ISSN 2177-9309

em teia
Revista de Educação Matemática e Tecnológica Iberoamericana

Universidade Federal de Pernambuco

Pós-Graduação em Educação Matemática e Tecnológica
EDUMATEC

TRANSFORMAÇÕES GEOMÉTRICAS:

Abertura à constituição de uma geometria dinâmica

Geometric Transformation:

Opening to constitution of a dynamic geometry

José Milton Lopes Pinheiro
Doutor em Educação Matemática
Universidade Estadual da Região Tocantina do Maranhão
jose.pinheiro@uemasul.edu.br

Giovana Alves
Doutora em Matemática
Universidade Estadual da Região Tocantina do Maranhão
giovana.alves@uemasul.edu.br

Juscimar da Silva Araújo
Mestre em Matemática Aplicada e Computacional
Universidade Estadual da Região Tocantina do Maranhão
juscimararaujo@uemasul.edu.br

Resumo

Este artigo objetiva expor compreensões acerca das *transformações geométricas*. Estas interessam ao estudo aqui proposto por compreender-se como seu primado o *movimento*, que por sua vez vê-se também como primado da Geometria Dinâmica, outro objeto deste estudo. Realiza-se um estudo bibliográfico em vista de compreender: *como as transformações geométricas constituem o dinâmico, e como esse dinâmico se apresenta em ambientes de Geometria Dinâmica?* Para tanto, faz-se, também, o estudo de uma atividade, na qual, como modo de resolução, se sobressaíram as transformações geométricas. Encontraram-se em filósofos, matemáticos e educadores matemáticos compreensões que apontaram para um fazer dinâmico que já expunha a constituição de uma geometria dinâmica anterior à era informática, no âmbito do que Felix Klein e Bachelard traziam sobre as transformações geométricas. Essa compreensão permitiu olhar a dinamicidade para além do software, podendo assim conjecturar sobre uma geometria dinâmica constituindo-se em diferentes espaços, dentre os quais os aqui focados: o matemático (das transformações geométricas) e o informatizado (da Geometria Dinâmica).

Palavras-Chave: Transformações Geométricas. Geometria Dinâmica. Educação Matemática.

Abstract

This article aims to expose understandings about the geometric transformations. These are of interest to the study proposed here because it is understood how your primacy the movement, which in turn is also seen as the primacy of Dynamic Geometry, another object of this study. A bibliographic study is carried out, in order to understand: how do the geometric transformations constitute the dynamic, and how does this dynamic that presents itself in Dynamic Geometry environments? To this end, an activity is also studied, in which, as a way of solving, geometric transformations stood out. Found himself in philosophers, mathematicians, and mathematical educators, understandings that pointed to a dynamic doing that already exposed the constitution of a dynamic geometry previous to the era of technology, within the scope of what Felix Klein and Bachelard brought about the geometric transformations. This understanding allowed us to look the dynamism in addition to the software, can thus conjecture about a dynamic geometry constituting in different spaces, among which the ones focused here: the mathematical (of the geometric transformations) and the computerized (of Dynamic Geometry).

Keywords: Geometric Transformations, Dynamic Geometry, Mathematics Education.

Introdução

Ao realizar um estudo no âmbito da Educação Matemática, questionando o que dizem pesquisadores sobre a Geometria Dinâmica (GD), bem como sobre como eles a definem, visualiza-se uma ênfase ao dinâmico creditado apenas ao software, o que de imediato traz a pergunta: *é só a presença das tecnologias informáticas que faz a Geometria vir a ser dinâmica?*

O estudo aqui proposto permite pensar sobre esta pergunta, uma vez que se assume o *fazer dinâmico* como uma possibilidade humana, que, portanto, se realiza nos mais diversos ambientes. De modo geral, tem-se o mundo de vivências, solo das relações científicas que envolvem formas e medidas. A espacialidade é, antes de objetivar-se em conhecimento geométrico expresso de modo predicativo na linguagem da ciência, um modo de ser do homem no mundo. "Noções de grandeza: grande, pequeno, maior, menor; de posição: alto, baixo, direita, esquerda; de distância: longe, perto, são constituídas a cada momento num nível espacial em relação ao qual as coisas se situam. Essa é uma experiência primordial" (BICUDO; KLUTH, 2010, p. 138). Ocupar-se dessa espacialidade é ocupar-se de uma dinamicidade, pois nesse contexto, entende-se Geometria como ciência do espaço enquanto espacialidade vivenciada, doando-se assim em movimento e abrindo possibilidades de movimento.

Os desdobramentos dessa maneira de estar geometricamente desenham o potencial de investigação que se abre a uma pesquisa que visa à Geometria, buscando compreender como ela se mostra e como fazer geometria dinamicamente em ambientes distintos, com suas características, dentre os quais o matemático, do qual destacam-se neste texto as *transformações geométricas*, uma vez que leituras de vários autores contribuintes, como Felix Klein (1984) e Bachelard (1968), apontam para a sua importância histórica como um meio revolucionário de como se produzir geometria, tendo como um dos instrumentos, o movimento.

Com o dito até então, explicita-se que se quer focar neste texto o *dinâmico,* ele realizando-se em ambientes de Geometria Dinâmica e no âmbito das transformações geométricas. Estudando esses espaços e destacando neles a possibilidade de movimento, quer-se compreender o caráter dinâmico estando junto a alternativas de estruturações geométricas diferenciadas.

A estrutura deste texto visa produzir um fluxo que permita ao leitor compreender: *como as transformações geométricas constituem o dinâmico, e como esse dinâmico pode se apresentar em ambientes de Geometria Dinâmica?* Para tanto, é realizada uma pesquisa de cunho bibliográfico, buscando o que filósofos, matemáticos e educadores matemáticos trazem como princípios compreensivos relevantes ao estudo aqui proposto. Faz-se a explicitação de uma atividade, produzida e trabalhada na tese de doutorado de um dos autores que aqui escreve, Pinheiro (2018), cujo foco permite pensar sobre a pergunta, pois solicita movimentos correlatos às transformações geométricas, mais especificamente, às isometrias.

As transformações geométricas: abertura ao pensar sobre a constituição de uma geometria dinâmica

A Geometria e sua história são amplamente discutidas em pesquisas das mais diversas áreas, como Matemática, História, Educação Matemática e Filosofia. Em consonância com o foco deste estudo, faz-se um destaque na história da Geometria ao movimento de constituição da chamada Geometria das Transformações, que é apontada por Klein (1984) como um meio pelo qual se revolucionou a produção do conhecimento geométrico. Ela surge junto aos esforços que buscavam compreensões além das euclidianas, tão presentes na segunda metade do século XIX. O produto desses esforços, segundo Detoni e Pinheiro (2016, p. 233), "é celebrado por muitos matemáticos e educadores matemáticos como um revigoramento científico do pensamento geométrico, desde o século XIX".

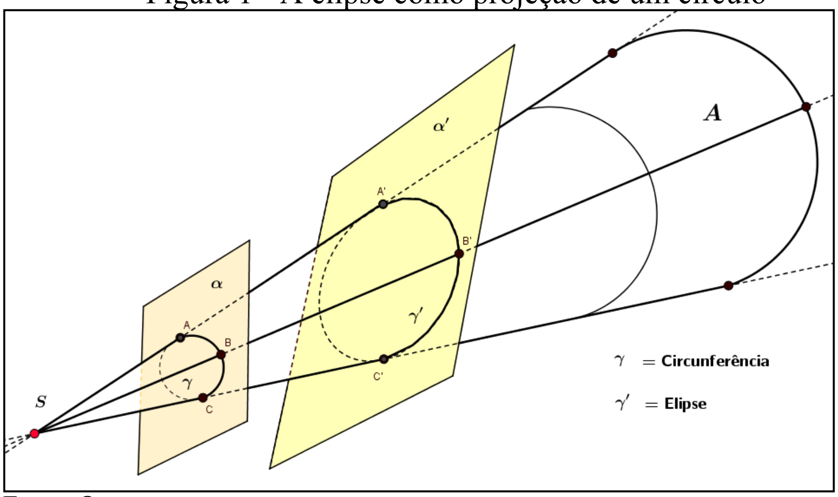
No século XVII uma grande mudança no cenário em que se discutia Geometria aconteceu. Foi quando René Descartes (1596-1650) e Pierre de Fermat (1601-1695) efetivaram seus estudos em que buscavam algebrizar a Geometria. Eles substituíram pontos do plano por pares de números e curvas por equações. Nessa constituição, surge a Geometria Analítica - uma geometria "reduzida" à Álgebra - e incorpora-se o que ela oferece em ideias de transformações. Segundo Piaget e Garcia (1987), é na álgebra, especialmente em sua forma escrita, que as transformações emergem como procedimentos explícitos, tanto no trabalho de transformações algébricas sobre equações quanto na observação de famílias de curvas analiticamente enfocadas, em que translações[1], rotações[2] e reflexões[3] determinam fatos algébricos relevantes.

