combinatorial Analysis questions used in the Brazilian National High School Exam (ENEM). The objective of this study is to investigate how the teaching and learning methodology Error Analysis can contribute to the construction of knowledge in Combinatorial Analysis. The data collection instruments were: a questionnaire about the student's profile, a diagnostic activity with Brazilian National High School Exam questions that addressed the main formulas of Combinatorial Analysis, and a clinical interview. Through the Error Analysis methodology, it was possible to develop a classification of the students' responses in the diagnostic activity by which the types of errors and correct answers regarding the content were mapped. The results showed that the research participants presented greater mastery in the use of the Multiplicative Principle. The Arrangement and Combination formulas were the ones that were most related to incorrect use for the calculations of the possibilities. The Error Analysis methodology contributes to the teaching and learning of Combinatorial Analysis as it makes room for the student to review its resolution, reflect on it with the teacher's guidance and review its strategies. In this process, the student matures and builds mathematical knowledge.

Keywords: Combinatorial analysis, error analysis, high school, multiplicative principle, errors.

INTRODUÇÃO

No dia a dia de um professor é muito comum ter que corrigir trabalhos, tarefas, avaliações e atividades nos quais os alunos façam algum registro. É nesse momento em que o educador costuma apontar os erros cometidos, mas em geral os acertos, muitas vezes, por serem esperados, não são analisados. Contudo, será que os acertos indicam mesmo que o aluno sabe? Será que os erros evidenciam somente que os discentes não sabem? Essas são algumas das questões evidenciadas por Cury (2015). Para ela, as produções dos alunos têm elementos cruciais do ponto de vista didático, que permitem compreender como o estudante tem internalizado os conteúdos. Desse modo, se o educando repete uma resolução-modelo ou transcreve uma solução original demonstrando uma certa peculiaridade na utilização dos conceitos, o professor tem a oportunidade de saber como o aluno pensa e o que ele já assimilou do pensamento formal ou informal.

Durante as correções o professor não quer se deparar com erros dos seus alunos, ele anseia que todos cheguem ao conhecimento formal esperado dos seus ensinamentos. Mas o fato é que o aprendizado não é consequência direta do ensino e por isso existem as avaliações (FIALHO, 2018), logo o erro é uma ocorrência importante a se considerar dentro dos processos de ensino e de aprendizagem, o que leva a questionamentos de como ele deve ser encarado nesse processo. É fato também que o erro carrega uma perspectiva negativa nesse processo, e por isso existe o discurso de que deve ser combatido (SPINILO, et al. 2014). Entretanto, para uma superação consciente do pensar errado, é necessário reverter a perspectiva de fracasso atrelada ao erro e perceber que um trabalho ativo de ação e reflexão é capaz de construir as ferramentas complexas da inteligência necessárias, para a superação (LA TAILLE, 1997).

É nesse sentido que podemos explorar o estudo do erro frente a aprendizagem de Matemática, encarando-o como uma proposta de construção do conhecimento. Nessa conjuntura, o erro não é visto como fracasso, mas assume um papel de coadjuvante no processo de aprendizagem, desde que subsídios sejam administrados para sua superação.

Ainda segundo La Taille (1997), “o erro terá valor como fonte de enriquecimento somente se ele for observável para o aluno” (p. 36). Na visão de La Taille (1997), o aluno precisa entender onde e por que errou. E mais, ele precisa entender a gravidade ou qualidade do erro concebido. Na visão de Cury (2015), “o erro se constitui como um conhecimento, é um saber que o aluno possui [...]” (p. 82) e por isso precisa de intervenções didáticas que gerem os questionamentos e desestabilizações das certezas levando a uma ressignificação daquele conhecimento.

Na visão de Borasi (1996, apud. CURY, 2015), o erro pode ser visto como uma espécie de trampolim no seu processo de investigação. Assim, professor e aluno precisam refletir juntos sobre os erros e deste modo reestruturar o conhecimento formal correto. Dentro dessa perspectiva, é preciso dar espaço para que os alunos formulem

suas conjecturas e exponham com liberdade suas ideias. Nas palavras de La Taille (1997),

devemos encorajar as várias e inteligentes tentativas dos alunos em acharem as respostas certas, as teorias corretas, os procedimentos eficazes; devemos dar valor aos seus erros (aqueles advindos de processo legítimo de reflexão), mas não deixar de dizer: “o que você fez é muito interessante, mas ainda não é correto.”. Do contrário, iludimos os alunos ou passamos a ideia relativa de que todas as ideias têm o mesmo valor. (p. 38).

Diante desses entendimentos sobre os erros, é preciso pensar nas propostas de intervenção que resultem na ressignificação dos novos conhecimentos. Dentro da Análise de Erro, o professor irá agir como um investigador, buscando identificar e classificar os tipos de erros. E nesse processo ele tem oportunidade de levantar conjecturas para os possíveis erros de acordo com sua experiência no assunto abordado.

O estudo dos erros e o mapeamento das dificuldades possibilitam ao professor a averiguação de estratégias que resultem em atividades e abordagens capazes de promover uma maior compreensão, seja por provocar no aluno o questionamento de suas estratégias ou por evitar que ele tome caminhos que o levem ao erro.

Foi nessa perspectiva que se iniciou um estudo sobre erros dos alunos no conteúdo de Análise Combinatória. Esse é um objeto de conhecimento em que os alunos apresentam muita dificuldade e, até mesmo os professores podem enfrentar uma certa insegurança, como indica a pesquisa de Sabo (2010) em entrevista com professores do Ensino Médio de escolas particulares e públicas, buscando compreender por meio da entrevista semiestruturada, quais saberes poderiam ser identificados nas falas dos professores. Dentre os resultados dessa pesquisa, chama-se a atenção para o problema da interpretação dos enunciados e no reconhecimento se a ordem importa ou não, o que se apresentou como uma das dificuldades para alguns dos entrevistados. É importante que o professor consiga entender e superar suas dúvidas e, por meio desse gesto, ele se

tornar mais sensível às dificuldades apresentadas pelos alunos. O professor que não buscar sanar suas incertezas, certamente influenciará seus alunos ao erro.

A pesquisa de Pessoa e Borba (2010) com alunos do 2º ano do Ensino Fundamental ao 3º ano do Ensino Médio, envolvendo escolas públicas e particulares, levantou dados estatísticos em uma atividade que visava verificar o desempenho dos alunos em questões de raciocínio combinatório. A atividade foi composta por oito questões que continham problemas de Produto Cartesiano, Permutação, Arranjo e Combinação. Embora o foco da pesquisa fosse a construção do raciocínio combinatório, dentre os principais dados apresentados nessa pesquisa, destacamos que as questões mais difíceis para os alunos foram as de Combinação, em segundo lugar apareceram os problemas de Permutação e depois os de Arranjo, sendo o mais fácil o de Produto Cartesiano.

