ISSN 2177-9309

Revista de Educação Matemática e Tecnológica Iberoamericana

Universidade Federal de Pernambuco

Pós-Graduação em Educação Matemática e Tecnológica EDUMATEC

Um olhar para a Conceitualização da Função Exponencial decorrente de uma Atividade de Modelagem Matemática

A look at Exponential Function Conceptualization Stemming from a Mathematical Modeling Activity

Kleber Luciano Niro
Mestre em Educação para a Ciência e a Matemática pela Universidade Estadual de Maringá
Universidade Estadual de Maringá – Paraná – Brasil
Kleber.niro@gmail.com

Lilian Akemi Kato
Doutora em Matemática Aplicada pela Universidade Estadual de Campinas
Universidade Estadual de Maringá – Paraná – Brasil
lilianakemikato@gmail.com

Resumo

Neste artigo apresentamos o desenvolvimento de uma situação problema, ocorrida durante um Curso de Extensão, produzido em uma universidade pública do Paraná, com alunos do primeiro ano do curso de Matemática, cujos dados nos subsidiaram a responder à questão: *Que proposições do Campo Conceitual das funções exponenciais são manifestadas por grupos de estudantes no desenvolvimento de uma atividade de Modelagem Matemática?* Para isso nos baseamos no trabalho de Sureda e Otero (2013), onde nos valemos de seus sistemas de representação para evidenciar os invariantes operatórios, mais especificamente as proposições, evocadas pelos grupos de estudantes nos *esquemas* desenvolvidos para solucionar a situação proposta. A análise dos resultados obtidos nas resoluções efetivadas pelos grupos nos permitiu, à luz da lente teórica, conjecturar que a realização da tarefa em grupo exigiu a negociação de esquemas manifestados pelos seus membros o que resultou na elaboração final de proposições que revelam sobre a conceitualização da função exponencial.

Palavras-Chave: Sistemas de representação. Teoria dos campos conceituais. Proposições. Grupos.

Abstract

In this article we present the development of a problem situation, which occurred during an Extension Course, produced at a public university in Paraná, with students from the first year of the Mathematics course, whose data helped us to answer the question: *What propositions from the Conceptual Field of exponential functions are manifested by groups of students in the development of a Mathematical Modeling activity?* For this, we based ourselves on the work of Sureda and Otero (2013), where we used their systems of representation to highlight the operative invariants, more specifically the propositions, evoked by groups of students in the schemes developed to solve the proposed situation. The analysis of the results obtained in the resolutions made by the groups allowed us, in the light of the theoretical lens, to conjecture that the accomplishment of the task in group required the negotiation of schemes manifested by its members, which resulted in the final elaboration of propositions that reveal about the conceptualization of exponential function.

Keywords: Representation Systems. Theory of Conceptual Fields. Propositions. Groups.

Introdução

Neste artigo pretendemos discorrer sobre uma atividade desenvolvida com 11 alunos de uma turma do 1º ano do curso de Matemática de uma universidade pública do Paraná, realizada no mês de novembro do ano de 2018 e que fez parte do Curso de Extensão *"Revisitando alguns conceitos do Cálculo por meio de Atividades de Modelagem Matemática"*, ministrado pelos autores, e que teve como objetivos revisar alguns conceitos do Cálculo Diferencial e Integral (CDI), como as funções modular, exponencial, quadrática e trigonométrica, e limites de função de uma variável real, por meio de atividades de Modelagem Matemática, oportunizando um cenário propício para a coleta de dados para nossa pesquisa.

Neste artigo descrevemos como se deu o desenvolvimento de uma situação problema envolvendo o conceito de função exponencial, bem como a análise dos dados e os resultados obtidos. A escolha desse conceito deu-se pela sua importância no curso de Matemática e, em geral, nos cursos de Ciências, por retratar fenômenos que ocorrem com frequência em eventos naturais, tais como decaimento radioativo, absorção de medicamentos, entre outros.