No estudo do arquiteto e engenheiro Girard Desargues (1591-1661), que foca as cônicas, pode-se vislumbrar como se realiza uma transformação. Ele buscou referência nas noções de perspectivas que emergiram do trabalho dos artistas do século XV, buscando dar a elas o estatuto de objetos matemáticos. Assim, desenvolve seu trabalho com as cônicas se valendo de métodos projetivos. Desargues leva à Geometria os métodos da *perspectiva* conforme Godeaux (1947, p. 63) destaca:

> Consideremos um plano α, um círculo γ deste plano e um ponto S não pertencente a α. As retas passadas por S e se apoiando sobre γ geram um cone A. Um segundo plano α', não passando por S, corta o cone A segundo uma cônica γ'. Esta cônica γ' é a projeção do círculo γ sobre o plano α', a partir do ponto S. Toda propriedade do círculo γ poderá ser transportada à cônica γ', qualquer que seja a natureza desta.

Na Figura 1, que segue, se ilustra o que é dito nesta citação.

Figura 1 - A elipse como projeção de um círculo



Fonte: Os autores

---

[1] Define-se no próximo tópico.

[2] Rotacionar uma figura, um ponto, uma reta, consiste em fixar um ponto – denominado centro de rotação – e uma amplitude angular de rotação desta figura. A rotação pode ocorrer no sentido horário (negativo) ou anti-horário (positivo). Wagner (2007, p. 75) explicita que, dado "um ângulo □, a rotação de centro O e amplitude □□é a transformação que cada ponto A do plano □□associa o ponto $A' = R_{□}(A)$ de forma que se tenha OA'□□OA, o ângulo AÔA'□□□".

[3] A reflexão de um ponto A em relação a uma reta *r* é o ponto A', que é simétrico ao ponto A em relação a *r* quando essa reta é mediatriz do segmento que une A e A'. "A reflexão em torno da reta *r* [...] é a transformação *Sr* que faz corresponder a cada ponto A do plano o ponto *A'* □□*Sr* (*A*), simétrico de A em relação a *r*" (WAGNER, 2007, p. 73).

A constituição do espaço projetivo, presente nessa explicitação de Desargues, permitiu a completa matematização de relações entre uma figura e sua projeção, a saber, entre uma figura e sua *transformada* por projeção. No processo, Desargues se apropria da ideia de transformação como uma ferramenta inclusive demonstrativa, que possibilita a transferência de propriedades entre figuras, buscando destacar propriedades geométricas que se preservam na variação provocada pela projeção.

Os trabalhos de Desargues e de outros, como os de Poncelet (1788-1867), mostram a relevância da Geometria Projetiva no desenvolvimento de ideias geométricas, abrindo o sentido geral de transformações geométricas. Em meio ao movimento que constituiu e fez possível a constituição desse sentido, surge a noção de Grupo de Transformações, que veio como proposta de elevar a ideia intuitiva de transformações geométricas, formalizando-a e atribuindo-lhe "caráter científico".

Encontra-se em Felix Klein (1849-1925), no *Programa de Erlangen*[4], o que se entende ser uma formulação mais clara para o conceito de Grupo de Transformação, o qual ele mostrou ser aplicável a todas as geometrias constituídas até o século XIX. Esse conceito, uma vez formalizado, concedeu caráter científico à agora chamada Geometria das Transformações. "Desta vez é Felix Klein que vai formular de modo magistral o novo ponto de vista. Uma nova etapa será assim inaugurada. A passagem da etapa das transformações projetivas à etapa das estruturas de grupos constitui uma lição preciosa" (PIAGET; GARCIA, 1987, p. 105). Com o conceito de Grupo de Klein, pôde-se melhor tratar as especificidades de cada Geometria, incluindo as que sustentavam cada uma como distinta das demais, apontando convergências e divergências.

Entende-se que, embora a noção intuitiva de transformação geométrica tenha sido e seja importante, o conceito formalizado de Grupo de Transformação marca um avanço ao fazer matemático. Com ele é possível identificar e exprimir a estrutura de um conjunto, de um Grupo, o que não era feito antes desta formalização, pois, para cada caso específico, era aplicada uma transformação sem que houvesse um mecanismo formal e explicasse logicamente a estrutura do(s) objeto(s) com o(s) qual(is) se realizasse a transformação.

Compreendendo em Klein (1984) que uma transformação evidencia e explicita a estrutura de um Grupo, pode-se inferir que a Geometria Analítica, a Euclidiana, a Projetiva e todas as outras são Grupos. Isso quer dizer que, uma vez incidido sobre elas o conceito de

[4] Anunciado na conferência de Felix Klein, em 1972, na abertura do ano acadêmico da Universidade de Erlangen, Alemanha.

Grupo, é possível evidenciar suas estruturas e, com isso, dizer das relações e divergências entre cada uma delas. É possível evidenciar o que só acontece no espaço euclidiano, o que só acontece no espaço projetivo..., é possível determiná-los como Grupos a partir da explicitação lógica e formal de invariantes constituintes.

Para exemplificar o dito acima pode-se considerar a explicitação de Mabuchi (2000, p. 16) sobre a Geometria Métrica Plana. Para defini-la, o autor expõe como dados um conjunto Π de pontos no plano euclidiano e um Grupo de Transformação G, no caso as isometrias[5] (ou deslocamento): "A Geometria Métrica em Π, do grupo principal G (isometrias), é o conjunto de propriedades de Π (congruências) invariantes para as transformações de G".

Ao trazer sua ideia de Grupo de Transformações, Klein (1984) classifica como sendo um deles o Grupo de Isometrias, que ele chama também de Grupo de Deslocamento. Pensar o Deslocamento como um Grupo de Transformação que gera mudanças, seja em uma figura, em sua posição ou até mesmo em uma Geometria, abrindo possibilidades de se conjecturar outras geometrias como correlatas das mudanças percebidas, compreendidas e articuladas, solicita um olhar à epistemologia que subjaz às transformações geométricas.

Dentre as novas concepções que emergem com as transformações geométricas, estão as *Geometrias Não-Euclidianas*. Bachelard, na obra *O novo Espírito Científico* (1968), evidencia que o entendimento da ideia de Grupo contribui para a compreensão dessas *novas* geometrias. "Sendo [...] um grupo de invariantes que se manifestam dada uma transformação, promove-se, epistemologicamente, uma grande guinada na definição do que é (são) geometria (s), quando os invariantes físicos é que dariam valor racional aos princípios da permanência" (DETONI; PINHEIRO, 2016, p. 237).

Desta forma, passando de uma figura a outra "transportando as suas propriedades, o estudo das figuras é substituído pelo estudo das propriedades das transformações" (BONGIOVANNI; JAHN, 2010, p. 48).

O que até então é discutido mostra que o trabalho com transformações geométricas marca a retomada e a criação de geometrias. Entende-se que o fazer matemático que possibilita às *transformações* retomar e criar é o que se materializa em/com *movimentos.* Klein (1984, p. 6) explicita que "um exemplo de grupo de transformações é dado pelo conjunto dos movimentos (considerando cada movimento como uma operação efetuada sobre

[5] Ao dizer das transformações geométricas, Madeiros e Gravina (2007, p. 6) definem que: "Se Π e Π′ são dois planos, uma transformação T: Π→ Π′ é uma *isometria* quando a distância entre os pontos T(A) e T(B) é igual à distância entre os pontos A e B, para quaisquer pontos A e B; ou seja, quando d(T(A), T(B)) = d(A, B) para quaisquer pontos A e B".

todo o espaço. Um grupo contido neste é, por exemplo, o das rotações ao redor de um ponto". Ao explicitar a rotação (considerada em muitas obras um deslocamento) como sendo um movimento, Klein (1984) deixa implícita a ideia de não diferenciação entre deslocamento e movimento.

Quando o movimento de uma figura é realizado em espaços matemáticos distintos (o cartesiano e o esférico, por exemplo) pode-se perceber as características desses espaços e da própria figura quando ela, em movimento, preserva *invariantes* em sua estrutura na deformação provocada por esse movimento. Em espaços distintos, têm-se configurações também distintas para um mesmo objeto. Assim, um quadrado pode manter-se quadrado em um espaço e pode assumir uma forma "arredondada" em outro. Nesse segundo caso, "as propriedades geométricas se conservam somente em parte. O restante aparece como propriedade não mais dos próprios entes[6], mas como propriedades do sistema resultante do acréscimo de um ente especial aos entes originais" (KLEIN, 1984, p. 11).

O movimento pode também constituir "subgrupos". Na Geometria Euclidiana, tem-se, por exemplo, o Grupo dos Quadriláteros e dos Triângulos. A variação isométrica de entes do Grupo dos Quadriláteros sempre preservará seu modo de ser quadrilátero – o mesmo acontece com o Grupo dos Triângulos. Pensando como em Bachelard (1968), o movimento que aproxima para *relacionar* torna evidente que um triângulo é diferente de um quadrilátero, o que os confere grupos distintos.