Em contrapartida, a pesquisa de Vega (2014), feita com 128 alunos do 6º ano do Ensino Fundamental, mostrou que a quantidade de etapas que o problema de combinatória vai assumir, influencia na dificuldade de resolução. Assim, quando o número de etapas é pequeno entre 2 e 3, o nível de acerto é bastante similar entre os diferentes tipos de problemas (Arranjo, Combinação, Permutação e Produto Cartesiano), mas quando os números de etapas são maiores, a ordem evidenciada por Pessoa e Borba (2009) não é estabelecida. Portanto, problemas de Permutação podem ser mais fáceis que os problemas de Produto Cartesiano e problemas de Combinação podem apresentar maiores níveis de acertos que problemas de Permutação.

Na busca por trabalhos correlatos foi identificado uma certa escassez de trabalhos que apresentassem a perspectiva da Análise de Erro como metodologia de ensino e aprendizagem para o conteúdo de Análise Combinatória. A pesquisa bibliográfica de Campos e Iglioni (2021), identificou que duas teses e 20 dissertações foram apresentadas no período de 2015 a 2019, no âmbito do ensino e da aprendizagem de Análise Combinatória. Essas pesquisas foram alocadas em 5 grupos, são eles, grupo 1: pesquisas que apresentam propostas de ensino e/ou sequências didáticas sobre análise

combinatória; grupo 2: pesquisas que visam investigar a análise combinatória presente em documentos curriculares e em livros didáticos; grupo 3: pesquisas que investigam a análise combinatória e a formação do professor; grupo 4: pesquisas que investigam recursos para o ensino da análise combinatória e grupo 5: pesquisas que investigam as estratégias de resolução de problemas combinatórios.

Nota-se que nesse levantamento não há categorias que investiguem os erros cometidos pelos estudantes, alertando para a falta de pesquisas que os investiguem nesse conteúdo. Diante do exposto acima, foi elaborada a seguinte questão de pesquisa: de que modo a metodologia de ensino e aprendizagem Análise de Erro pode contribuir para a construção de conhecimentos em Análise Combinatória? O objetivo geral é investigar de que modo a metodologia de ensino e aprendizagem de erros pode contribuir para a construção de conhecimentos em Análise Combinatória. Deste modo, propõe-se levantar novas hipóteses e questionamentos que possam contribuir para o aprimoramento da Educação Matemática frente às produções redigidas por alunos.

A Análise Combinatória

A Análise Combinatória é um importante conteúdo da Educação Básica, que por recomendação dos documentos oficiais (BRASIL, 1996, 2018), deve ser estudado pelo aluno desde o Fundamental I até o Ensino Médio. A Análise Combinatória é um ramo da Matemática que estuda as estruturas discretas, segundo Morgado, Pitombeira de Carvalho, Pinto de Carvalho e Fernandez (1991) “é a parte da Matemática que analisa estruturas e relações discretas” (p. 1). Uma estrutura consiste em um conjunto na qual os elementos estão organizados de alguma forma, usualmente, por meio de propriedades, operações e/ou relações entre eles. Em Matemática, um conjunto é discreto se ele apresenta uma quantidade finita de elementos ou a mesma quantidade de elementos que os números naturais. Merayo (2001, apud PESSOA e BORBA R., 2010) afirma que a Análise Combinatória é a técnica que conta quantos objetos há em um conjunto sem a necessidade de listá-los um a um.

Os problemas da Análise Combinatória demandam um raciocínio específico para a contabilização das possibilidades. Na visão de Borba R., Rocha C. e Azevedo J. (2015), o raciocínio combinatório pode ser entendido como

um modo de pensar presente na análise de situações nas quais dados determinados conjuntos, deve-se agrupar os elementos dos mesmos de modo a atender critérios específicos (de escolha e/ou ordenação dos elementos) e determinar-se – direta ou indiretamente – o número total de agrupamentos possíveis (p. 1349).

Ou seja, é a busca por possíveis relações combinadas a procedimentos sistemáticos que geram as possibilidades das situações problematizadas inicialmente, e que a princípio podem não ter indicações claras das estratégias a serem requisitadas (PESSOA e BORBA, 2010). Ainda segundo essas autoras, esse modo de pensar é muito útil no cotidiano por solucionar problemas envolvendo organização de equipes além de contribuir com outras áreas do conhecimento como a Biologia, Química, Estatística, Computação entre outras (PESSOA e BORBA, 2010).

Além disso, segundo Pessoa e Borba (2010), o raciocínio combinatório vai além da enumeração de elementos de um conjunto. Isto é, baseado no raciocínio multiplicativo, contam-se grupos de possibilidades por meio de uma ação sistemática envolvendo fórmulas ou estratégias diversas que possibilitem resolver o problema dentro dos requisitos específicos.

No entanto, os problemas tratados na Educação Básica reduzem-se a problemas mais simples envolvendo os conceitos de Arranjo, Combinação e Permutação. Com esses conceitos matemático, é possível resolver uma infinidade de problemas, além de serem as técnicas de maior simplicidade de aplicação. Uma outra vantagem em tê-las em mãos, está na possibilidade de uso em problemas de probabilidade finita como aponta Morgado, Pitombeira de Carvalho, Carvalho e Fernandez (1991).

Segundo os Parâmetros Curriculares Nacionais – PCN (BRASIL, 1998), o objetivo do estudo desse conteúdo “é levar o aluno a lidar com situações que envolvam diferentes tipos de agrupamentos que possibilitem o desenvolvimento do raciocínio combinatório e a compreensão do princípio multiplicativo para sua aplicação no cálculo

de probabilidades.” (BRASIL, 1998, p. 52). Mas é no Ensino Médio em que esse conteúdo é trabalhado com mais profundidade, fazendo-se necessário a construção de um raciocínio combinatório mais apurado para resolver os problemas. Além disso, é nessa fase que os alunos dispõem de mais conhecimentos matemáticos e conhecimentos extraescolares para lidar com essas situações.

A BNCC (BRASIL, 2018) não expressa recomendações específicas para o conteúdo no Ensino Médio. Apenas coloca como uma habilidade a ser trabalhada na competência específica 3 ou na unidade temática Probabilidade e Estatística indicando um trabalho com o Princípio Multiplicativo e o Princípio Aditivo em problemas envolvendo estratégias diversas. “(EM13MAT 310) Resolver e elaborar problemas de contagem envolvendo agrupamentos ordenáveis ou não de elementos, por meio dos princípios multiplicativos e aditivo, recorrendo a estratégias diversas, como o diagrama de árvore” (BRASIL, 2018, p. 537).

Vale ressaltar que a BNCC traz duas possibilidades de articulação dos conteúdos: uma por meio de competências e outra por meio de unidades temáticas. Desse modo, as habilidades ficam alocadas dentro de cada competência ou em cada unidade temática e podem ser trabalhadas em qualquer ano do Ensino Médio.

