ISSN 2177-9309

em teia Revista de Educação Matemática e Tecnológica Iberoamericana

Universidade Federal de Pernambuco

Pós-Graduação em Educação Matemática e Tecnológica EDUMATEC

Teorema Fundamental do Cálculo: uma análise histórica e aplicação do conceito de integral

Fundamental Calculus Theorem: a historical analysis and application of the integral concept

Natália Oliveira Nascimento
Graduanda em Licenciatura em Matemática
Universidade Federal de Uberlândia – Minas Gerais – Brasil
natalia-non@hotmail.com

Rogério Fernando Pires
Doutor em Educação Matemática
Universidade Federal de Uberlândia – Minas Gerais – Brasil
rfpires@ufu.br

Resumo

Este trabalho descreve o processo de modelagem utilizando o *software* GeoGebra para o cálculo da medida da área ocupada por dois lagos situados em um parque na cidade de Ituiutaba no Triângulo Mineiro. Para a realização do estudo, inicialmente foi feita uma pesquisa de cunho histórico acerca do Teorema Fundamental do Cálculo, com intuito de compreender a construção dos conceitos envolvidos no teorema, que foi ferramenta fundamental na construção dos modelos. Na sequência, foi produzido um levantamento de informações sobre o parque onde os lagos estão localizados e imagens via satélite dos lagos foram obtidas na internet e plotadas no *software*, com intuito de proceder a um ajuste de curva e encontrar um modelo que ajudasse a resolver o problema. Após a obtenção das equações que modelaram as curvas sobre o contorno dos lagos, foram adotados processos de integração que permitiram encontrar a medida das áreas procuradas. Como resultado, foi possível compreender cada uma das etapas do processo de modelagem e evidenciou-se que a modelagem matemática viabiliza despertar o espírito investigativo e que o desencadeamento da construção de um modelo se assemelha muito ao processo histórico de construção de um conceito.

Palavras-chave: Modelagem matemática. Teorema Fundamental do Cálculo. Integral. História da matemática. Intuição.

Abstract

This work describes the modeling process using the GeoGebra software to calculate the measurement of the area occupied by two lakes located in a park in the city of Ituiutaba in the Minas Triangle. In order to carry out the study, a historical research about the Fundamental Theorem of Calculus was carried out, in order to understand the construction of the concepts involved in the theorem, which was a fundamental tool in the construction of the models. Then, a survey of information about the park where the lakes are located was produced and satellite images of the lakes were obtained on the internet and plotted in the software, in order to make a curve adjustment and find a model that would help to solve the problem. problem. After obtaining the equations that modeled the curves on the contours of the lakes, integration processes were adopted that allowed the measurement of the areas sought. As a result, it was possible to understand each of the stages of the modeling process and it became evident that mathematical modeling makes it possible to awaken the investigative spirit and that the triggering of the construction of a model is very similar to the historical process of building a concept.

Keywords: mathematical modeling. Fundamental Theorem of Calculus. Integral. History of Mathematics. Intuition.

Introdução

Cada vez mais pesquisas vêm sendo desenvolvidas na área da educação com o intuito de buscar estratégias e métodos que possam aperfeiçoar os meios de ensino e aprendizagem. Isso acorre em razão da importância da educação na sociedade, sendo fundamental não só na prosperidade científica, mas também como um agente necessário na formação de cidadãos. Sua relevância vai desde ensinar operações básicas matemáticas a linguagens de comunicação, além do desenvolvimento do pensamento crítico.

Paralelamente, estudos nas diferentes áreas do conhecimento, como Geografia, Ciências Biológicas, Sociologia e outras, surgem para aprimorar técnicas usadas no meio acadêmico, que sejam capazes, por exemplo, de promover o interesse e ajudar na aprendizagem dos conteúdos apresentados aos alunos, tanto no Ensino Fundamental e Médio quanto no Superior. Não diferente, as pesquisas feitas em Educação Matemática, considerando sua relevância nas mais diferentes áreas, são fundamentais ao trazerem contribuições ao processo de ensino e aprendizagem.

De acordo com Tatto e Scapin (2004), é perceptiva no convívio com os alunos a rejeição quando se deparam com a Matemática. Por conseguinte, ao ingressar nas universidades ou no mercado de trabalho, a maioria desses alunos opta por profissões que não envolvem o raciocínio matemático. Além de buscar meios que promovam um maior interesse por parte dos alunos, é fundamental reconhecer as consequências negativas propagadas por profissionais que tiveram experiências pouco exitosas com a Matemática, gerando, assim, um ciclo.

A partir disso, esta pesquisa pretende abordar algumas das estratégias que possam contribuir para o aprendizado matemático, especificamente do Teorema Fundamental do Cálculo, que relaciona a diferenciação e a integração, apresentado no curso de Cálculo Diferencial e Integral I. É indiscutível a relevância de tal teorema como uma das ferramentas mais importantes do Cálculo Diferencial e Integral, sendo usada desde a Matemática Pura até aplicações variadas nas demais ciências exatas, ciências tecnológicas, engenharias e outras. Portanto, é importante buscar aspectos que possam contribuir em seu processo de ensino e aprendizagem.

Para o avanço da pesquisa, inicialmente foram feitas uma busca bibliográfica e uma análise histórica acerca do desenvolvimento do teorema, possibilitando uma perspectiva teórica. Posteriormente, foi apresentada uma das aplicações do teorema por meio da modelação com o auxílio do *software* GeoGebra. A apuração de cunho bibliográfico e a aplicação do teorema propiciaram compreender a importância de vários aspectos relacionados ao teorema, por exemplo, o cálculo da área de um segmento parabólico, feito por Arquimedes, o que culminou no entendimento do processo construtivo ao longo da história, considerando a importância da assimilação de aspectos epistemológicos do conceito, viabilizado mediante aplicações por meio de ferramentas tecnológicas.