Quando se expõe sobre os *invariantes* em Klein (1984) e sobre as *relações* em Bachelard (1968), entende-se que o movimento se mostra como fundo sobre o qual podem acontecer. No movimento, invariantes e relações podem se mostrar. Assim, entende-se que, na medida em que as transformações geométricas possibilitam destacar os estruturantes de cada Geometria, vai-se evidenciando que seu próprio estruturante é o movimento, que nas possibilidades de rotacionar, transladar e refletir, provoca mudança, transforma e pode criar algo novo.

O fazer geométrico das transformações geométricas propõe o movimento como um modo de estar com as geometrias, um modo de estudá-las, de pô-las em suspensão sob fundo dinâmico que, em movimento, evidencia o que varia e o que não varia, assim como o que é semelhante, desigual ou congruente. Portanto, as transformações geométricas inauguram um ato, um fazer matemático. Essa afirmação é possível especialmente pela presença de

[6] Objeto que encontra na ciência Geometria uma determinação, um conceito que o situa como parte de um conjunto abarcado por um espaço caracteristicamente determinado por leis matemáticas.

tecnologias, sendo algumas delas a régua e o compasso, com as quais historicamente vêm-se realizando essas transformações. Vale frisar que a Álgebra é um modo de fazer transformações geométricas. As isometrias possuem suas equações gerais. A Álgebra foi fundamental para a formalização do conceito de transformações, incidindo na Teoria dos Grupos de Felix Klein.

Com o articulado até o momento se expõe o que se entende aqui como compreensões que permitem dizer de um fazer geométrico dinâmico. Em nenhum momento Klein (1984) e Bachelard (1968) falam frontalmente de uma geometria dinâmica, mas nas ideias geométricas que constroem e em algumas consequências filosóficas e epistemológicas que concluem fica presente o fato de o movimento – como o de deslocamentos ou mudança de posição de objetos em projeção – ser determinante para resultar em poder-se dizer estar constituindo um novo ideário geométrico. Com o Grupo Deslocamento já se dizia do movimento de figuras e do estudo do que emerge desse movimento, como por exemplo, dos invariantes.

Esse entendimento aqui explicitado é direcionador de um pensar sobre uma geometria dinâmica vindo a se tornar, o que abre caminhos para se discutir, no tópico que segue, e nos demais, sobre a Geometria Dinâmica (GD) - a projetada e trabalhada em softwares, pois ela, assim como as transformações, em um olhar epistemológico, tem como primado o movimento e com ele avança na produção de conhecimentos matemáticos. Esse direcionamento já se consolida como um modo de explicitar compreensões sobre a interrogação deste estudo.

O dinâmico na GD e nas transformações geométricas: articulações possíveis

Richit (2005) descreve a GD como aquela ambientada no computador ou equipamento similar com sua potencialidade, que permite construir, explorar e conhecer propriedades de uma figura geométrica disponíveis na interface de um software, por meio da visualização do movimento de objetos pertencentes à figura e através do estudo das implicações gráficas e/ou algébricas desse movimento. Silva e Penteado (2009) explicitam que ela é assim chamada pelas possibilidades dinâmicas de um software, como: arrastar, rotacionar, transladar etc.

Compreende-se em Pinheiro (2018), que direciona seu olhar ao sujeito que ocupa e cria espaços, fazendo-os dinâmicos enquanto se move, movendo, bem como à GD tal como definida no âmbito da Educação Matemática, que se pode pensar como estruturantes da GD: a) *seu dinamismo que se dá por programação computacional, que possibilita que objetos nela construídos possam ser movidos;* b) *a possibilidade que abre à atualização de seu* *dinamismo, que é realizada por um sujeito-movente;* c) *seu aspecto visual que mostra os variantes e invariantes, que se expõem quando realizados movimentos em uma figura ou em objetos pertencentes à mesma.*

O estruturante (b), além de dizer do ato que faz o dinamismo da GD acontecer, diz de um modo de validar conjecturas sobre uma figura projetada na interface do software. Os três estruturantes permitem a um sujeito questionar e estudar a figura que agora vê nessa interface. A possibilidade que se abre em (a) o faz questionar: será ela a Figura G? O sujeito pode fazer conjecturas sobre a indagação e dizer intuitivamente, por exemplo, é sim, é a Figura G! Com o que abre o item (b) ele se põe em ação, movendo essa figura, atualizando o dinamismo evidenciado no item (a). O que emerge de (a) e (b) são configurações em movimento, que podem dar visualmente ao sujeito variantes e/ou invariantes (referente ao item (c)).

A configuração do movimento que distorce a figura, não preservando invariantes, dá ao sujeito outras figuras, com características e propriedades distintas da Figura G intuída. No entanto, pode haver em um movimento a preservação de propriedades tais quais as da figura intuída. Propriedades essas, dadas como invariantes, que, uma vez percebidos junto ao movimento, abrem a possibilidade de afirmar que o projetado é a Figura G, ou é uma figura semelhante à mesma, uma G’, G’’.

Pinheiro (2018) expõe que se pode olhar para a GD e apontar especificidades. No entanto, quando há um sujeito frente a ela, agindo no ambiente em que ela se expõe, todas essas características se entrelaçam, constituindo assim a unidade que abarca o movimento realizado, o movimento percebido e o sujeito que realiza o movimento. Portanto, (a), (b) e (c) não estão separados no *agora* da realização de um ato. Como explicita Pinheiro (2018), todo movimento gera mudança; o software abre a possibilidade do movimento, uma tarefa solicita o movimento e o sujeito atualiza a solicitação. Ao atualizar, o que estava diante de seus olhos muda, ganha novas configurações.

O que vai determinar a deformação ou preservação das características de uma figura é o movimento realizado pelo sujeito e o modo pelo qual ela foi projetada na interface do software. Esse movimento vai evidenciar se essa figura assume na interface apenas caráter *ilustrativo* ou se além disso, ela é projetada de modo a evidenciar uma *construção geométrica* (ZULATTO, 2002).

Assim como na lousa, uma figura projetada na interface do software pode assumir caráter ilustrativo ou pode ser construída segundo propriedades constituintes. Uma *construção* realizada em GD fixa as propriedades da figura de modo que um movimento realizado provoca nela mudanças, mas, ao mesmo tempo, um grupo de invariantes predefinidos na construção se preserva. Ao construir um retângulo, um movimento realizado nele pode variar suas dimensões, mostrando retângulos outros, no entanto, esse grupo de invariantes faz com que não se possa ter após realização do movimento um triângulo ou um pentágono, por exemplo.

Nesse sentido, o dinamismo que se abre junto às possibilidades dos softwares de GD possibilita mover figuras e objetos pertencentes às mesmas (pontos, segmentos, retas etc.), de forma que uma multiplicidade de construções semelhantes seja visualizada. Semelhança que é possível detectar justamente pelas propriedades preestabelecidas no ato de construir que, segundo Souza e Gravina (2009), permite associar a um objeto ou propriedade, uma coleção de "desenhos em movimento".

Compreende-se que em GD nunca se tem a *priori* a "figura mesma". Em Zulatto (2002), tem-se que em GD toda figura deve ser submetida ao *teste de arrasar*, antes de defini-la a partir do que está posto na interface do software. Um sujeito pode deparar-se com uma figura rígida[7], mas, se ele não a projetou, antes de movê-la, o conhecimento de sua rigidez não o pertence de antemão. É o movimento desta figura que a coloca em um fluxo de poder vir a ser.

Entende-se que a GD é abertura para um modo pelo qual se possa compreender a estrutura de objetos matemáticos. Tomando como exemplo o quadrado, pode-se perguntar: qual o estruturante do quadrado? Sabe-se que é o que o constitui quadrado, suas características que se mostram sempre, que se preservam, mesmo havendo variações no modo de experienciá-lo, mesmo vivenciando experiências com uma diversidade de quadrados. O ambiente de GD é propício para essa compreensão. Nele, o sujeito move o vértice de um quadrado (construído para ser sempre quadrado) provocando ampliação ou redução na medida de seus lados, constituindo uma variedade de quadrados outros. Esse ato, visando ao questionado, traz à percepção do sujeito os invariantes que se mostram no/com o movimento: quatro lados, sendo eles iguais entre si, e quatro ângulos internos de amplitude 90º. Esses invariantes são essenciais para a compreensão do fenômeno interrogado, a estrutura do quadrado.

O estruturante de uma figura geométrica entende-se não se constituir pela quantidade de invariantes que se mostram quando a experiência do movimento anima essa figura. Ele é a

[7] Figuras que não se desconfiguram quando incididos nelas movimento. Suas medidas angulares e lineares se preservam nesse movimento.

unidade que abarca todos os invariantes entrelaçados. É a percepção desse entrelaçamento que pode dar à consciência a estrutura da figura. Nessa percepção, não se diz separadamente de um ou outro invariante, mas desta estrutura que se mostra e que é ela mesma invariante. Assim também se pode constituir a Geometria, definindo uma estrutura que se preserva mesmo quando incidida sobre ela uma transformação geométrica. Conforme Bachelard (1968), esse movimento não só define a Geometria em questão, mas também os objetos pertencentes a ela.