A BNCC (BRASIL, 2018) recomenda para o Ensino Fundamental trabalhar a contagem dentro de situações problemas que permitam o uso de diferentes tipos de registros. Segundo a recomendação, problemas de contagem devem

estar restritos àqueles cujas soluções podem ser obtidas pela descrição de todos os casos possíveis, mediante à utilização de esquemas ou diagramas, e, posteriormente, àqueles cuja resolução depende da aplicação dos princípios multiplicativo e aditivo e do princípio da casa dos pombos (BRASIL, 2018, p. 275).

As menções ao conteúdo descritas nas habilidades ocorrem ainda nas séries iniciais, embora não haja nenhuma habilidade que expresse claramente o que deve ser trabalhado. No 4º ano do Ensino Fundamental, na unidade Números, há uma menção aos problemas de contagem. No 5º ano, na unidade Números, também aparece a indicação “Problemas de contagem do tipo: “Se cada objeto de uma coleção A for

combinado com todos os elementos de uma coleção B, quantos agrupamentos desse tipo podem ser formados?” (BRASIL, 2018, p. 294). Depois disso, no 8º ano, menções são feitas nas unidades Números e Probabilidade e Estatística como destacam as citações abaixo referentes ao 5º e 8º ano respectivamente:

(EF05MA09) Resolver e elaborar problemas simples de contagem envolvendo o princípio multiplicativo, como a determinação do número de agrupamentos possíveis ao se combinar cada elemento de uma coleção com todos os elementos de outra coleção, por meio de diagramas de árvore ou por tabelas (p. 295).

(EF08MA03) Resolver e elaborar problemas de contagem cuja resolução envolva a aplicação do princípio multiplicativo (p. 313).

(EF08MA22) Calcular a probabilidade de eventos, com base na construção do espaço amostral, utilizando o princípio multiplicativo, e reconhecer que a soma das probabilidades de todos os elementos do espaço amostral é igual a 1 (BRASIL, 2018, p. 315).

No Ensino Médio, não se nota muito destaque para esse conteúdo, embora nesse nível ele devesse ser formalizado usando a notação matemática e algumas demonstrações. Diante dessas considerações iniciais sobre Análise Combinatória e sobre os erros é preciso refletir sobre as demandas contingentes da sala de aula.

Análise de Erro: uma proposta metodológica de ensino e aprendizagem

O estudo da Análise de Erro tem foco voltado para a análise das produções dos alunos. Ao se fazer isso, apropria-se de uma metodologia chamada análise de conteúdo. Essa metodologia ganhou notoriedade a partir do trabalho de Bardin (1997, p. 42, apud. CURY, 2015, p. 64), que a define.

Designa sobre o termo Análise de Conteúdo: um conjunto de técnicas de análise das comunicações visando obter, por procedimentos, sistemáticos e objectivos de descrição dos conteúdos das mensagens, indicadores (quantitativos ou não) que permitam a inferência de conhecimentos relativos às condições de produção/recepção (variáveis inferidas), destas mensagens (BARDIN, 1997, p. 42, apud. CURY, 2015, p. 64).

A Análise de Conteúdo se modela de diferentes formas, podendo trabalhar com vertentes teóricas, com a intencionalidade do pesquisador que a desenvolve, ou ainda adotar conceitos relacionados à semântica, estatística do discurso, ou propor inferências

por meio da identificação objetiva de características das mensagens (WEBER, 1985; BARDIN, 1977 apud. CURY, 2015). Dessa forma, dentro do viés da Matemática e da Educação Matemática, entende-se a necessidade de se investigar as produções dos alunos a fim de levantar questionamentos com o objetivo de aprimorar ou reformular práticas educacionais.

Nesse sentido, a simples correção que um professor faz diariamente em atividades ou provas não se configura como a proposta aqui apresentada, pois não se trata de uma pesquisa aprofundada nas evidências destacadas em uma correção. Porém é preciso ter sensibilidade para analisar as soluções, não com o intuito classificatório de julgar certo ou errado, e sim entender qual tipo de conhecimento foi expresso pelo aluno. Essas formas de conhecimento podem evidenciar se há dificuldades ou não no processo de ensino aprendizagem.

Assim, a Análise de Erro tem dois momentos principais que evidenciam a proposta como uma vertente eficaz de ensino e pesquisa. A primeira parte é a análise das produções e classificação dos tipos de erros e, em um segundo momento, investigar o porquê e como tais conhecimentos foram adquiridos ou adaptados nessas produções e isso inclui tanto os erros como os acertos. Se apenas classificarmos os tipos de resposta encontradas, sem levantar as indagações ou hipóteses para as tais, obteremos uma investigação muito superficial da proposta da Análise de Erro, o que beneficia muito pouco professores e alunos no dia a dia (CURY, 2015, p. 65).

Uma análise das respostas dos alunos em questões matemáticas, seja ela enquanto metodologia em sala de aula, ou em uma pesquisa formal envolvendo projetos, teses ou dissertações, consiste nas escolhas de questões, levantamento de hipóteses e objetivos a serem alcançados (CURY, 2015, p. 66). Em seguida é feita uma leitura onde se destaca as primeiras impressões dos resultados (respostas em branco, resposta incompleta, erros de uma espécie x), e depois é registrado um código para cada tipo de solução.

Uma releitura dos registros já codificados também se faz necessária, esta, por sua vez, tem o objetivo de estabelecer agrupamentos dos dados, segundo os critérios estabelecidos anteriormente, uma vez que as respostas já possuem códigos. Agora é hora também de destacar as que apresentam pontos em comum para construir as classes ou tabelas de frequências de forma mais refinada.

As respostas dos alunos precisam ser interpretadas. Para isso, é necessário, segundo Cury (2015), fazer algumas perguntas ao texto, como por exemplo: o que os alunos gostariam de dizer? O que eles demonstram saber? O que eles demonstram não saber? A partir daí, estratégias de ensino podem ser revisadas para superação dos erros.

É importante que haja um momento de correção das atividades com os alunos participantes para que aconteça a oportunidade de eles tirarem dúvidas e esclarecimento de conceitos. Além disso, pode-se montar um questionário onde o aluno possa dizer o que conseguiu aprender após essa última reapresentação do conteúdo, o que ainda ficou com dúvida, e ainda sugerir uma justificativa de suas respostas em cada item da atividade, explicando o porquê, no seu ponto de vista, cometeu tais erros.

Uma outra etapa também poderia ser agregada neste estudo que é a abordagem de Borasi (1996, apud. CURY, 2015), chamada Taxonomia de uso dos erros. O objetivo de tal abordagem é a exploração dos erros como uma forma de aprendizagem, onde se toma por hipótese aquele erro cometido e se investiga sua validade em diversas situações até que fique claro para o aluno o porquê daquela estratégia não funcionar.