O desenvolvimento desse teorema se deu a partir da busca de soluções para problemas práticos de aplicação, sendo importante a contribuição de sua análise histórica e epistemológica na formação de conceitos. Na maioria dos cursos de Cálculo, a diferenciação é apresentada antes da integração, o que vai de encontro à construção histórica. Segundo Grande (2013), a integração surgiu a partir do processo de somatórios relacionados a comprimentos, áreas e volumes, enquanto as ideias de diferenciação foram discutidas sobre tangentes a curvas, máximos e mínimos de uma função.

De acordo com Eves (2004), inicialmente foi Isaac Barrow (1630-1677) que deu os primeiros passos para o Teorema Fundamental do Cálculo, que mais tarde foi aperfeiçoado por Isaac Newton (1643-1727) e Leibniz (1646-1716). Apesar de o foco principal ser o teorema, faz-se necessário pesquisar as origens do Cálculo até a sofisticada análise atual e, além da importância dos caminhos que levaram ao teorema, visualizar a aplicação que o estimulou.

Ademais, em busca de elementos que despertem o interesse dos alunos, a tecnologia viabiliza atividades interativas. O GeoGebra é um *software* que auxilia em tarefas matemáticas desde a Geometria até o Cálculo. O processo do cálculo da medida da área efetuado pelo GeoGebra, de acordo com Grande (2013), assemelha-se às somas de partes desenvolvidas por Fermat, uma das principais ideias utilizadas no desenvolvimento do Teorema Fundamental do Cálculo.

A intuição e o desenvolvimento histórico do teorema

É indiscutível a importância do Cálculo Diferencial e Integral na Matemática e nas demais ciências exatas, como a Física e a Química. Não obstante a grande relevância dos conceitos teóricos do Cálculo, Grande (2013) aponta que a maioria dos alunos se prende à compreensão algébrica e métodos de resolução de exercícios. Por conseguinte, quando se deparam com representações geométricas, não conseguem relacioná-las com os conceitos, prejudicando o prosseguimento do processo de ensino.

É inerente o papel da intuição e da criatividade no desenvolvimento das ciências, e na Matemática não é diferente. Sobre a intuição e a criatividade, Paty (2010) traz a relação entre o racional e o criativo defendida pelo filósofo, matemático e físico Henri Poincaré, que enfatiza que a criação científica é sua liberdade. O autor destaca que tanto para Poincaré como para Einstein as ideias de racionalidade e inteligibilidade caminham juntas com a intuição e a invenção. Para Poincaré (1995), não só os matemáticos intuicionistas partem da intuição, mas também os analistas, que têm como fundamento inicial a lógica e manifestam a intuição em algum momento em seu processo de desenvolvimento científico. Isso ocorre em razão do processo natural da intuição no racional humano.

O objetivo principal dos conteúdos matemáticos para Ávila (1999) é transmitir ideias, o que às vezes não acontece em virtude da apresentação de conceitos carregados de rigor, em que se perde a essência inicial. No processo de ensino e aprendizagem, baseando-se nos apontamentos de Paty (2010), é necessário que se estimule a intuição dos alunos na construção de novos conceitos a partir do conhecimento prévio adquirido. No entanto, é importante que, ao final, seja apresentado o conteúdo com o devido rigor matemático, o qual é essencial na formação do conceito.

A intuição não deve ser vista como suficiente na criação científica. Para Grande (2013), ela é o saber espontâneo que surge inicialmente. Ainda assim, é fundamental o uso da lógica e do rigor no avanço de estudos até a sua conclusão. Uma forma de assimilar o rigor com a intuição é investigar como se deu a formação do conhecimento, sendo a história uma ferramenta essencial para entender o processo de criação de determinado conceito. Outro aspecto significativo que a história traz é a concepção fragmentada e gradual da criação científica.

No decorrer do desenvolvimento do Cálculo até o que se tem atualmente, observa-se que, inicialmente, as teorias foram desenvolvidas a partir de estímulos de outras ciências, em especial a Física. Esse fato explica o crescimento paralelo da Matemática e das outras ciências, além dos grandes estudiosos que se destacaram tanto na Matemática quanto na Física. Apresentar aos alunos o desenvolvimento proporciona a visualização da construção dos conceitos e teoremas, o que torna o conteúdo mais cognoscível.

Diante do exposto, é pertinente iniciarmos o estudo do Teorema Fundamental do Cálculo a partir de uma análise histórica em busca de seus estímulos e desenvolvimento. O Cálculo Diferencial e Integral, tal qual o conhecemos hoje, não surgiu de forma isolada, sendo possível identificar várias circunstâncias que levaram ao desenvolvimento do Teorema Fundamental do Cálculo. Existiu também uma grande influência do contexto histórico em que estavam inseridos os estudiosos que contribuíram para o desenvolvimento desse conceito.

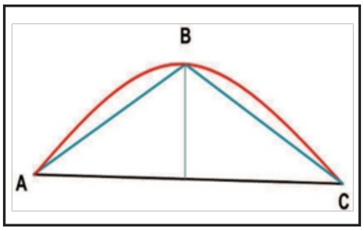
O relato mais avançado a respeito de áreas de curvas ocorreu pelo método de exaustão de Eudoxo, o matemático, astrônomo e filósofo grego que realizou os primeiros cálculos por meio da aproximação sucessiva de polígonos contidos na curva. É expressa a seguinte preposição:

> Se de uma grandeza qualquer subtrai-se uma parte não menor que sua metade, do restante subtrai-se também uma parte não menor que sua metade, e assim por diante, se chegará por fim a uma grandeza menor que qualquer outra predeterminada da mesma espécie (EVES, 2004, p. 419).

Todavia, o método de Eudoxo era aplicado somente aos cálculos aproximados dos polígonos conhecidos pelos estudiosos da época, o que inviabilizava o cálculo de algumas curvas, além de erros significativos de aproximação.