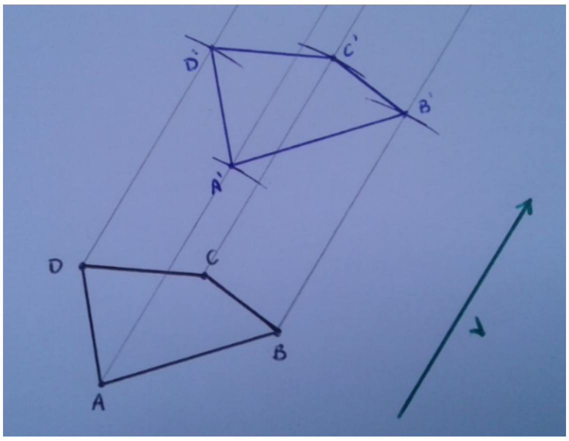
Assim como em GD, uma transformação geométrica gera mudanças, que por sua vez expõem invariantes. Compreende-se que a preservação é correlata ao movimento. O que se mantém, se mantém na medida em que o fundo que o abarca passa por modificações, que não só transformam esse fundo, mas que em cada nova configuração vai lançando luz ao que nele não se modifica, ao que parece ser inatingível pelo movimento que o transforma. "Não se trata, portanto, do entorno de um invariante se modificando, mas de um fundo se movendo enquanto produz invariantes. Ou seja, se não houver a variação que modifica o espaço geométrico disponível, não haverá a invariação e a percepção do invariante" (PINHEIRO, 2018, p. 175).

Nessa perspectiva, cada invariante tem sua função no conjunto que constitui o fenômeno. Por exemplo, "o raio de um círculo não se restringe à função de um segmento de reta. É um elemento que se constitui como raio ao constituir o círculo. O mesmo pode-se dizer da curvatura que se constitui como círculo ao constituir o raio" (BICUDO; KLUTH, 2010, p. 140). Entende-se que *raio* e *curvatura* são invariantes na constituição do círculo, no entanto, ao se considerar cada um deles em separado, o raio como segmento e a curvatura como curva, não se pode afirmar com exatidão que o objeto ao qual se refere é o círculo. É ao perceber o raio e a curvatura como invariantes inseparáveis, mostrando-se sobre um fundo do qual um olhar atento os destaca, que se compreende a essência do círculo, o que é essencial no *ser círculo*.

Dentre os movimentos possíveis em GD, que preservam não só as propriedades invariantes de uma figura, mas também suas medidas, têm-se as opões das transformações geométricas. Softwares, como o Geogebra, apresentam opções como: Reflexão em Relação a uma Reta; Reflexão em Relação a um Ponto; Rotação em Torno de um Ponto; Translação por um Vetor e Homotetia. Estas ferramentas convertem em códigos de programação o que é formalizado pela Matemática.

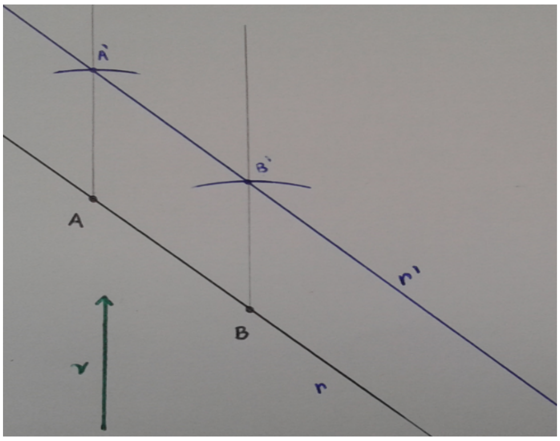
Como exemplo de apresentação em interface de elementos matemáticos, explicita-se aqui a translação, projetada em software de GD. Na Translação*,* dados dois pontos, como extremos de um segmento, que são deslocados numa mesma direção (e sentido) e num mesmo comprimento, a teoria geométrica dos paralelogramos nos diz que o segmento relativo aos dois pontos deslocados é igual e paralelo ao segmento original, e se diz que um é a translação do outro segundo esses dois parâmetros geométricos. A translação pode ser mais consistentemente definida como "uma transformação determinada por um vetor *v* que leva cada ponto A de um plano Π ao ponto A' = A + *v* desse mesmo plano. Com isso, ela desloca o ponto por determinada distância *d*, preservando a direção e sentido indicados pelo vetor *v*" (WAGNER, 2007, p. 71). Como exemplo de translação, trazem-se a Figura 2 e a Figura 3:

Figura 2: Translação de um quadrilátero



Fonte: Os autores.

Figura 3: Translação de uma reta



Fonte: Os autores.

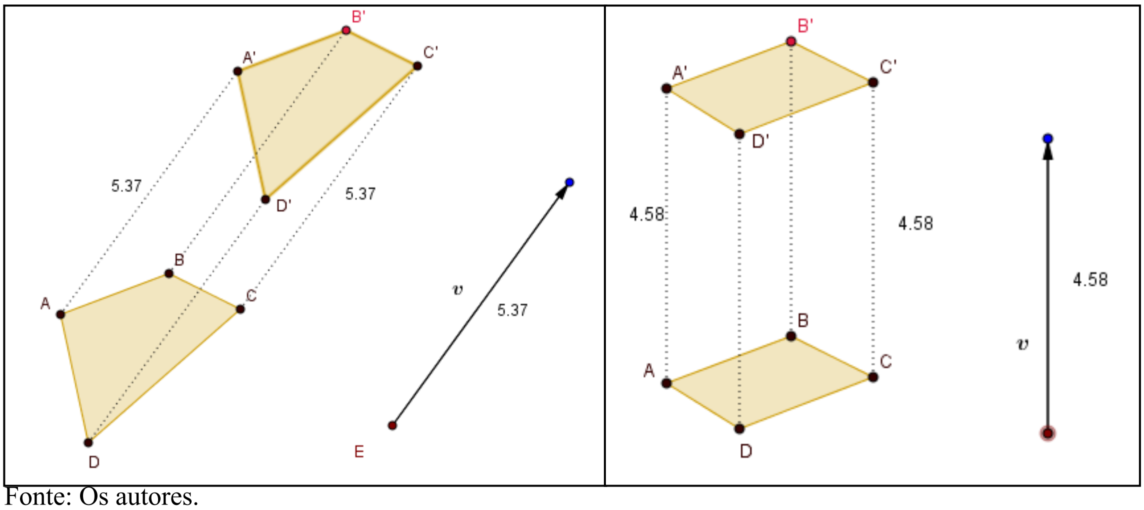
Algebricamente a transformação A' = A + *v* pode ser operada na forma matricial:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix}$$

Já no software Geogebra, por exemplo, há a opção "Translação por um Vetor". Dada uma figura geométrica, após selecionar essa ferramenta, basta clicar sobre a figura e em seguida clicar duas vezes fora dela, demarcando com isso a origem e o afixo do vetor. De imediato aparecerá a figura transladada. O vetor construído no Geogebra é móvel, o que permite uma gama de translações possíveis com o simples ato de mover o afixo ou a origem desse vetor.

Observa-se, na Figura 3, que o movimento do vetor *v*, da figura e/ou de seus vértices, resulta na alteração do quadrilátero ABCD e do A'B'C'D'; no entanto, o segundo sempre é o transladado do primeiro, ou seja, sempre é congruente ao primeiro, e a distância entre cada vértice correspondente dos quadriláteros se preserva, sendo sempre igual ao módulo de *v*.

Figura 3 - Translações a partir de um vetor móvel.



Fonte: Os autores.

Deve-se considerar, também, que além de ser um movimento característico, a translação, como toda transformação, enseja um pensamento geométrico que vai se articulando metodologicamente. Se um paralelogramo, como vê-se acima, é a figura que descreve um segmento que se movimenta até seu transladado, toda situação geométrica que pode ser reduzida a um paralelogramo traz a possibilidade de se pensar a translação.

O "deslocamento" em Klein (1984) e em de GD, conforme aqui se compreende, mesmo que de formas distintas, dizem da possibilidade de "levar" um objeto geométrico de um lugar para outro, podendo, depois, trazê-lo de volta ao seu lugar de origem, que, tecnicamente, chama-se *transformação de posição*. Assim, perceber "mudanças de posição de objetos reflete perceber uma modificação em determinado conjunto, e essa percepção requer que sejamos capazes de nos colocar em situação de movimento, de modo a *recuperar*, relativamente, a posição inicial por uma movimentação inversa" (DETONI, PINHEIRO, 2016, p. 3).