Nesse sentido, levando em consideração que o erro também é uma forma de conhecimento (CURY, 2015), quando professor e aluno se propõem a investigar essas situações como uma problemática em sala de aula e com a estratégia didática correta, as certezas podem ser desequilibradas. Desse modo, obtendo uma reestruturação do conteúdo, conseqüentemente um aprendizado mais significativo é estabelecido.

PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

Esta pesquisa é de cunho qualitativo e tem o foco nas produções dos alunos, pois o objetivo é classificar as respostas e obter uma análise das causas e consequências dos erros. Para isso, foram elaboradas uma atividade diagnóstica, denominada Teste Diagnóstico que foi composto por cinco questões do ENEM, um questionário que visa levantar o perfil do aluno e por último uma entrevista clínica, na qual o aluno pudessem revelar de forma mais detalhada o raciocínio.

Os sujeitos da pesquisa são três alunos que cursavam o 2º e 3º ano do Ensino Médio, sendo dois estudantes de escola particular e um da Rede Estadual de Ensino. Foi mapeado no questionário perfil que os alunos apresentam dificuldade no conteúdo com relação a interpretação dos enunciados e no uso de fórmulas, seja por não saber quando usá-las ou por não conseguir distinguir Arranjo de Combinação.

Alguns resultados do Teste Diagnóstico

Em uma primeira leitura, verificaram-se três tipos de respostas: certa, errada e em branco. As respostas certas foram as que tiveram o uso correto das fórmulas ou através de uma ideia original do aluno. Já as respostas erradas se expressaram, na maioria das vezes, por uso incorreto das fórmulas ou pequenos equívocos, como por exemplo, fazer os cálculos corretos, mas escrever a resposta final errada, ou ainda por cometer erros elementares de cálculo.

Em uma segunda leitura identificamos que os erros apresentavam características conceituais diferentes. Como por exemplo, deixavam de incluir objetos na contagem ou retiravam ordem de configurações ordenadas. Sendo assim, classificamos as produções da seguinte forma.

Classe A: corresponde às respostas corretas, ou seja, o aluno usou algum conceito da Análise Combinatória para justificar sua conclusão final.

Classe B: resposta correta, porém incompleta.

Classe C: resposta correta, mas o aluno não recorre a conceitos formais da Análise Combinatória.

Classe D: corresponde às respostas em branco.

Classe E: resposta errada, usou a fórmula de forma equivocada.

Classe F: usou um raciocínio correto, mas escreveu a resposta errada no final.

De posse dessas classes, analisaremos cada uma das questões. Para preservar a identidade dos três estudantes da pesquisa, utilizaram-se os códigos A1, A2 e A3 no lugar dos nomes. O pesquisador deste trabalho será chamado de P e o seu orientador será chamado de O. Aqui será apresentado dados parciais da pesquisa, por isso será apresentado apenas as respostas e as classificações referentes a uma das questões do Teste Diagnóstico.

Análise da questão 3

A questão 3 têm o seguinte enunciado (Figura 1).

Figura 1 - Enunciado da questão 3

3. (Enem, 2013) Um banco solicitou aos seus clientes a criação de uma senha pessoal de seis dígitos, formada somente por algarismos de 0 a 9, para acesso à conta corrente pela internet. Entretanto, um especialista em sistemas de segurança eletrônica recomendou à direção do banco recadastrar seus usuários, solicitando, para cada um deles, a criação de uma nova senha com seis dígitos, permitindo agora o uso das 26 letras do alfabeto, além dos algarismos de 0 a 9. Nesse novo sistema, cada letra maiúscula era considerada distinta de sua versão minúscula. Além disso, era proibido o uso de outros tipos de caracteres. Uma forma de avaliar uma alteração no sistema de senhas é a verificação do coeficiente de melhora, que é a razão do novo número de possibilidades de senhas em relação ao antigo.
- Determine o coeficiente de melhora da alteração recomendada.

Fonte: Brasil, 2020.

O aluno A3 (Figura 2) resolveu corretamente a questão 3, por isso essa resposta se associa à Classe A (corresponde às respostas corretas, ou seja, o aluno usou algum conceito da Análise Combinatória para justificar sua conclusão final).

Figura 2 - Solução do aluno A3 questão 3

$3 = 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 10^6$
 $62 \cdot 62 \cdot 62 \cdot 62 \cdot 62 \cdot 62 = 62^6$
 $R = \text{o coeficiente de melhora é } 62^6 / 10^6$

Fonte: Protocolo de pesquisa

Na entrevista, o aluno não estava conseguindo se lembrar muito bem sua solução e estava se sentindo um pouco bloqueado para falar. Então a orientadora que conduzia a entrevista ajudou a aluna A3 a explicar sua solução.

Aluno A3: Bom eu acho que nessa questão aí, como [...] ele tá pedindo [...] uma senha com 6 dígitos e... tinham 10 números, né? Pra... fazer essa combinação então... eu não sei direito que eu fiz aí...

O: Olhe aqui, deixa eu te lembrar. Aqui acho que você pensou assim: eram os 6 dígitos, né? Aí inicialmente eles podiam usar de 0 a 9 então eram 10 caracteres, certo?

Aluno A3: Sim, exato!

O: Aí você tinha para cada, como podia repetir, não falou nada que tinha que ser diferente, não disse nada, certo?

Aluno: Isso!

O: Para cada um você tinha 10 opções, deu 10 elevado a 6, certo?

Aluno A3: Sim, exatamente!

O: Depois pelo que estou vendo por esta continha aqui, como ele disse “agora poderia usar também 26 letras do alfabeto”.

Aluno A3: Uhum!

O: Ele disse também que “cada letra maiúscula era considerada distinta da versão minúscula”,

Aluno A3: Isso, isso!

O: então vai ficar o dobro, certo?

Aluno A3: 56 letras...

O: Acho que você fez $26 + 26$, 52.

Aluno A3: isso 52.

O: que é maiúscula e minúscula. E somou aqui aos 10 números, aos 10 algarismos que você tinha.

Alunos A3: Isso, isso!

O: dando um total 62.

O: E como não disse “era proibido o uso de outros tipos de caracteres”, mas não disse se podia repetir ou não. Então como pode repetir, você agora tinha 62 opções para cada [...] [um] dos dígitos da senha, certo?

Alunos A3: Sim!

O: 62^6 ... Depois me disse assim, que ela pode avaliar o coeficiente de melhora é a razão “do novo número de possibilidade de senhas em

relação ao antigo” então novo é esse e o antigo esse. Foi isso que você fez?

Alunos A3: Isso! Isso mesmo.

O: Se lembrou de alguma coisa diferente que você pensou?

Alunos A3: Não, foi isso mesmo! (sic) (Protocolo de pesquisa)

Nesse diálogo não foi possível notar a presença do uso de fórmulas durante a execução da solução, mas há vestígios de uma construção puramente baseada em sucessivas escolhas, que é uma estratégia destacada por Lima (2015 p. 4) como uma das mais utilizadas pelos estudantes.