Outro teórico que utilizou o mecanismo do cálculo por exaustão foi Arquimedes (c. 212 a.C.), no entanto o estudioso se aproximou mais do método adotado atualmente. Arquimedes usou a geometria de uma parábola como forma de calcular a área. O teorema foi enunciado da seguinte forma: “Enunciarei o primeiro teorema que descobri por métodos mecânicos, isto é: qualquer segmento de parábola é quatro terços do triângulo com a mesma base e igual altura” (ÁVILA, 1986, p. 32). Grande (2013) faz a seguinte interpretação do teorema:

Figura 1 – Área de um segmento parabólico por Arquimedes



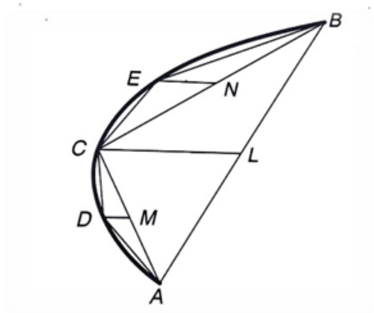
Fonte: Grande (2013)

$$A_P = \frac{4}{3} . A_T$$

Sendo AP = área do segmento parabólico e AT = área do triângulo ABC, é possível ver a demonstração mecânica completa em Grande (2013).

Arquimedes desenvolveu o cálculo pela quadratura de parábolas, e Eves (2004) descreve os passos utilizados em seu desenvolvimento até a proposição final.

Figura 2 – Pontos de segmentos parabólicos



Fonte: Eves (2004, p. 421).

Na Figura 2 têm-se C, D, E como os pontos do arco de segmento parabólico, que são obtidos pelos pontos médios L, M e N de AB, CA e CB, respectivamente. Isso viabiliza traçar os segmentos LC, MD e NE paralelos ao eixo da parábola e passando pelos pontos médios dados. A partir da geometria da parábola, Arquimedes chegou à seguinte conclusão:

$$\triangle\, CDA + \triangle\, CEB = \frac{\triangle\, ABC}{4}$$

O raciocínio pode ser repetido sucessivamente,

$$\triangle\, ABC + \frac{\triangle ABC}{4} + \frac{\triangle ABC}{4^2} + \cdots + \frac{\triangle ABC}{4^n} = \triangle\, ABC\ \left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \cdots + \frac{1}{4^n}\right) = \frac{4}{3}\ \triangle\, ABC,$$

até chegar à conclusão final.

Arquimedes desenvolveu diversas máquinas e engenhos, além de alguns artefatos para guerra, o que contribuiu diretamente para os estudos físicos e matemáticos do cientista. Apesar da relevância de seus resultados para a integração, somente em 1450 que a Europa Ocidental conheceu suas pesquisas. A Europa Ocidental do século XV foi marcada pelas grandes navegações, avanços decorrentes do estudo da mecânica, que convergiram para o Teorema Fundamental do Cálculo.

Durante séculos foi predominante a geometria grega para resolver problemas práticos, e, com a evolução da álgebra desenvolvida pelos árabes, por volta dos séculos XIV e XV, os estudos acerca do Cálculo Diferencial e Integral tiveram progressos significativos, por exemplo, a relação estabelecida por Nicolau Oresme (1323-1382) entre a velocidade instantânea e o tempo, que caracteriza o movimento. Esse fato, de acordo com Boyer (1996), propulsionou o estudo das fluxões e dos fluentes, explorado posteriormente por Isaac Newton (1643-1727).

Com o intuito de solucionar problemas decorrentes de áreas em sua segunda lei do movimento planetário e resolver o cálculo de volume de barris, Johann Kepler (1571-1630) adotou os métodos de cálculo de áreas de curvas já estudados. Contudo, Kepler não fez uso do rigor matemático de Arquimedes para efetuar os cálculos, dificultando cálculos exatos e avanços na integração.

Os primeiros passos da diferenciação se originaram em consequência de problemas relacionados a traços de tangentes a curvas e a determinações de máximos e mínimos de funções. O primeiro indício do método da diferencial foi exposto em 1629 por Fermat (1607-1665). As ideias de Fermat, como ficaram conhecidas, propunham o cálculo de máximos e mínimos de uma função. Kepler (1571-1630) havia constatado que os incrementos de uma função são infinitesimais em relação aos vizinhos, quando estes são pontos de máximo ou de mínimo comum.

A partir dos estudos de Kepler, Fermat formulou um processo capaz de determinar a reta tangente através de um ponto e de uma curva, sendo sua a equação cartesiana conhecida. O método pode ser brevemente descrito:

> Se *f(x)* tem um máximos ou mínimos comum em *x* e se *e* é muito pequeno, então o valor de *f(x - e)* é muito próximo ao de *f(x)* de tal modo que podemos experimentar fazer *f(x – e) = f(x)*. Para tornar essa igualdade correta, impor que *e* assuma o valor de zero. Dessa forma, as raízes da equação resultante darão, então, os valores de *x* para os quais *f(x)* assume um máximo ou um mínimo (EVES, 2004, p. 429).

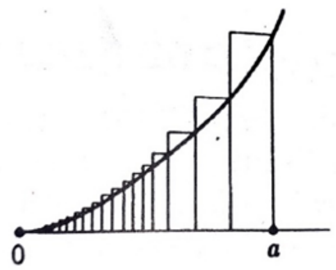
Apesar da falta de rigor e do uso não frequente do conceito, é possível assimilar a descrição do método desenvolvido por Fermat por meio de notações modernas da seguinte forma:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = 0$$

ou seja, tomar a derivada de *f(x)* em *x igual a zero*.