Entende-se aqui a proposta de Klein (1984) acerca dos Grupos de Transformações e a ideia de deslocamento em sintonia com a GD, pois os softwares oferecem ferramentas que possibilitam movimentos diversos, que, quando acessadas, permitem deslocar objetos cujas imagens são projetadas na tela computacional. Esse deslocamento produz uma variação, que por sua vez, vai constituindo invariantes, cerne da compreensão de Grupo de Transformação de Klein, tal como já explicitado.

O pensamento de Bachelard (1968) expõe um Grupo de Transformação pelas *relações* e *operações*, que justamente por serem possíveis definem os elementos deste grupo. Esse pensamento também pode convergir ao trabalho com GD, visto que, para focar relações, o software permite ao sujeito diversidade de movimentos, dentre os quais o de aproximar figuras, até mesmo ao ponto de fazê-las coincidir, sobrepondo-as. Com esse movimento, à medida que objetos são aproximados, pode-se compreender suas relações. Da mesma forma, por contrapartida, esses objetos podem ir se distanciando em termos de características comuns, evidenciando assim suas diferenças.

Entende-se em Piaget e Garcia (1987), que nas ideias de Klein e Bachelard sobre o estudo das propriedades relacionais de um objeto a outro, ou mesmo dele próprio em duas posições distintas após movimento, quer-se entender que um dinamismo está correlato ao seu pensar. Esse entendimento expõe para este texto uma intuição de que o dinamismo geométrico nas transformações tem afinidade com as possibilidades de tratamento dinâmico de objetos geométricos quando se está junto a um software de GD.

Paralelo ao que se argumenta neste texto vai se desenhando que as transformações geométricas não são aqui entendidas apenas como um conteúdo matemático. Elas dizem de um fazer geométrico que se constitui e se mantém em um fundo dinâmico, que anima o movimento, que se abre à realização de movimentos. Transladar, Rotacionar e Refletir são modos de um movimento se realizar, modos que se expõem como intenção de um sujeito de mover-se e de mover. As transformações vistas da perspectiva do software de GD reforçam essa concepção e evidenciam o foco ao *movimento*, visto que a própria GD tem como constituinte uma programação computacional que o privilegia.

Transformações geométricas: o desenvolvimento de uma atividade em GD

Embora o tópico anterior apresente compreensões de *como as transformações geométricas constituem o dinâmico, e como esse dinâmico pode se apresentar em ambientes de Geometria Dinâmica,* quer-se aqui explicitar, em ato, o entrelaçamento entre transformações e GD. Para tanto, apresenta-se o desenvolvimento de uma das atividades trabalhadas em Pinheiro (2018). Nela foram privilegiadas situações para as quais as noções de reflexão, rotação e/ou translação sobreviessem como caminhos para soluções, pois embora se entende que os conceitos trabalhados poderiam ser aqueles que se mostrassem no momento das realizações dos sujeitos, as atividades tinham demandas conceituais prévias, como as isometrias.

Trata-se da *Atividade 5 - Dobrar uma folha de papel,* desenvolvida pelo Grupo 2. Em um momento posterior ao desenvolvimento das atividades, foi solicitado a cada grupo que apresentasse no dispositivo Datashow os modos pelos quais se deu esse desenvolvimento. Sobre a referida atividade, os alunos do Grupo 2 que se dispuseram a relatar o feito foram: o Aluno G2, que conduziu a apresentação e o Aluno H2, que realizou as construções e os movimentos no Geogebra. Logo abaixo é exposto o enunciado da Atividade 5 e, em seguida, o Quadro 1 com o desenvolvimento realizado.

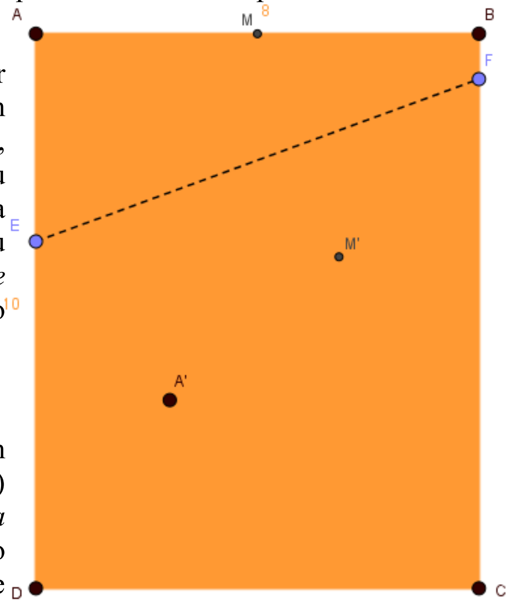
Atividade 5 - Dobrar uma folha de papel

Uma folha de papel, no formato retangular de dimensão 8x10 e vértices A, B, C e D, deve ser dobrada para que o vértice A seja posto sobre o lado CD e o ponto médio de AB, fique sobre o lado BC. Determine o posicionamento da reta que representaria a dobra que deve ser feita (a reta EF é apenas ilustrativa dessa dobra).

Quadro 1 - Desenvolvimento da atividade “Dobrar uma folha de papel”.

Transcrição – Atividade 5

Aluno G2: Primeiro, nós pegamos a folha do exercício (a que lhes foi entregue impressa) e dobramos até o outro lado [pega o vértice superior esquerdo da folha e o posiciona sobre o lado menor inferior da mesma. Firma o vértice sobre esse lado com uma das mãos e, com a outra mão, realiza a dobra da folha]. Fizemos outras dobras [pega o mesmo vértice e posiciona em diferentes lugares da folha], fomos percebendo que a dobra fica sempre na metade entre o vértice e o lugar onde colocamos ele.



Aluna H2:É, daí concluímos que deveríamos fazer a reflexão do vértice com relação à reta, e também do ponto médio do lado (se refere ao lado AB), pois quando puxamos o A ele vai vir junto. Vou antes, criar o ponto médio [clica sobre a ferramenta *Ponto Médio* e, em seguida, sobre o lado AB], vou renomear aqui de M [com o botão direito do *mouse* clica sobre o ponto médio, seleciona *Renomear* e o determina como M]

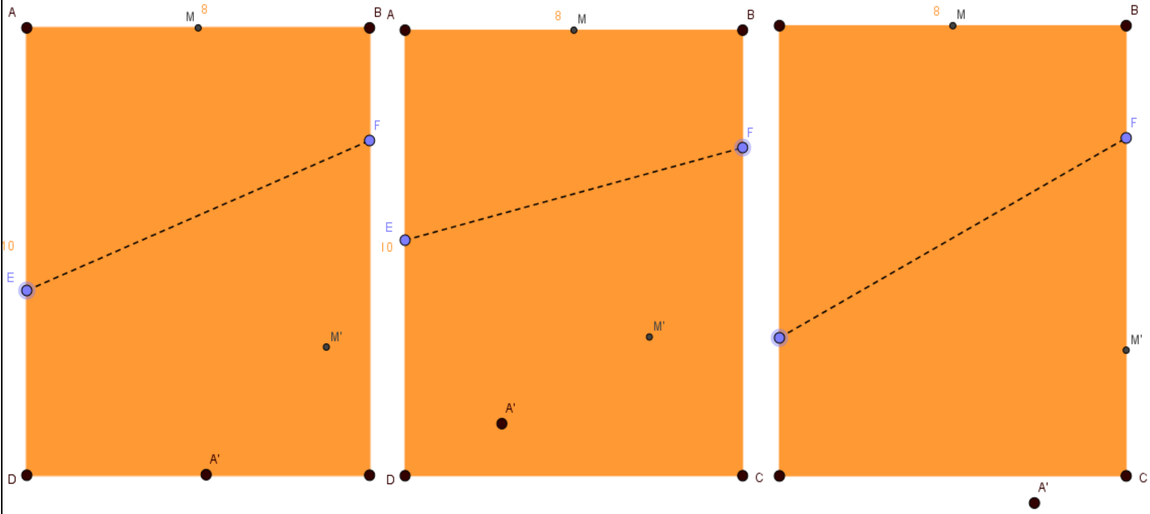
Aluno G2: Isso.

Aluna H2: Então, fiz os simétricos aqui com relação à dobra (dobra = segmento pontilhado) [seleciona a ferramenta *Reflexão em Relação a uma Reta*, clica sobre o ponto A, em seguida, sobre o segmento EF. Depois, clica sobre o ponto M e sobre o segmento EF, respectivamente. Com isso, gera-se A’ e M’]

Aluno G2: A’ e M’ são as reflexões.