Os alunos A2 (Figura 3) e A1 (Figura 4) usaram a fórmula do Arranjo para contar as possibilidades, mas ao fazer isso, muitos casos deixaram de ser considerados. No caso do aluno A1, erros mais graves foram cometidos, pois o aluno escreve

$A_{10,6} = \frac{10!}{6!}$ e $A_{62,6} = \frac{62!}{24}$. Isso pode indicar que os parâmetros da fórmula foram

trocados contribuindo para uma estimativa ainda menor dos resultados. Por isso, essas soluções se enquadram na Classe E (resposta errada, usou a fórmula de forma equivocada).

Figura 3 - Solução do aluno A1 questão 3

3)

agora: $10 + 26.2 = 62$ dígitos

antes: 10 dígitos

antes:

$$A_{10,6} = \frac{10!}{6!} = 5040 \text{ poss. b.}$$

depois:

$$A_{62,6} = \frac{62!}{24}$$

Coefficiente:

$$\frac{62!}{24} \div 5040 = \frac{62!}{120960}$$

Fonte: Protocolo de pesquisa.

Na entrevista, o aluno A1 relatou como segue no diálogo abaixo.

Aluno A1: Então, eu comparei o antes com o depois como está escrito aí, eu botei “antes”, “depois” no início eu botei até “agora” mas quer dizer “antes”, né? Era o que quis dizer. E antes eram só 10 dígitos, então eu fiz pelo número de antes, fiz as possibilidades de antes, aí seria $10!/6!$ que daria 5040, na conta que fiz. E depois eu coloquei antes da vírgula ali, o 62 que seria o número de dígitos possíveis assim como eu fiz o antes, e o 6 ali seira... acho que seria o 6!, né? Mas eu acho que em cima eu não coloquei 6!, botei só o 6 pelo que eu estou vendo, eu acho, não tenho certeza. Mas eu sei que em baixo está uma coisa em cima está outra. Não, 6! não, 24 [24!], tá certo, isso mesmo que eu pensei.

Orientadora: É porque no outro você já colocou o resultado, 5040.

Aluno A1: Na outra eu fiz e pensei nisso. Depois eu não lembro porque eu coloquei 24, provavelmente eu fiz na fórmula direto. Provavelmente apliquei a fórmula direto e coloquei 24 de cabeça.

O: Na fórmula, ficaria aqui, 62 e 6 [n, k respectivamente], ficaria $62 - 6$ é 56, 56! essa aqui certo?

Aluno A1: Isso, aí eu botei 24, certo?

O: É, você lembra de onde saiu esse 24 [...]?

Aluno A1: Não, não lembro. Provavelmente eu errei mesmo. (sic) (Protocolo de pesquisa).

Percebe-se que além de o aluno utilizar a fórmula de forma equivocada, ele também erra os seus parâmetros. Essas são dificuldades evidenciadas por Lima (p. 71, 2015) em que o autor destaca que a *utilização das fórmulas* se apresenta como uma dificuldade, pois além de o aluno ter que se lembrar delas, ainda pode errar na substituição dos valores do problema.

O aluno A1 também foi indagado sobre a escolha da fórmula.

O: E você escolheu aquela fórmula por quê?

Aluno A1: A do arranjo?

O: É! Por que que você acha que isso daí é um problema de arranjo?

Aluno A1: Olha eu não lembro ao certo, mas acho que eu coloquei isso porque como são letras e números. Sabe, são 6 dígitos, né?

O: Uhum.

Aluno A1: E são letras e números, eu acho que eu pensei que seria diferente, é não seria igual àquela primeira questão.

O: Você acha que seria diferente porque tem letras e números misturados.

Aluno A1: Isso.

O: A primeira questão que você está falando é essa aqui [mostra questão número 1].

Aluno A1: Isso! É aí seira tudo igual, né? Seria todas as pessoas. Aí seriam letras e números, letra maiúscula, minúsculas.... Mas minha maior dificuldade mesmo sempre foi, em análise Combinatória, sempre foi identificar quando usar tal fórmula.

Nesse diálogo o aluno confessa que sente dificuldade em identificar quais fórmulas deve usar. Ou seja, ele não consegue identificar no enunciado quando uma configuração exige ordem ou não.

Figura 4 - Solução do aluno A2 questão 3

3) $\frac{10!}{(10-6)! \cdot 4!} = \frac{10!}{4! \cdot 6!}$ $\frac{62!}{(62-6)! \cdot 56!} = \frac{62!}{56! \cdot 10!}$

$\frac{10!}{4! \cdot 6!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6!}{4! \cdot 6!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{4!} = \frac{5040}{24} = 210$

$\frac{62! \cdot 4!}{56! \cdot 10!}$

Fonte: Protocolo de pesquisa.

Na entrevista clínica, o aluno A2 explicou que seu raciocínio é feito por meio de “tracinhos”, mas ao reler o enunciado da questão, ele percebe que talvez pudesse repetir elementos na hora de fazer a contagem.

[...] meu raciocínio da minha resolução que tá aqui no papel, eu não lembro, mas agora eu [...] acho faria diferente. [...] Tipo, tá dizendo que um banco solicitou aos seus clientes uma nova senha de 6 dígitos, formados somente por... Tipo de zero a 9 são 10 algarismos. É, deve ser 10 algarismos. Eu faria 10 fatorial ali. Tipo, como vai ter... Ah não, não... Mas ele não disse se pode repetir as letras. Nossa, cara, eu realmente não lembro. (sic) (Protocolo de pesquisa, aluno A2).

O aluno A2 foi indagado se em sua solução, havia considerado a repetição de elementos.

Eu imagino que sim, por ter utilizado... Deixa eu ver aqui. Não, eu acho que não considerei a repetição, eu devo ter pensado igual ao raciocínio da 1 ali, listar os tracinhos ali. [...] Seria 6 tracinhos e aí via as possibilidades, se seria basicamente isso, [...] aí eu acredito que eu não tenha pensado na repetição dos algarismos. Eu não pensei. E 62! provavelmente tá do novo. Eu pensei que seria 26 mais 26

considerando maiúsculo e minúsculo. $26 + 26$ vai dar o que, 52? E aí com os 10 algarismos ali, que também aparentemente pode ser utilizado, aqui pelo menos no meu raciocínio, ia dar 62 e aí como pode ser só 6 eu ia utilizar 62! sobre... o mesmo raciocínio que eu apliquei anteriormente. É foi exatamente o que eu fiz isso. E... aí eu ia achar essa razão e aí como no enunciado diz pra... O coeficiente de melhora, se não me engano é o melhor sobre o pior... O novo sobre o anterior, é isso? É a razão do novo sobre o anterior. E aí eu coloquei esse 62 sobre 56, [...] e botei 10 sobre 4! E multiplico pelo inverso e encontra isso daí. Foi isso, mas eu não considerei a repetição, pelo menos tentando lembrar aqui no meu raciocínio, eu não considerei a repetição [...]. (sic) (Protocolo de pesquisa, aluno A2).