Paralelamente, Fermat desenvolvia o cálculo de áreas de curvas a partir dos resultados apresentados por Cavalieri. Boyer (1996) mostra como foram originadas as principais ideais que levaram Fermat ao resultado final. Considerando uma curva $y = x^n$ e a área dessa mesma curva desde $x = 0$ até $x = a$, e em seguida dividindo esse intervalo em subintervalos, como na imagem:

Figura 3 – Aproximação de área sob a curva por meio de retângulos



Fonte: Boyer (1996, p. 240)

Para entender o raciocínio do autor, tomam-se os pontos como abscissa a, aE, aE^2, aE^3 … onde E é uma quantidade menor que um. Para obter as áreas dos retângulos circunscritos foram levantadas as ordenadas e para determinar as áreas dos retângulos circunscritos de aproximação foi usada a progressão geométrica $a^n(a - aE), a^nE^n(aE - aE^2), a^nE^{2n}(aE^2 - aE^3), \dots$ ou seja,

$$\frac{a^{n+1}(1-E)}{1-E^{n+1}} \quad ou \quad \frac{a^{n+1}}{1+E+E^2+\cdots+E^n}.$$

Com o intuito de tornar cada vez mais estreitos os retângulos, supõe-se que E tende a 1 e assim a soma dos retângulos se aproxima cada vez mais da curva. Ao fazer E = 1 e substituir na fórmula anterior, chega-se a $(a^{n+1})/(n + 1)$ a área procurada sob a curva $y = x^n$. O modelo se faz análogo para valores racionais fracionários da forma p/q e tomando n=p/q.

Apesar das contribuições tanto na integração quanto na diferenciação, Fermat não relacionou seus resultados, considerando-os de diferentes áreas e com a intenção de solucionar questões distintas. John Wallis (1616-1703) e Isaac Barrow (1630-1677) são tidos como antecessores de Isaac Newton no tocante ao estudo avançado e aprimorado do Cálculo. Foi a partir de conhecimentos prévios que Newton conseguiu definir com rigor os novos conceitos a serem apresentados.

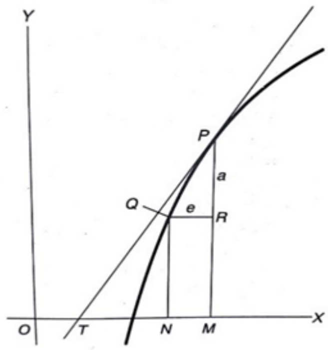
Os trabalhos de Wallis passam pela análise de séries até a discussão das cônicas como curvas de segundo grau, que antes eram vistas apenas pela visão geométrica, como secções de um cone. Wallis desenvolveu estudos que faziam menção às obras de Descartes e Cavalieri, contribuindo significativamente com novas descobertas a respeito da integração. Durante esse processo, o matemático chegou a um resultado equivalente ao método de Fermat no cálculo de integrais, que mais tarde recebeu a notação moderna habitual:

$$\int_0^1 x^n \; dx = \frac{1}{n+1},$$

com *n* podendo assumir valor inteiro, fracionário ou negativo diferente de -1.

Em sua obra *Lections Opticae et Geometricae*, o matemático Barrow dá os primeiros passos para diferenciação de forma semelhante ao processo moderno. Eves (2004) descreve a demonstração de forma sucinta:

Figura 4 – Suposição da tangente



Fonte: Eves (2004, p. 435)

Supõe-se que a finalidade é obter uma tangente à curva no P, mostrado na Figura 4, e Q um ponto próximo a P também pertencente à curva. Barrow considerava os triângulos PTM e PQR praticamente semelhantes e o triângulo PQR indefinidamente pequeno, estabelecendo a relação:

$$\frac{RP}{QR} = \frac{MP}{TM}$$

Tomando como coordenadas de P x e y, consequentemente as de Q são x – QR e y – RP. Consequentemente é dada a equação da curva:

$$OT = OM - TM = OM - MP\left(\frac{QR}{RP}\right)$$

Denotando QR = e e RP = a, a equação assume a forma: $OT = x - y\left(\frac{e}{a}\right)$, onde a/e é o moderno dy/dx.

A partir disso, Edwards Jr. (1979, p. 139) estabeleceu que Barrow mostrou o mesmo que $\frac{DF}{DT} = \frac{A(x_0)}{\frac{A(x_0)}{f(x_0)}}$, em notação moderna. Ademais, foi possível constatar que TF é tangente à curva $z = A(x)$, e, como já havia sido descoberto, a reta tangente toca a curva em um único ponto. Conclui-se que

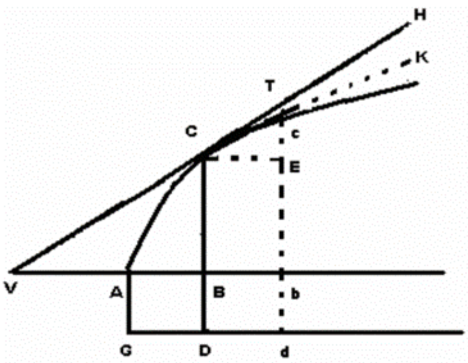
> [...] se Barrow tivesse apresentado analiticamente a reta TF, com inclinação $Ac(x_0)$ propriamente definida, poderia ter chegado a $Ac(x_0) =$

> *f(x_0)*, ou seja, poderia ter formulado de modo explícito o Teorema Fundamental do Cálculo (ANACLETO, 2007, p. 35)

Apesar do desenvolvimento de Barrow, foi Newton, discípulo de Barrow, que enunciou o Teorema Fundamental do Cálculo com rigor matemático; ele percebeu a relação inversa entre diferenciação e integração. Boyer (1996, p. 291) expressa que Newton é considerado o criador do Cálculo porque foi o único capaz de assimilar e explorar a relação inversa entre a inclinação da reta tangente e área por meio de sua nova análise infinita.