Para além disso, a preocupação com o ensino e a aprendizagem da função exponencial tem sido foco de outras pesquisas, desenvolvidas especialmente com alunos do Ensino Médio (COSTA, 2016; SILVA, 2016; HELENA, 2016; AZEVEDO JÚNIOR, 2017; SILVA, 2018), momento em que esse conceito é apresentado pela primeira vez ao estudante. No entanto, embora esse tema seja abordado nas disciplinas de CDI e Matemática no Ensino Superior, não encontramos, em nossa revisão da literatura, no banco de Teses e Dissertações da Capes, trabalhos dessa natureza nesse nível de ensino

Dos trabalhos analisados, Costa (2016), Silva (2016), Helena (2016), Azevedo Júnior (2017) e Silva (2018) apontam que, de maneira geral, a estratégia para os processos de ensino e de aprendizagem da função exponencial é o paradigma comumente utilizado nos livros didáticos e em sala de aula, ou seja, uma revisão do conceito de potenciação, a seguir, define-se uma expressão algébrica $a^x = b$, com $0 < a \neq 1$ e $b \in \mathbb{R}_+^*$, e, então, estudam-se os tipos de equações exponenciais. A partir disso, define-se o conceito de função exponencial, bem como seu domínio e contra-domínio, constrói-se seu gráfico e, a seguir, utilizando-se da definição de função inversa, constrói-se a função logarítmica.

Na utilização deste paradigma não percebemos conexões do conceito com problemas da realidade que, no nosso entendimento, poderiam trazer compreensões para o sujeito das aplicações de tal conceito em situações do dia a dia. Assim é relegado, ao conceito em questão, um papel de coadjuvante para a construção de outro conceito, no caso, o de função logarítmica. Essa relação exponenciais-logarítmo foi justificada no trabalho de Silva (2018), pois o autor considera que os aspectos culturais, históricos e sociais e o próprio desenvolvimento da Matemática trazem a necessidade de representar o expoente como logaritmo, ainda que considere que a escola deve priorizar o pensamento teórico dos estudantes. Já os trabalhos de Costa (2016) e Helena (2016) propõem como alternativa pedagógica para o ensino e a aprendizagem da função exponencial atividades de Modelagem Matemática.

Nesse sentido, encontramos respaldo nos trabalhos de Costa (2016), Helena (2016) e Gonçalves e Menegais (2016) que apontam benefícios que essa prática, a Modelagem Matemática, proporciona quando utilizada em sala de aula, tais como o aluno tornar-se responsável pela elaboração do seu conhecimento por meio do desenvolvimento da criatividade, intuição e raciocínio o que favorece também o estabelecimento de sentido para a matemática do dia a dia.

Para Bassanezi (2013), a Modelagem Matemática possui competências adequadas ao trabalharmos com situações-problema que envolvem a realidade dos alunos, aproveitando suas experiências extraclasse. Além disso, esse autor considera a Modelagem Matemática uma ferramenta científica apropriada para a construção de modelos que descrevem fenômenos naturais, mesmo que de forma aproximada, “nenhum modelo deve ser considerado definitivo, podendo sempre ser melhorado [...]” (2013, p. 31).

A formação de grupos para a resolução das atividades na Modelagem Matemática é uma de suas características primordiais. Dessa forma, os integrantes do grupo podem, juntos, discutir estratégias, elaborar conjecturas e traçar planos de desenvolvimento da situação problema. Assim, cada integrante pode utilizar *esquemas* próprios, que podem ou não servir para a resolução da atividade, ou seja, esses *esquemas* são discutidos com os demais integrantes do grupo, que também propõem seus próprios *esquemas* e, então, decidem conjuntamente qual servirá para elucidação da problemática proposta.

Como, em geral, ao final da atividade os grupos são convidados a escrever suas resoluções, conjecturamos que existe uma concordância na utilização de um dos *esquemas* propostos, e assim, a conduta individual é substituída pela conduta do grupo, ou seja, haverá uma negociação dos integrantes com o objetivo de resolver a situação problema.

Para fazermos a leitura dos dados obtidos nesta situação-problema, nos valemos da Teoria dos Campos Conceituais – TCC - de Gérard Vergnaud, que é uma "[...] teoria psicológica do conceito, ou melhor, da conceitualização do real, que permite situar e estudar as filiações e rupturas entre conhecimentos, do ponto de vista de seu conteúdo conceitual" (VERGNAUD, 1993, p. 1).