Percebe-se que o aluno tem clareza do está fazendo para chegar à solução. Embora tenha errado a questão, percebeu, ao reler, que a repetição poderia ser considerada. A estratégia do Princípio Multiplicativo, geralmente apresentada com uso de espaços grifados, é altamente difundida para evitar o uso de fórmulas. E esse aluno demonstra ter bom domínio da técnica para contar as possibilidades. Nos momentos seguintes da entrevista, o aluno apresenta a resposta correta para essa questão, o que demonstra a autonomia em processar conexões entre a resposta dada e a nova interpretação assumida na releitura do enunciado, evidenciando a conclusão de Berti (2007).

A seguir registramos em uma tabela as frequências de ocorrência de acordo com a classificação obtida em cada questão.

Tabela 1 - Frequência de ocorrências

Classes	Frequência por Questão				
	Questão 1	Questão 2	Questão 3	Questão 4	Questão 5
A	0	0	1	0	2
B	1	0	0	1	0
C	0	0	0	2	0
D	0	1	0	0	1
E	1	2	2	0	0
F	1	0	0	0	0

Fonte: Elaboração própria.

Algumas considerações

A partir da categorização das soluções, foi possível levantar algumas hipóteses para as possíveis respostas dadas pelos alunos, mas nem todas elas se confirmaram durante a entrevista e isso será evidenciado ao longo do texto.

Com essa atividade constatamos que o aluno A1 apresenta dificuldade com o uso de fórmulas. Ele ainda não consegue reconhecer as características da ordem empregada nas configurações impostas pelo problema. O aluno reconhece que tem dificuldade nessa parte. E quando lhe foi perguntado em quais problemas ele se sentia mais confiante para responder ou se ele percebia quais problemas ele não conseguia resolver, o estudante disse:

Sim, já de cara eu consigo identificar as questões que eu ainda não consigo fazer e as questões que eu consigo, né? As questões que eu não consigo fazer, geralmente envolvem as fórmulas, questões puramente de fórmulas, ou que necessitam da fórmula. Por quê? Porque eu estou com uma dificuldade de identificar qual fórmula eu tenho que usar. Como eu falei na primeira questão que eu achava que era a fórmula da combinação, por causa daquilo que eu falei, mesmo assim quando eu fiz a 1 [questão 1] eu lembre que eu não tinha certeza. Porque eu fico confuso com qual fórmula eu devo usar para qual questão. Não é? Então essas questões de identificar as fórmulas eu tenho dificuldade por enquanto. As questões que eu não tenho dificuldade são justamente questões como essa última, em que eu posso resolver com tracinhos, ou mesmo essas questões de padrão, tem esse padrão tipo a 4, que eu não sei por que eu não pensei nisso fazendo a questão, mas eu geralmente acerto. O resto que é de fórmula eu geralmente não acerto. (sic) (Protocolo de pesquisa, Aluno A1).

Desse modo percebe-se que o aluno não consegue adaptar a técnica dos “tracinhos” a qualquer problema, ou seja, usar o Princípio Multiplicativo. Além disso, fica subentendido que existem questões que se resolvem por “tracinhos” e questões que se resolvem por fórmulas.

O aluno A2 se arriscou um pouco menos nas questões ao deixar duas delas em branco, porém, notou-se que o Princípio Multiplicativo é sua principal estratégia para solucionar os problemas da Análise Combinatória. Antes da entrevista, essa estratégia não era aparente. Acreditava-se que o aluno A2 tinha bom domínio das fórmulas. Isso ficou constatado, por exemplo, ao escrever $9!/2!$ na questão 1, que é um argumento de

Arranjo que resolveria a questão, e na questão 4 quando utilizou a fórmula da Combinação para concluir a questão. No caso da questão 1, ficou claro para o pesquisador que o aluno usava a fórmula do Arranjo para determinar a solução, mas na entrevista, identificou-se que o aluno utilizava o princípio multiplicativo como principal ferramenta para construir suas respostas. E desse modo, ao escrever a resposta final, utilizava essa escrita reduzida por motivos estéticos, como afirmou em entrevista.

Nota-se que o aluno A2 apresenta um pouco de dificuldade com a interpretação de alguns enunciados, como é o caso da questão 3, em que na primeira vez que tentou fazê-la, não identificou que deveria considerar a repetição de algarismos. Na escrita da questão 4, antes da entrevista, ficou subentendido que o aluno identificou que se tratava de uma questão na qual a repetição não deveria ser considerada por utilizar a fórmula da Combinação. Mas na entrevista, identificou-se que o aluno, a princípio, não sabia responder à questão e somente quando viu o quadro, teve o *insight* de comparar o número de partidas com a fórmula da Combinação. Apesar de o aluno demonstrar ter clareza de quando utilizar a fórmula da Combinação, haja vista que ele identificou que a ordem dos jogadores não define uma nova partida com exemplos. Observou-se que ele tem um pouco de dificuldade em identificar esses detalhes nas hipóteses do enunciado.

Acreditava-se que o aluno tinha o domínio das fórmulas, pois sua forma reduzida de escrita levou o pesquisador a acreditar que ele usava as fórmulas para conclusão, como foi o caso das questões 1 e 4 desse mesmo aluno. Mas, na verdade, o aluno consegue fazer o transporte do pensamento do Princípio Multiplicativo para a forma reduzida de escrita, como acontece nas questões de múltipla escolha em exames de concursos.

É tipo assim, eu acho feio escrever as contas e tudo mais. Porque eu faço as contas e fica, nossa, tipo tudo rabiscado, fica tudo feio aí tipo eu achei vou deixar bonitinho. Vou escrever pelo menos a resposta, porque eu acho que se não me engano o raciocínio eu em outra folha, aquela conta ali é porque eu fiquei com preguiça mesmo [questão 4] de fazer em outra folha, mas o resto eu deixei tipo. Eu fiz em outra folha e tipo um pouco da resolução eu coloquei aí. E a questão 1 eu falei ah não vou ficar fazendo traço, vou colocar tudo em fatorial mesmo. Foi basicamente isso que pensei.

[...] Eu só fico fazendo provas objetivas e provas objetivas só tem tipo a letras (a), (b), (c), (d) e (e). Considerando que seja o Enem, né, que tem essas 5 opções, mas aí eu só botei resposta também. Foi por isso basicamente. (sic) (Protocolo de pesquisa, Aluno A2).

Em outro momento, o aluno confessa ter algumas dificuldades na interpretação dos enunciados das questões.