Segundo Anacleto (2007), Newton descreveu a relação como “fluxões os aumentos das velocidades dos movimentos, e de fluentes às quantidades geradas”. Da interpretação geométrica segue que a relação entre cálculo da área sob uma curva com o traçado de tangentes à curva.

Figura 5 – Representação do método proposto por Newton



Fonte: Baron (1985, p. 31 *apud* ANACLETO, 2007, p. 430).

Mais tarde, Leibniz (1646-1716), em 1686, publicou um artigo que apresenta o seu Cálculo Integral e enfatiza a relação inversa entre diferenciação e integração. Os estudos aprofundados de Newton e Leibniz e a importância do estabelecimento de notações e do rigor matemático proporcionaram o nascimento da Análise.

Modelagem Matemática: método de pesquisa e ensino

A análise histórica possibilita compreender os caminhos traçados até chegar ao conhecimento contemporâneo exposto. Não obstante, a construção que levou ao Teorema Fundamental do Cálculo e ao desenvolvimento da integral pode ser demonstrada por ferramentas modernas que aproximarão o aluno das ideias e dos conceitos a serem apresentados. Bassanezi (2006) salienta o interesse pela Matemática por meio de estímulos externos, ou seja, originados do cotidiano. A partir disso, o autor defende o uso da Matemática Aplicada para mostrar o conteúdo e simultaneamente sua utilidade.

Posto isso, a modelagem surge como um método que contribui com a construção do conhecimento no processo de ensino e aprendizagem. Dado um problema da realidade, a modelagem matemática busca resoluções para esse problema por meio de conteúdos e conceitos matemáticos. De acordo com Bassanezi (2006), o uso da modelagem propõe estimular a criatividade, a intuição, a resolução de problemas e a capacidade de modelar. Além disso, a modelagem proporciona um vínculo entre a realidade e o processo histórico de construção.

Biembengut e Hein (2007) trazem uma divisão clara de três etapas do processo: a primeira é a interação, em seguida, a matematização e, por último, o modelo matemático. A primeira etapa consiste no reconhecimento da situação-problema, estudo do assunto a ser trabalhado, análise das variáveis e outras situações de conhecimento a fundo sobre o material a ser modelado. Depois de compreendida a situação, a segunda etapa, a matematização, trabalha a formulação do problema encontrado e sua resolução no tocante ao modelo. Para concluir, no modelo matemático, são realizadas uma interpretação da solução e a avaliação da confiabilidade do modelo. A partir dessa divisão, é esperado que a modelagem seja capaz de incentivar a pesquisa, promover a habilidade em formular e resolver problemas, aplicar o conteúdo matemático e desenvolver a criatividade.

Muitas vezes, no processo de ensino, os conteúdos e as teorias matemáticas são apresentados como acabados e completos, o que conduz a um ensino desvinculado da realidade e do processo histórico de construção do conceito. Nesse sentido, Bassanezi (2006, p. 36) esquematiza a forma como um teorema é ensinado; a apresentação obedece à seguinte ordem: "enunciado – demonstração – aplicação". De acordo com o autor, o processo deveria ser o inverso, semelhante ao que originou o teorema, ou seja, primeiro a motivação (externa ou não à matemática), formulação e validação das hipóteses acompanhadas de questionamentos e, por fim, seu enunciado. Uma maneira de sanar essa deficiência presente no ensino seria a aplicação da modelagem matemática de modo efetivo e previsto no processo. Mesmo com seus inúmeros benefícios, a modelagem encontra diversos empecilhos no ambiente escolar.

Os obstáculos são variados e vão desde processos burocráticos até propriamente a resistência dos estudantes. Os cursos regulares têm orientações e um programa de conteúdos que devem ser trabalhados em sala de aula, que tornam muitas vezes a aplicação da modelagem inviável por requerer um tempo maior e nem sempre seguir o programa. Outro problema encontrado é o possível desinteresse dos alunos ao se depararem com um novo método, com o qual não tiveram contato. Além disso, muitos professores não se sentem capacitados para desenvolver a modelagem por não terem visto tal conteúdo em sua formação ou até mesmo receio de prejudicar o seguimento do curso. Ademais, existe a possibilidade de o aluno se ver sem base matemática suficiente para buscar conhecimentos mais específicos.

Para alguns educadores matemáticos, por exemplo, D'Ambrosio (1996), Grande (2013), Pires e Silva (2014), a Matemática se torna mais atrativa e efetiva na sociedade quando se tem uma aplicabilidade de seu conteúdo. Nesse sentido, é indispensável proporcionar aos alunos momentos que possibilitem a interdisciplinaridade. Assim, surge a modelação como solução. Biembengut e Hein (2007) consideram a modelação matemática uma estratégia que abrange o conteúdo programático e consegue adaptá-lo a uma determinada situação. Inicialmente, é preciso que o professor tenha conhecimentos prévios de seus alunos, desde o domínio matemático até mesmo o contexto socioeconômico em que eles estão inseridos. Os objetivos gerais são semelhantes à modelagem matemática, como despertar o interesse pela Matemática e desenvolver habilidade para resolver problemas, estimular a criatividade e realizar pesquisas.

Com base nos referenciais citados, estudo do conteúdo e observações, esta pesquisa abordou a modelagem científica e a modelação no ensino-aprendizado. A disciplina-base para o desenvolvimento é o Cálculo Diferencial e Integral, especificamente o Teorema Fundamental do Cálculo, que será aplicado no cálculo de áreas. Além disso, será usado o *software* GeoGebra com o intuito de auxiliar na modelação de imagens via satélite, verificar a veracidade dos cálculos realizados e como uma ferramenta para o desenvolvimento de atividades de ensino voltadas para o Teorema Fundamental do Cálculo.