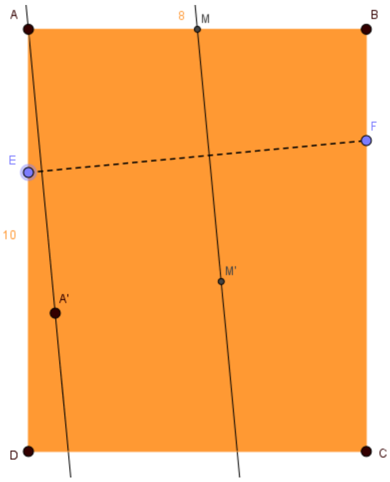
Aluno G2: No início ficamos movendo o segmento tentando sobrepor o A’ em cima de CD e o M’ ao lado BC, nada dava certo. Na hora que a gente conseguia colocar um, o outro ficava fora. Olha aí, o A’ fica no lado, mas o M’ não. Agora, nenhum dos dois. O M’ fica, mas o A’ não, e aí vai. (Refere-se ao posicionamento de A’ e M’ sobre os lados CD e BC, respectivamente)

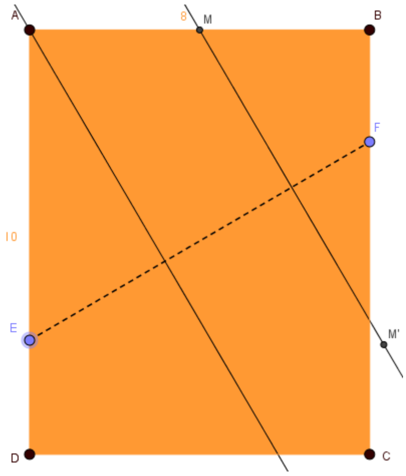
Aluna H2: [Enquanto o Aluno G2 vai falando, arrasta sucessivas vezes os pontos E e F, de forma a tentar sobrepor A’ e M’ aos lados CD e BC, respectivamente]



Aluno G2: Desse jeito a gente podia até conseguir, mas ia ser bem difícil. Mas**,** fazendo esses movimentos aí tivemos outra ideia. Pensamos em deixar um ponto já resolvido. Nosso problema era que tentar arrumar os dois pontos ao mesmo tempo estava difícil. Pensamos então em deixar um A’ fixo em cima do lado CD.

Aluna H2: Nós vimos que temos duas retas paralelas aqui, olha, uma passando por A e A’ e outra por M e M’. Dá pra ver isso nas várias posições desses pontos. Vou fazer [Seleciona a ferramenta *Reta* clica sobre os pontos A e A’, depois sobre os pontos M e M’], viu aí? São paralelas [afirma após mover o ponto E para cima e para baixo]

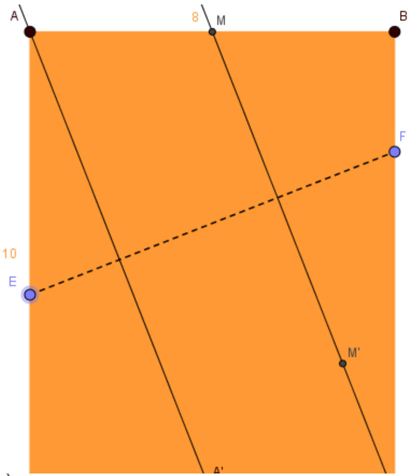




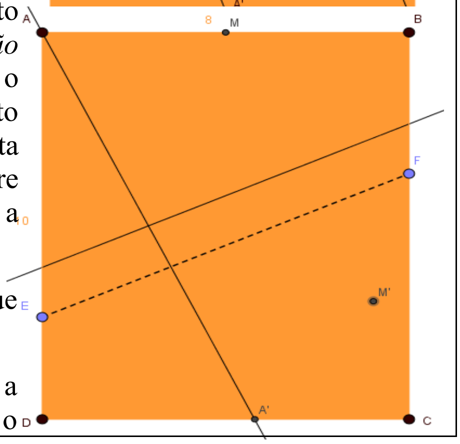
Aluno G2: As retas ajudaram quando a gente colocou o A’ sobre o lado CD, a gente viu na hora que o segmento EF tem que ser mediatriz desse segmento AA’.

Aluna H2: Move o ponto E de forma a sobrepor o ponto A’ ao lado CD]

Aluno G2: Aí que veio a ideia de passar uma reta por A, perpendicular ao segmento EF, marcar o ponto de interseção desta reta com o lado CD e traçar uma mediatriz. Faz aí pra ver (solicita à Aluna H2)



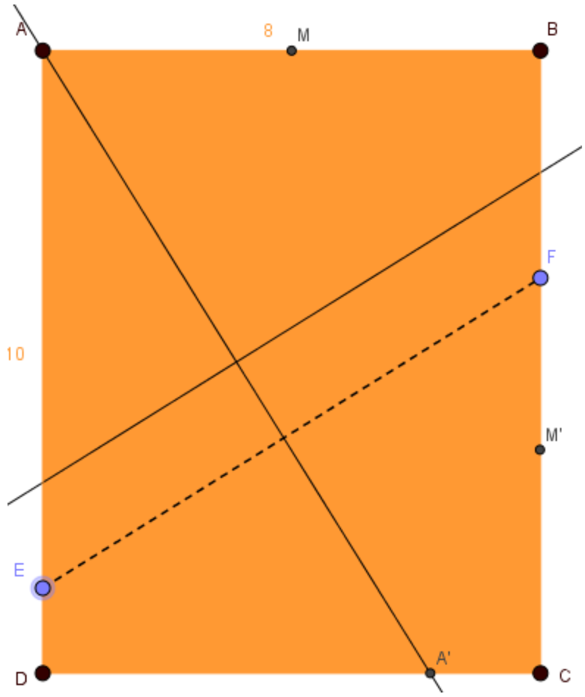
Aluna H2: Já to fazendo, mas antes vou deletar essas retas aqui [clica sobre as retas e, em seguida sobre a tecla *delete*] Agora sim, primeiro a perpendicular [seleciona a ferramenta *Reta Perpendicular* e clica sobre o segmento EF], marco a interseção [seleciona a ferramenta *Interseção de Dois Objetos* e clica sobre o encontro da reta com o segmento], e agora chamo ela de A’[renomeia o ponto gerado]. Mediatriz, mediatriz, onde? [Procura a ferramenta *Mediatriz*. Ao encontrá-la seleciona a mesma e clica sobre os pontos A e A’, respectivamente, gerando com isso a mediatriz do segmento AA’], pronto!



Aluno G2: Viu? Agora fica mais fácil, só temos que cuidar do ponto médio, de M.

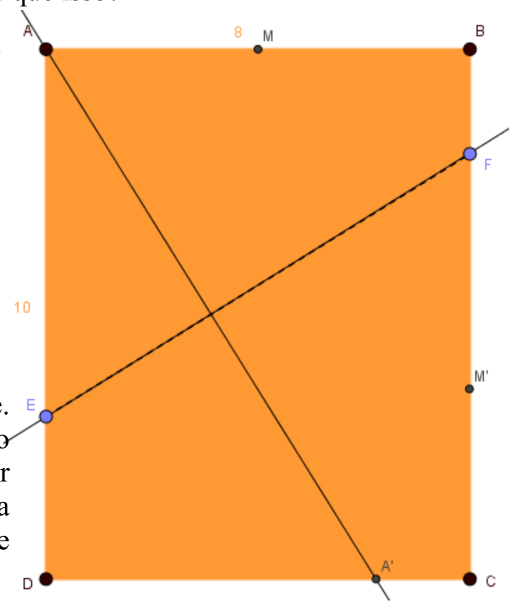
Aluna H2: A é, vou fazer ele de novo [seleciona a ferramenta *Reflexão em Relação a uma Reta*, clica sobre o ponto M e, em seguida, sobre a reta mediatriz traçada, gerando M']

Aluna H2: Desço o ponto E, e o ponto, M' vai se aproximando de BC. Daí continuo movendo até ele ficar sobre BC. Pronto, M' sobre BC. Resolvido!



Pesquisador: Olha só, que bacana! Bom mesmo. Mas bateu uma curiosidade aqui, o segmento e a reta mediatriz me parecem que são paralelas, por que isso?

Aluna I2: É porque eles fizeram uma perpendicular ao segmento EF e depois a mediatriz dessa perpendicular (se referindo à mediatriz do segmento AA'), como a mediatriz é perpendicular a AA', ela é paralela ao segmento EF.



Aluno G2: É isso que eu ia dizer em (risos).