Eu tenho muito esse problema, o meu maior problema nas questões de matemática, não são as operações matemáticas, mas sim as interpretações que envolve. [...] eu vejo meu professor realizando as questões lá e me pergunto como é que eu vou chegar aqui. E tipo ele faz o que não quer e subtrai, e aí encontra a porcentagem, aí eu falo aí já é pedi demais de mim, foi mal, entende? Aí é basicamente isso, interpretação também é uma parada que eu tenho que melhorar nas questões de Matemática. (sic) (Protocolo de pesquisa, Aluno A2)

Quanto ao aluno A3, analisando sua produção, percebeu-se que ele tinha bom domínio do conteúdo, mas em principal, na entrevista, gostaria de compreender o que o levou a escrever um resultado diferente das contas, como é o caso da questão 1 e o que ele pensou para resolver a questão 2, na qual ele usa a fórmula do Arranjo. A esse respeito o aluno responde o seguinte.

Aluno A3: Olha, eu sou uma pessoa extremante horrível em Matemática. Então eu vou tentar tudo até achar a que eu acho que tá certa. Então acho que foi isso que aconteceu.

O: O que aconteceu?

Aluno A3: Só não sei o que aconteceu nesse resultado final aí [referiu-se a solução da primeira questão].

O: Mas você acha o que, o que você pensou aqui, qual se adequa mais, ou por que essa era a primeira e você já usou a primeira aqui.

Aluno A3: Não! Eu acho que eu usei a que se adequava mais.

O: Entendi. E na segunda questão foi um pensamento também...

Aluno A3: Foi o mesmo pensamento também.

O: A segunda questão é a das pedras.

Aluno A3: Sim! Foi... segui a mesma linha de raciocínio. Foi a que eu achei que se adequava melhor. (sic) (Protocolo de Pesquisa, Aluno A3)

Percebe-se que, em algumas questões, os alunos encontram alguns obstáculos para resolver. Nesse momento, o aluno acredita que precisa encontrar alguma fórmula que se encaixe melhor naquela situação, ou seja, não existe uma outra forma de esquematização que possa conduzir a algum padrão que leve a solução. Apesar disso o aluno mostrou bom uso do Princípio Multiplicativo que é um método básico muito

difundido por resolver muitos problemas sem o uso de fórmulas (LIMA, 2015; PEREIRA, 2012).

Nenhum aluno usou a estratégia de listagem sistemática para resolver as questões, ou até mesmo referiu-se a ela durante a entrevista. Conjectura-se que essa estratégia não seja muito usada porque o número de possibilidades seja muito grande. Ela acaba não sendo muito útil na prática por esse motivo, embora essa estratégia possa dar uma ideia de como as possibilidades estão arranjadas (PEREIRA, 2012).

CONCLUSÃO

Essa pesquisa teve o objetivo de investigar de que modo a metodologia de ensino e aprendizagem da Análise de Erro pode contribuir para a construção do conhecimento da Análise Combinatória. As pesquisas Pessoa & Borba (2010), Lima (2015), Bortoloti et al. (2011, 2012, 2013) e Pereira (2012) vão mostrar que a Análise Combinatória é um conteúdo no qual os alunos apresentam muita dificuldade em todas as etapas do ensino, seja na graduação ou no ensino básico. Por isso faz-se necessário que novas metodologias sejam testadas para melhoria da qualidade de ensino. Este trabalho procurou encontrar, na produção dos alunos, elementos que propiciassem o conhecimento dos erros e acertos, visando subsidiar o planejamento de intervenções didáticas na sala de aula. No processo de ensino e aprendizagem, o erro se torna indissociável, uma vez que ensinar não é consequência direta para aprendizagem (FIALHO, 2018).

Por meio da metodologia da Análise de Erro, foi possível classificar as respostas dadas pelos estudantes descrevendo um panorama dos erros e acertos. Para além disso, identificou-se estratégia para soluções dos exercícios e geraram-se hipóteses sobre os possíveis erros, deixando para a etapa da entrevista a confirmação ou não dessas hipóteses.

A entrevista clínica trouxe esclarecimentos mais detalhados sobre as estratégias desenvolvidas pelos alunos e, de certa forma, mostra o quanto a escrita está distante de

todo o procedimento elaborado pelo aluno para resolver as questões. Além disso, a entrevista clínica provoca reflexões nos alunos sobre suas estratégias, como ocorreu com o aluno A2 que, ao rever o enunciado da questão e sua resolução, indagou-se se podia repetir elementos na questão 3. Naquele momento, o aluno não só pôde concluir que errou, mas também pôde corrigir seu erro, chegando à resposta correta quase por si só. Nas palavras de La Taille (1997), o erro precisa ser visível pelo aluno para ter valor de aprendizado significativo.

Pode-se conjecturar que os alunos sentem dificuldade no uso de fórmulas, em alguns casos, por não conseguirem classificar o tipo de problema combinatório inerente ao enunciado da questão. Este fato remete a um erro conceitual relativo à identificação de problemas combinatórios, ou seja, o aluno não reconhece se deve usar a Combinação, o Arranjo ou Permutação para encontrar a solução por ainda não ter construído tais conceitos. Alguns alunos confundem os parâmetros das fórmulas, como é o caso do aluno A1. Eis aí um outro tipo de erro, o erro conceitual relativo ao significado dos parâmetros contidos nas expressões. Tal erro consiste no fato do aluno conhecê-la, mas não compreender o significado dos seus elementos.

Na questão que envolvia a fórmula da Combinação, dois alunos utilizaram outras estratégias com o objetivo de chegar à conclusão da questão, não demonstrando com clareza um raciocínio combinatório para conclusão, embora tenham encontrado o valor numérico correto. A fórmula do Arranjo foi a mais usada de forma equivocada. Os alunos A1 e A3 resolveram as questões que envolviam Permutação por meio de um raciocínio multiplicativo experienciado em sala de aula. Foi observado que os alunos demonstraram ter mais facilidades para usar o Princípio Multiplicativo. Quanto à fórmula da Combinação, apenas um aluno conseguiu usá-la de forma correta.

Para além dos aspectos apresentados aqui, a pesquisa evidencia questões avaliativas. Mesmo passado um tempo sem estudar os conteúdos, os alunos demonstraram ter algum conhecimento sobre o assunto. Além disso, o diálogo com o aluno mostra outra forma de avaliar o que realmente foi aprendido. O confronto com o

que foi feito por ele e as suas ideias ressignificadas na nova leitura, mostram que o aprendizado ocorre também por essa via, como ficou comprovado na pesquisa de Berti (2007). Portanto o que se destaca aqui é a construção de questões ou ambientes onde o aluno possa dissertar sobre seus conhecimentos sem o uso de cálculos matemáticos previamente determinados, em que o estudante possa mostrar como fez, o que pensou, por que ele adotou aquela estratégia. Assim, com mais clareza, pode-se entender conhecimentos gestados pelos alunos e desse modo o estudante pode aprender mais na defesa do seu argumento do que na via tradicional de avaliação, na qual o professor corrige a prova e o discente recebe uma correção seca do que acertou ou errou.