O processo de modelagem para o cálculo de área

O estudo de caráter experimental, de acordo com Fiorentini e Lorenzato (2006), é aquele que visa constatar a validade de determinadas hipóteses sobre algum fenômeno ou situação. Nesse sentido, a pesquisa aqui relatada procurou analisar a relação entre os fenômenos envolvidos, procurando saber se os resultados alcançados condizem com a realidade, produzindo um modelo matemático e examinando os resultados após a resolução do problema.

Para a constatação da validade do modelo matemático elaborado foi realizado um experimento que ajudou a resolver o problema inicialmente gerado. Rudio (1986) explica que experimentos são situações criadas dentro ou fora de um laboratório, nas quais são usadas técnicas rigorosas com o objetivo de exercer certo controle sobre as variáveis que serão observadas.

A construção do modelo contribui com o desenvolvimento do conhecimento, com intuito de fazer uma modelação utilizando o Teorema Fundamental do Cálculo, e o primeiro passo foi o reconhecimento do tema e suas possíveis aplicações. Lima (1999) traz o seguinte enunciado:

Teorema Fundamental do Cálculo (TFC)

Seja $f : I \to \mathbb{R}$ contínua no intervalo I. As seguintes afirmações a respeito de uma função $F : I \to \mathbb{R}$ são equivalentes:

(1) F é uma integral indefinida de f, isto é, existe $a \in I$ tal que:

$$F(x) = F(a) + \int_a^x f(t)dt, \forall\, x \in I.$$

(2) F é uma primitiva de f, isto é, $F'(x) = f(x)$ para todo $x \in I$.

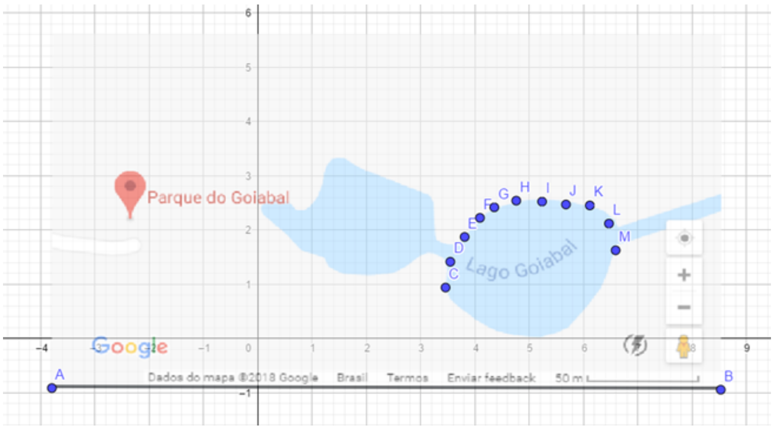
A aplicação mais direta da integração pela diferenciação é o cálculo da medida de áreas e volumes, com o objetivo de vislumbrar uma aplicação acessível e que aproxime o aluno da realidade no processo de ensino e aprendizagem no Ensino Superior. Para tanto, escolheu-se para ser calculada a medida da área de dois lagos localizados em um parque municipal situado em Ituiutaba, interior de Minas Gerais. Nesse momento, fica visível a etapa da interação com a situação a ser modelada, conforme apontam Biembengut e Hein (2007).

O Parque Municipal do Goiabal foi adotado por intermédio das Unidades de Conservação (UC), criadas a partir do Sistema Nacional de Unidades de Conservação da Natureza (SNUC) (Lei nº 9.985, de 18 de julho de 2000). O parque foi inaugurado em 1986, no município de Ituiutaba-MG, com a finalidade de preservar o ecossistema natural, proporcionar um momento de lazer e turismo, a fim de valorizar o meio ambiente e suas particularidades, além de possibilitar a realização de pesquisas científicas. Apesar de sua importância histórica e ambiental, o parque não é valorizado de forma consciente pela comunidade e, assim, não alcança seus objetivos iniciais. Faz-se necessário um plano de gestão, no qual sejam levantadas suas funções, feitas adaptações, reestruturações e, por fim, uma divulgação adequada do espaço, além da valorização do local por parte da população.

Para a realização deste estudo, que visou à modelação usando o TFC, foram aplicados recursos tecnológicos que propiciaram dinamismo à construção do modelo e confiabilidade aos resultados, análise de informação e visualização do processo. Assim, foram empregados recursos de imagens via satélite, disponibilizadas pelo Google, e os cálculos via GeoGebra. O GeoGebra é um *software* de Matemática gratuito e de fácil acesso, utilizado como ferramenta nos mais diferentes níveis de ensino, que trabalha aspectos de geometria, álgebra, tabelas, gráficos, estatística e cálculo combinados em uma única aplicação.

O aplicativo permite adicionar imagens e, a partir delas, desenvolver equações que representem funções por meio de pontos colocados estrategicamente, como na imagem a seguir:

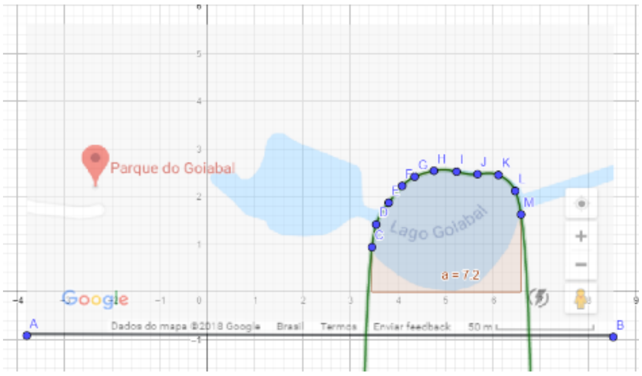
Figura 6 – Primeiro passo após a inserção da imagem no GeoGebra



Fonte: Google Maps[1], com adaptações

Na Figura 7, foram inseridos, com o auxílio do GeoGebra, pontos sobre uma parte da margem de um dos lagos e, depois de um ajuste de curva, foi possível obter a equação que descreve algebricamente a curva que contém os pontos dispostos inicialmente. A Figura 8 a seguir mostra a curva ajustada sobre os pontos.