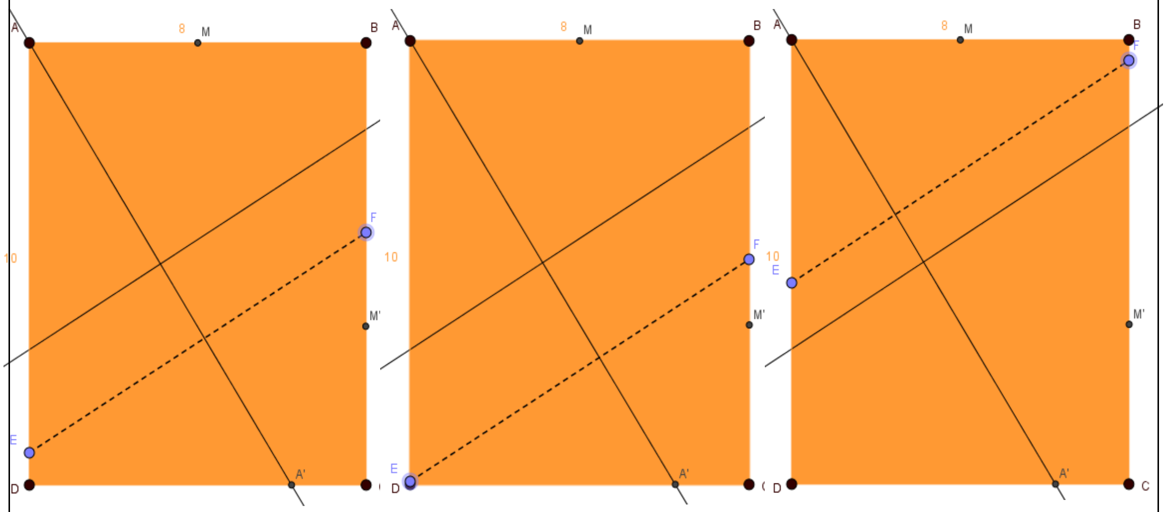
Pesquisador: Eu sabia (risos), estava só testando vocês (risos). Aqui, a dobra vai ser feita aí mesmo no pontilhado?

Aluna H2: Não, não, agora vem a melhor parte. Olha, a dobra tem que ser aqui na mediatriz [agita o cursor sobre a mediatriz]. Pra acabar é só transladar o segmento EF pra cima dela, então. Aí ó, fica assim! [Clica sobre o segmento EF o arrasta até que o mesmo fique sobre a reta mediatriz]

Aluno J2: Se, por exemplo, o A' ficar em outro lugar sobre o segmento (segmento CD), o M' vai ser ajustado pra outro lugar, certo? Aí dá pra ver que não tem só uma dobra possível, tem infinitas.

Pesquisador: Vamos ver isso. Teste, Aluna H2.

Aluna H2: Beleza. Ééé (pausa) não sei não (pausa). Quando mexo no E, o A' muda de lugar, mas quando mexo no F pra ajustar o M', parece que o A' e o M' voltam pra onde estavam. (16) [Com o *mouse*, arrasta o ponto E alterando a posição de A' e, em seguida, ajusta M' ao arrastar F. Realiza esse processo por três vezes]

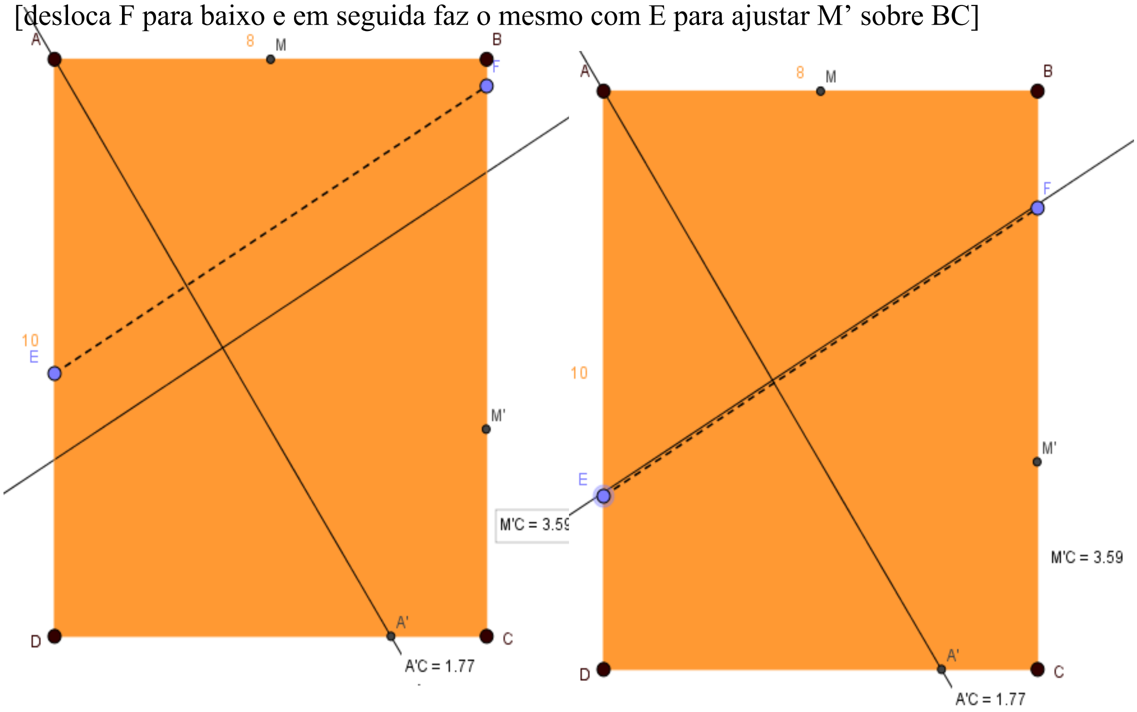


Aluno J2: Realmente, parece ter apenas uma dobra possível.

Pesquisador: Já se convenceu? Eu ainda não [por provocação]. Vocês estão deduzindo “no olho”. Conseguem validar isso de alguma forma?

Aluna K2: Uma forma é tirar as medidas, por exemplo, pode medir a distância de A’ até D e de C até M’. Depois mover os pontos pra ver se preserva a distância, entendeu?

Aluna H2: Tem razão. Pronto! [Selecionar a ferramenta *Distância, Comprimento ou Perímetro* e clicar sobre os pontos A’ e C, depois sobre M’ e C, gerando assim as medidas das distâncias A’C e CM’]. (17) Está aí, 1,77 e 3,59, as distâncias. Vou ver outra posição agora [desloca F para baixo e em seguida faz o mesmo com E para ajustar M’ sobre BC]



Aluna H2: Nossa! Agora tá mais que comprovado, são sempre iguais as medidas, então só tem uma dobra possível.

Pesquisador: Vocês chegaram nisso e conseguiram mostrar. Parabéns.

Fonte: Pinheiro (2018, p. 216 - 219).

Nesta atividade, o movimento se evidencia como realização que vai dando forma ao que se percebe mediante solicitações de uma tarefa e implicações do realizado para dela dar conta. Assim, o movimento vai fazendo mostrarem-se possibilidades, dentre as quais, se sobressaíram como modo de resolução as ideias de reflexão e translação. Elas emergem da percepção do movimento expressando-se na interface do software, bem como na folha de papel utilizada para compreensões iniciais. Entende-se que com o *movimento* inicial de dobrar a folha, *percebeu-se* uma particularidade entre o posicionamento de dois pontos e de uma reta, e *conheceu-se* essa particularidade como sendo uma equidistância que pode ser trabalhada fazendo *reflexão* (referente à isometria). A translação aparece como meta do movimento de projeção, direcionando um segmento a determinada posição do papel.

A reflexão se realiza como uma construção, valendo-se de simetria em relação a uma reta. Esta construção mantém dois pontos sempre equidistantes, quando o referencial é uma reta, mesmo que ela fosse movida várias vezes. Já a translação dá-se mediante propriedade preestabelecida, e com isso, invariante, do paralelismo entre o segmento transladado e a reta sobre a qual ele foi justaposto. Tal movimento deu-se pela possibilidade do software de *arrastar* um objeto.

Vê-se, mais uma vez, elementos correlatos às transformações geométricas e à Geometria Dinâmica, a começar pelo *movimento* como fundamental às realizações nesses campos. Ainda, destaca-se a preservação de invariantes, que nas Transformações definem grupos distintos, com suas características específicas, e na GD, definem propriedades se mostrando em meio às constantes deformações provocadas pelo movimento. Em ambos os casos, tem-se na explicitação de invariantes um modo de validar conjecturas.

Sintetizando o dito e propondo perguntas a se pensar

A título de articular compreensões acerca do pensamento geométrico das transformações em solo matemático e em GD, este texto expôs elementos para se compreender *como as transformações geométricas constituem o dinâmico, e como esse dinâmico pode se apresentar em ambientes de Geometria Dinâmica.*

Foi explicitado que o dinâmico se mostra de diferentes modos nesses espaços, no entanto, a ideia de *deslocamento* em Klein permite aproximar compreensões. As propostas de Klein (1984) e Bachelard (1968) que dizem de *invariantes* e de *relações,* respectivamente, não são distantes das realizações possíveis em ambientes de GD, uma vez que esses termos são recorrentes nos mais diversos estudos que focam o trabalho com Geometria em/com softwares.

Essa articulação é possível quando as transformações geométricas e a Geometria Dinâmica são visadas fora do caráter formal e objetivo que as define. O olhar à epistemologia possibilita fazer aproximações. Com isso, o movimento deixa de ser um conceito, vindo a constituir-se como um modo de conhecer, de habitar a Geometria fazendo de seus entes objetos variáveis, que se configuram, se desconfiguram e assim se abrem à percepção, doando seus estruturantes, suas características constituintes.