Retornando à questão de pesquisa, a análise dos dados possibilitou inferir que a metodologia Análise de Erro pode contribuir para o ensino e aprendizagem de Análise Combinatória, na medida em que abre espaço para o aluno rever a sua resolução, refletir sobre ela com a orientação do professor e rever suas estratégias. Este processo pode contribuir para a construção do conhecimento matemático pelo aluno.

Observou-se também que a metodologia Análise de Erro também auxilia o professor na compreensão dos tipos de erros cometidos pelos alunos. E essa compreensão pode subsidiar o planejamento de intervenções didáticas que resultem na construção do conhecimento pelo aluno.

Por outro lado, a Análise Combinatória é um conteúdo matemático escolar que permite uma variação e combinação de estratégias de resolução de problemas pelos alunos. Eles podem usar registro gráfico, algébrico, numérico e a língua materna, resguardados os aspectos inerentes a cada problema. E muitas vezes, como esta pesquisa evidenciou, tais registros, ainda que combinados, não são suficientes para traduzir o pensamento do aluno. E some-se a esse fato, a dificuldade que alguns alunos apresentam com a utilização da linguagem matemática. Desse modo, utilizar a metodologia Análise de Erros combinada com a entrevista clínica pode potencializar as formas que alunos e professores dispõem para potencializar o ensino e a aprendizagem de Análise Combinatória.

Uma outra questão aflorada nesta pesquisa foi a comunicação em sala de aula. A análise dos dados mostrou o quão importante é ouvir o aluno, se colocar em escuta, criar ambientes de aprendizagem nos quais ele se sinta à vontade para expor suas ideias.

Por fim, longe de pretender ser um estudo conclusivo, este trabalho pretende contribuir com a pesquisa no ensino de Análise Combinatória, ofertando dados e análises que resultaram em conjecturas a serem testadas. Bem como, com a utilização da metodologia Análise de Erros que, ainda que não tenha sido executada em sua plenitude neste trabalho, mostrou-se um caminho para auxiliar o professor e o aluno nas reflexões acadêmicas, trazendo à tona elementos para otimizar o trabalho de ensinar e de aprender.

REFERÊNCIAS

- BERTI, N. M. **Análise de erro sob a perspectiva didático-pedagógica no ensino-aprendizagem de matemática: um estudo de casos da 5ª série**. 2007. 109 f. Dissertação (Mestrado em Educação). Universidade Estadual de Ponta Grossa, Ponta Grossa, 2007.
- BORBA C. Marcelo. ARAÚJO, J. de L. (Org). **Pesquisas qualitativas em educação matemática**. 6. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2019.
- BORBA, R.; ROCHA, C.; AZEVEDO, J. Estudos em Raciocínio Combinatório: investigações e práticas de ensino na Educação Básica. **Bolema**, Rio Claro, v. 29, n. 53, p. 1348-1368. dez. 2015.
- BORTOLOTI, R. D. M.; FERREIRA, J. R.; SANTOS-WAGNER, V. M. P. Análise das resoluções corretas e erradas de combinatória de futuros professores de Matemática. **Educação Matemática Pesquisa: Revista do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática PUC-SP**. São Paulo, v. 15, n. 3, p. 606–629, dez. 2013.
- BORTOLOTI, Roberta D. M.; SANTOS-WAGNER, Vânia M.; FERREIRA, J. R. Formação de professores: erros em análise combinatória (CO). In: **XIII CONFERÊNCIA INTERAMERICANA DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA**. Recife – Pernambuco, jun. de 2011.
- BORTOLOTI, Roberta D. et al. Primeiros resultados da pesquisa análise de erros no estado da Bahia: os cursos de Licenciatura em Matemática nas Universidades Estaduais. **Estudos IAT**, v. 2, n. 2, p. 170-184. jun./dez. de 2012.

BRASIL. Ministério da Educação. **Parâmetros Nacionais Curriculares**. Brasília, 1998.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília, 2018.

BRASIL. MEC. **Instituto Nacional De Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira (Inep)**. Enem: Provas e Gabaritos – 2020. Disponível em: <<http://portal.inep.gov.br/provas-e-gabaritos>>. Acesso em setembro de 2020.

CURY, Helena Noronha. **Análise de erros: o que podemos aprender com as respostas dos alunos**. 2. ed.; 1. reimp. Belo Horizonte: Autêntica, 2015. p. 120.

CAMPOS, Carlos Eduardo; IGLIORI, Sonia Barbosa Camargo. Teses e Dissertações sobre o Ensino e a Aprendizagem da Combinatória: Perspectivas Investigativas. **Revista Eletrônica de Educação Matemática**, v. 16, p. 1-20, mar. de 2021.

LA TAILLE, Yves. O erro na perspectiva piagetiana. **Erro e fracasso na escola – alternativas teóricas e práticas**. São Paulo: Summus, p. 25-44, 1997.

MORGADO, Augusto César et al. **Análise Combinatória e Probabilidade**. Sociedade Brasileira de Matemática, Rio de Janeiro, 1991.

FIALHO, Edson. **Avaliação Escolar e Taxonomia de Bloom**. E-book (61 p.). Disponível em: <<https://www.amazon.com.br/Avalia%C3%A7%C3%A3o-Escolar-Taxonomia-Bloom-Fialho-ebook/dp/B07H3G5QHG>>. Acesso em 20 Jul. 2021.

LIMA, R. G. Araújo. **Problemas de Combinatória: um estudo de conhecimentos mobilizados por licenciados em Matemática**. 20/02/2015. 198 f. Dissertação (Tese de Mestrado). Pós-Graduação em Educação Matemática da UFMS. Campo Grande: UFMS, 2015.

PEREIRA, K. B. **Reflexões acerca dos desempenhos de Licenciandos em Matemática em relação à Análise Combinatória**. 13/08/2012. 45 f. Monografia (Graduação) - Departamento de Ciências Exatas da Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia, Vitória da Conquista. 2012.

PESSOA, Cristiane Azevêdo dos Santos; BORBA, Rute Elizabete de Souza Rosa. O desenvolvimento do raciocínio combinatório na escolarização básica. **EM TEIA | Revista de Educação Matemática e Tecnológica Iberoamericana**, v.1, n. 1, 2010.

SABO, Ricardo Dezso. **Saberes Docentes: a análise combinatória no Ensino Médio**. 210 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática), São Paulo: Pontifícia Universidade Católica de São Paulo-PUC/SP, 2010.

SPINILLO, Alina Galvão et al. O erro no processo de ensino-aprendizagem da matemática: errar é preciso. **Boletim Gepem**, v. 64, p. 1-15, jan. /jun. de 2014.

VEGA, Danielle Avanço. **Qual mais fácil de resolver com 2, 3 ou 4 etapas de escolha: produto cartesiano, arranjo, combinação ou permutação?** 2014. 114 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). Universidade Federal de Pernambuco, Recife - PE, 2014.

Submetido em 04/06/2022.

Aceito em 27/07/2022.