Figura 8 – Curva ajustada a partir dos pontos



Fonte: Google Maps[2], com adaptações

---

[1] Disponível em: google.com.br/maps/place/Parque+do+Goiabal/@-19.0074667,-49.4503427,17z/data=!3m1!4b1!4m5!3m4!1s0x94a2317ddf28b825:0x8ae758258c5ff6e2!8m2!3d-19.0074718!4d-49.448154.

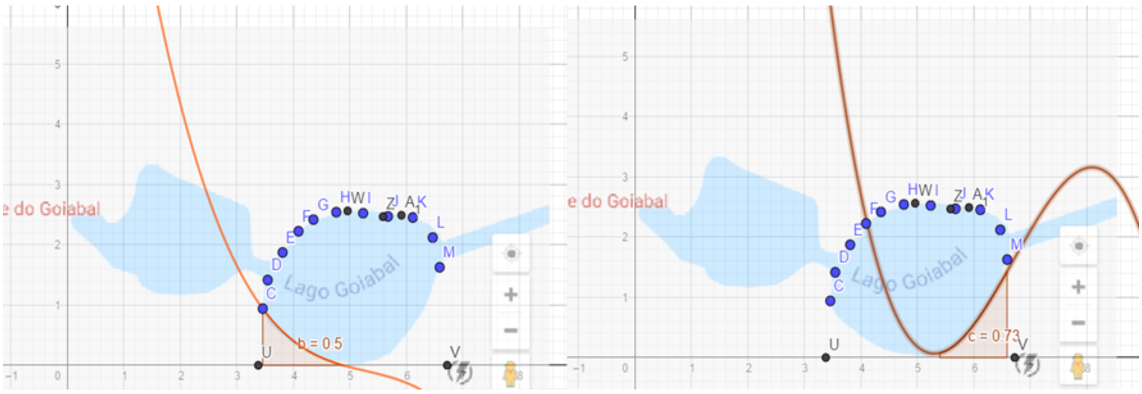
[2] Disponível em: google.com.br/maps/place/Parque+do+Goiabal/@-19.0074667,-49.4503427,17z/data=!3m1!4b1!4m5!3m4!1s0x94a2317ddf28b825:0x8ae758258c5ff6e2!8m2!3d-19.0074718!4d-49.448154.

A figura anterior mostra a curva ajustada sobre os pontos, cuja equação que a representa algebricamente obtida com auxílio do GeoGebra é $f(x) = -0{,}15x^{10} + 7{,}51x^9 - 169{,}85x^8 + 2266{,}84x^7 - 19756{,}2x^6 + 117481{,}99x^5 - 482724{,}84x^4 + 1353250x^3 - 2476971{,}29x^2 + 2673057{,}34x - 1291500{,}63$, que é o modelo matemático que possibilita a resolução do problema proposto inicialmente (calcular a medida da área dos lagos do Parque do Goiabal).

No aplicativo na barra de entrada, selecionando a opção Integral (<Função>, <Valor de x Inicial>, < Valor de x Final>), completados respectivamente com a f(x) e os valores 3,46, que corresponde ao limite inferior de integração, e 6,59, que corresponde ao limite superior de integração, obteve-se assim o valor da medida da área da região sob a curva que é de 7,2.

No entanto, como é possível observar na Figura 8, existem duas regiões cujas áreas foram incluídas no cálculo, porém não fazem parte do lago. Logo, as áreas dessas regiões devem ser descontadas do valor da medida da área da região considerada. Assim, foram aplicados os mesmos procedimentos para calcular a medida das áreas das regiões que não pertencem ao lago e, em seguida, esses valores foram subtraídos do valor encontrado inicialmente. Esses procedimentos foram sintetizados na forma de imagem, representada na Figura 9.

Figura 9 – Área das laterais que não pertencem ao lago



Fonte: Google Maps[3], com adaptações

Observando a Figura 9, nota-se que as áreas das regiões que não pertencem ao lago são respectivamente 0,5 e 0,73. Então, a área do lago é determinada por A = 7,2-(0,5 + 0,73) = 5,97. Nesse procedimento fica claro o uso da matematização, etapa da modelação proposta por Biembengut e Hein (2007), por meio da formulação e da resolução do problema apresentado.

[3] Disponível em: google.com.br/maps/place/Parque+do+Goiabal/@-19.0074667,-49.4503427,17z/data=!3m1!4b1!4m5!3m4!1s0x94a2317ddf28b825:0x8ae758258c5ff6e2!8m2!3d-19.0074718!4d-49.448154.

Encontrada a medida da área do lago, o último passo é a interpretação da solução do modelo, parte essencial para a compreensão e finalização do processo a partir dos resultados alcançados. Nesse caso, é necessário fazer uma conversão e adequar os cálculos e os valores obtidos com a escala equivalente à medida real. Ao ser capturada via satélite, a imagem apresentava uma escala de medida 2 cm, que representava 50 m na realidade, porém com os ajustes feitos no GeoGebra a escala passou a representar duas unidades no *software* que expressa 50 m na realidade. Portanto, correspondendo a 25 m cada unidade na escala, a área real do lago passa a ser $H = A * (25)^2 = 3731{,}25\ m^2$. As mesmas etapas foram aplicadas em um segundo lago, também presente nas figuras, e a área resultante foi de 2.656,25 m^2.

Apesar da confiabilidade do cálculo procedido pelo GeoGebra e da resolução e segurança dos dados conseguidos pela imagem via satélite, as áreas encontradas são valores aproximados, podendo variar para mais ou para menos. Ao usar a ferramenta do ajuste de pontos para traçar a curva e obter a equação que representa algebricamente a função, pôde-se perceber que, quanto mais precisos e mais próximos os pontos, maior a aproximação final das medidas reais das áreas dos lagos. Esse processo possibilitou comparações no decorrer da realização das etapas e permitiu visualizar as estratégias adotadas pelo *software* no ajuste de imagem e, consequentemente, na lei de formação da função a partir da curva para o cálculo de áreas por imagem no GeoGebra.