Entende-se que essa compreensão não se daria sem as possibilidades dinâmicas dos softwares de GD e das transformações geométricas, e sem a realização por parte de um sujeito de experiências visando dirigir-se a esses espaços. Esse dirigir-se pode proporcionar um conhecer mais articulado acerca dos conceitos geométricos, que permita compreendê-los, aproximando-os, distinguindo-os, visto que o fundo dinâmico possibilita novas formas de ver e conceituar entes geométricos. Na dinamicidade da atividade assistida pelo software, os "objetos" geométricos renovam-se em sua indeterminação, e sua pretendida determinação se vê aberta em ações do realizador de atividades de conhecimento. Assim, por exemplo, um círculo pode ser percebido também como "um único ponto flutuante que perpetua um movimento circular", e não apenas como um conjunto de infinitos pontos equidistantes a um único ponto, chamado de centro, conforme destacam os livros e manuais.

O que vai dizer da compreensão das possibilidades geométricas no ambiente da GD, dentre outras coisas, são os modos pelos quais o sujeito que o habita é afetado. Esses modos podem abrir horizontes para a constituição de uma Geometria transcendente a tarefas mais diretas, que traz novas concepções e possibilidades de um fazer geométrico. Esse "salto" que estabelece diferentes concepções se dá pela presença do sujeito-movente, que torna imprevisível qualquer movimento de habitar esse ambiente, bem como qualquer compreensão que emerge desse movimento.

Isso permite conjecturar que, em GD, em ambientes tecnológicos, o pensamento geométrico, estando junto à percepção de movimento, pode ser distinto do pensamento geométrico que se estabelece sem evidenciar deslocamentos, às vezes tomando-os tacitamente como já realizados, como é uma característica de uma educação geométrica mais usual em nossas escolas. A percepção do movimento estabelecido pelo tocar (clicar) e arrastar, junto à expressão desse movimento na interface do *software,* abre horizontes de compreensão do que vai se mostrando nesse mundo cibernético. Caminha-se com isso, compreendendo que a imprevisibilidade do que se mostra junto ao movimento possibilita horizontes para o novo.

Ao se entender que o conhecimento geométrico é apenas aquele já produzido pelo geômetra, pelo matemático, a ideia aqui produzida de se habitar o ambiente de GD pode ficar em segundo plano, pois *o novo* que ações com o software permitem pode se diluir em conceitos e esquemas conhecidos. O software trabalha com propriedades geométricas, com axiomas e, ao se trabalhar com eles, a produção poderá estar limitada aos modos de geometrizar já conhecidos, mesmo que esse trabalho tenha como fundo o dinamismo do software.

Sabe-se que a GD é uma construção computacional cuja programação buscou "encaixar" geometrias já conhecidas, em especial a Geometria Plana, a Espacial e a Analítica. Isso abre perguntas: *o que se discute é a Geometria Dinâmica como um novo modo de geometrizar, ou ela como um modo de se trabalhar geometrias já existentes? O que se expõe neste texto traz possibilidades outras às geometrias aqui mencionadas, ou indica modos distintos de trabalhar geometricamente em espaços nos quais elas se apresentam? É a Geometria Dinâmica uma nova Geometria?*

Essas questões foram ganhando forma no decorrer do desenvolvimento deste texto, especialmente por focar as transformações geométricas, entendidas aqui como geradoras de novas compreensões matemáticas e de geometrias. Consideram-se essas perguntas importantes. Elas tangenciam o foco do estudo, solicitam um aprofundamento reflexivo e teórico. Portanto, respondê-las agora não daria as compreensões que este estudo busca. Com isso, elas são deixadas aqui em aberto.

Mas, conjecturando, entende-se que o pensamento geométrico que se estabelece em espaços não computacionais, quando situado na computação, ganhou novos componentes, nova estética, oportunidades outras de produção de mudança, de construção e de movimento, o que produz novos modos de espacializar e de pensar geometricamente.

A Geometria Dinâmica possibilita percepções, compreensões, modos de perceber e de compreender que são correlatos aos trabalhos com softwares. No entanto, é preciso avançar em um estudo que possibilite compreender como se dá esse trabalho, como as percepções se evidenciam na vivência de movimentos realizados mediante solicitações de tarefas e como o conhecimento vai se constituindo quando se está com os sujeitos realizando essas tarefas.

Pensar sobre as perguntas acima postas abre possibilidade de uma variação epistemológica direcionada à potencialidade pedagógica. Os autores lidos e aqui citados levam a intuir a importância de se pesquisar de que maneira modos distintos de geometrizar renovam - especialmente em relação à tradição científica e escolar - objetos e focos, objetivos e possibilidades, e esquemas conceituais e métodos. Isso permite projetar que uma pedagogia geométrica significativamente distinta da que se vê mais usualmente em escolas pode tomar corpo e se tornar interessante curricularmente.

As transformações geométricas e elas trabalhadas em ambientes de GD podem abrir outras possibilidades às práticas pedagógicas que há muito tempo estão enraizadas no ensino e na aprendizagem de Matemática, que tem como um dos aspectos mais comuns sua apresentação tácita em manuais didáticos, com seus conteúdos reproduzindo a estrutura científica trabalhada a partir do pensamento grego alinhavado por Euclides. Tendo em vista que há pouca ênfase ao conhecimento matemático constituindo-se no âmbito do *movimento,* do *deslocamento*, cujas implicações possibilitam estudar e compreender os estruturantes de uma Geometria, de uma figura, de compreender uma propriedade, uma característica, um modo de validar, ou até mesmo o próprio movimento em seu modo de ser contínuo, propõe-se aqui uma geometria dinâmica e movente, que pode gerar uma "prática que vai propor geometrizar-se de outro modo possível. Essa abertura pode fazer recuperar-se sentidos humanos do espacializar, de se pensar mais originalmente o espaço" (DETONI; PINHEIRO, 2016, p. 238).

Referência

BACHELARD, G. **O novo espírito científico**. 3. ed. Rio de Janeiro: Tempo Brasileiro, 1968.

BICUDO, M. A. V.; KLUTH, V. S. Geometria e Fenomenologia. In: BICUDO, M. A. V. (Org.). **Filosofia da Educação Matemática**: fenomenologia, concepções, possibilidades didático-pedagógicas. São Paulo: Editora UNESP, 2010. p. 131-147.

BONGIOVANNI, V.; JAHN, A. P. De Euclides às geometrias não-euclidianas. **Revista Iberoamericana de Educação Matemática**, Espanha, n. 22, p. 22-51, jun. 2010.

DETONI, A. R.; PINHEIRO, J. M. L. Considerações filosóficas sobre o corpo movente e o conhecimento geométrico. In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 13, 2016, São Paulo. **Anais...** São Paulo: SBEM, 2016. p. 1 - 11.

GODEAUX, L. **Les Géométries, Collection Armand Colin**. 3. ed. Paris: Libraire Armand Colin, 1947.

KLEIN, F. **O programa de Erlangen de Félix Klein**: considerações comparativas sobre as pesquisas geométricas modernas. São Paulo: IFUSP, 1984.

MABUCHI, S. T. **Transformações Geométricas**: A trajetória de um conteúdo ainda não incorporado às práticas escolares nem à formação de professores. 2000. 259p. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica (PUC), São Paulo, 2000.

MADEIROS, F. M.; GRAVINA, M. A. Geometria Dinâmica no ensino de Transformações no Plano. **Professor de Matemática Online**, Rio de Janeiro, v. 3, n. 1, p. 1-20. 2007.

PIAGET, J.; GARCIA, R. **Psicogênese e História das Ciências**. Trad. Maria F. M. R. Jesuíno. Lisboa: Publicações Dom Quixote, 1987.

PINHEIRO, J. M. L. **O movimento e a percepção do movimento em ambientes de Geometria Dinâmica**. 283p. Tese (Doutorado em Educação Matemática) - Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho, Rio Claro, 2018.

RICHIT, A. **Projetos em Geometria Analítica usando o *software* de Geometria Dinâmica**: repensando a formação inicial docente em matemática. 2005. 169f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Instituto de Geociência e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2005.

SILVA, G. H. G.; PENTEADO, M. G. O trabalho com GD em uma perspectiva investigativa. In: SIMPÓSIO NACIONAL DE ENSINO DE CIÊNCIA E TECNOLOGIA, 1, 2009, Curitiba. **Anais...** Curitiba: UTFPR, 2009. p. 1066-1079.

SOUZA, C. E.; GRAVINA, M. A. Geometria com animações interativas. **Novas Tecnologias da Educação**, Rio Grande do Sul, v. 7 n. 1, p. 1-9, jul. 2009.

WAGNER, E. **Construções Geométricas**. 6. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2007.

ZULATTO, R. B. **Professores de matemática que utilizam softwares de geometria dinâmica**: suas características e perspectivas. 2002. 184p. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Instituto de Geociência e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2002.