Em suma, por meio do desenvolvimento dessa tarefa foi possível evidenciar no processo de modelação cada etapa proposta por Biembengut e Hein (2007): a interação, a matematização o modelo matemático.

Considerações finais

O Teorema Fundamental do Cálculo é assunto de destaque nas pesquisas em Educação Matemática, quando o foco é o Ensino Superior, e um dos conceitos mais difíceis de ser compreendido pelos estudantes. Pesquisas como a de Anacleto (2007) e Grande (2013) mostram que grande parte das dificuldades envolvidas na compreensão do TFC está ligada à maneira abstrata pela qual ele é apresentado obedecendo à seguinte ordem: enunciado do teorema – demonstração – aplicações, e o processo poderia ser realizado observando uma ordem inversa.

Nesse sentido, Bassanezi (2006) argumenta que o ensino da Matemática passa a ser mais interessante a partir do momento que se procura iniciar o processo de construção do conhecimento considerando-se uma motivação inicial (interna ou externa à própria

Matemática). Ele ainda enfatiza que um caminho para que o ensino desperte o interesse do estudante e parta de situações reais é a modelagem matemática.

Além disso, o estudo da história da Matemática é fundamental para o conhecimento da formação do desenvolvimento dos conteúdos matemáticos. No caso particular do Teorema Fundamental do Cálculo, foi possível perceber, tendo em vista discussões aqui apresentadas, que Newton e Leibniz somente conseguiram concluir e chegar a uma definição mais sofisticada por meio dos estudos feitos anteriormente por Barrow, Wallis, Fermat e vários outros que contribuíram para o avanço do Cálculo Diferencial e Integral. Partindo disso, o estudo e a análise da história propiciaram um novo olhar sobre o que é oferecido pelos livros modernos de Cálculo e, também, que muito do que aconteceu no processo histórico do desenvolvimento do teorema se assemelha ao que foi vivenciado no processo de modelagem descrito neste trabalho.

De posse das ideias defendidas por Bassanezi (2006) e Biembengut e Hein (2007), e com o objetivo de realizar um processo de modelação relacionado ao TFC, a pesquisa aqui descrita buscou apresentar o processo de modelagem que pode ser reproduzido em sala de aula ao se abordar o teorema em questão. Entre os principais resultados alcançados ao desenvolver este estudo foi possível perceber a motivação em aprofundar os estudos sobre TFC pela primeira autora do trabalho, que é aluna do curso de Licenciatura em Matemática e que tinha acabado de cursar a disciplina de Cálculo Diferencial e Integral I, como também, em cada passagem do desenvolvimento do estudo, pôde-se identificar e compreender cada uma das etapas da modelação descritas por Biembengut e Hein (2007).

Por fim, atendo-se aos limites da investigação descrita neste texto, foi constatado que a modelagem/modelação desperta o espírito investigativo, a curiosidade e a autonomia do estudante, uma vez que o estudo do conteúdo partiu de um problema real vivenciado pela primeira autora.

Referências

ANACLETO, G. M. C. **Uma investigação sobre a aprendizagem do Teorema Fundamental do Cálculo**. 2007. 136 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2007.

ÁVILA, G. Arquimedes, o rigor e método. **Matemática Universitária**, São Paulo, n. 4, p. 27-45, 1986.

ÁVILA, G. **Introdução à análise matemática**. São Paulo: Edgard Blüecher, 1999.

BASSANEZI, R. C. **Ensino-aprendizagem com modelagem matemática**: uma nova estratégia. São Paulo: Contexto, 2006.

BIEMBENGUT, M. S.; HEIN, N. **Modelagem matemática no ensino**. 4. ed. São Paulo: Contexto, 2007.

BOYER, C. B. **História da matemática**. Tradução Elza F. Gomides. São Paulo: Edgard Blücher, 1996.

D'AMBROSIO, U. **Educação matemática**: da teoria à prática. Campinas, SP: Papirus, 1996.

EDWARD JR, J. C. H. **The historical development of the calculus**. New York: Springer, 1979.

EVES, H. **Introdução à história da matemática**. Tradução Higyno H. Domingues. Campinas, SP: Editora da Unicamp, 2004.

FIORENTINI, D.; LORENZATO, S. **Investigação em educação matemática**: percursos teóricos e metodológicos. São Paulo: Autores Associados, 2006.

GRANDE, A. L. **Um estudo epistemológico do Teorema Fundamental do Cálculo voltado ao seu ensino**. 2013. 324 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2013.

LIMA, E. L. **Análise real**. 4. ed. Rio de Janeiro: Instituto de Matemática Pura e Aplicada (IMPA), 1999.

PATY, M. Pensamento racional e criação científica em Poincaré. **Scientiae Studia**, São Paulo, v. 8, n. 2, p. 177-193, 2010.

PIRES, R. F.; SILVA, B. A. Função: concepções daquele que ensina e daquele que aprende. **EM TEIA - Revista de Educação Matemática e Tecnológica**, Recife, v. 5, n. 3, p. 1-25, 2014.

POINCARÉ, H. **O valor da ciência**. Tradução Maria Helena Franco Martins. Rio de Janeiro: Contraponto, 1995.

RUDIO, F. V. **Introdução ao projeto de pesquisa**. Petrópolis, RJ: Vozes, 1986.

TATTO, F.; SCAPIN, I. J. Rejeição à matemática: causas e alternativas de intervenção. **Revista Matemática/URI**, Frederico Westphalen, v. 2, n. 2, p. 67-77, abr. 2004.