Vergnaud (2009) também afirma que o indivíduo se adapta às situações por meio de uma evolução da organização de sua atividade que "[...] inclui por um lado a conduta observável, mas também os processos de representação que não são observáveis [...]" (OTERO *et al.* 2014, p. 18, tradução nossa). O contato com várias situações é importante, pois o processo de conceitualização não se dá apenas em um problema, mas sim em diversas situações que o colocam em confronto com a realidade. Além disso, Otero *et al.* (2014) afirmam que a TCC habilita o estudo do desenvolvimento cognitivo nos adultos e o aprendizado de conceitos específicos de cada domínio do conhecimento.

Assim, entendemos que a TCC pôde nos fornecer elementos que identifiquem nos *esquemas*, desenvolvidos pelos grupos na resolução da situação-problema, os *invariantes operatórios* por eles utilizados, elemento teórico fundamental dessa teoria para podermos investigar o processo de conceitualização.

Para tanto, nos baseamos nos trabalhos de Sureda e Otero (2013) que se valem da TCC para analisar situações que envolvem o conceito de funções exponenciais e de Tatsch e Bisognin (2004), que utilizam a Modelagem Matemática como estratégia de ensino e aprendizagem, para a construção de uma situação-problema, de função exponencial, fazendo com que os participantes possam refletir criticamente e se situar em sua própria realidade.

Desta forma, neste artigo, nos propusemos responder à seguinte questão: *Que proposições do campo conceitual das funções exponenciais são manifestados por grupos de estudantes no desenvolvimento de uma atividade de Modelagem Matemática?*

A identificação de tais proposições pode indicar determinadas estratégias, tais como a preparação de novas situações-problemas e atividades extras que podem auxiliar os processos de ensino e aprendizagem do conceito de função exponencial. Para podermos dar prosseguimento em nossa discussão, apresentamos na próxima seção uma explanação sobre a Teoria dos Campos Conceituais.

A Teoria dos Campos Conceituais: um olhar para os invariantes operatórios da função exponencial

Na Teoria dos Campos Conceituais, proposta por Gérard Vergnaud, existem alguns elementos essenciais que permitem analisar a atividade de um sujeito em uma situação que são, segundo Vergnaud (2009), os gestos, as ações, a seleção de informações, os *invariantes operatórios*, as regras de ação e os mecanismos de controle. Situação que para Vergnaud (1999, p. 8 apud OTERO *et al.,* 2014, tradução nossa) "tem o caráter de tarefa e toda situação complexa pode ser analisada como uma combinação de tarefas, nas quais é importante conhecer sua natureza e seus obstáculos" e que pode se distinguir em dois tipos: aquelas em que o sujeito dispõe de competências necessárias ao tratamento imediato (*esquema* único); e aquelas em que o sujeito não dispõe de todas as competências necessárias, o que o obriga a um tempo de reflexão (vários *esquemas* que podem entrar em competição).

Por sua vez, um *esquema,* para Vergnaud (2009, p. 21):

i) é uma organização invariante da conduta para uma certa classe de situações;
ii) é composto necessariamente por quatro classes de componentes: uma meta ou várias, sub-metas e antecipações; regras de ação, de captação e controle de informação; *invariantes operatórios* e possíveis inferências.

Na Teoria dos Campos Conceituais, um conceito pode ser descrito por uma terna de conjuntos interdependentes, a saber; conjunto de situações que dão sentido ao conceito (S); conjunto de *invariantes operatórios* que estruturam as formas de organização da atividade (esquemas) (I) e o conjunto das representações linguísticas e simbólicas que dão sentido ao conceito (L): Conceito = def(S,I,L), (VERGNAUD, 2009).

Assim, ao apresentarmos uma situação, para um determinado conceito, é possível que possamos determinar *invariantes operatórios* em certos sistemas de representação. Para Magina *et al*. (2008 apud ZANELLA; BARROS, 2014, p. 18), "[...] o conjunto dos *invariantes* compreende os objetos, as propriedades e as relações que podem ser reconhecidas e usadas pelo sujeito para analisar e dominar as situações, e que expressam a compreensão do educando sobre o conceito [...]", podemos dizer que os *invariantes* (teoremas em ação e conceitos em ação) atribuem significado ao conceito e por isso fundamental em nosso estudo.

Para Vergnaud (1996), um campo conceitual é um conjunto de situações, cuja apropriação requer o domínio de vários conceitos de naturezas distintas, e para Zanella e Barros (2014, p. 25), "as situações (S) referem-se às atividades desenvolvidas pelos estudantes a partir do reconhecimento dos *invariantes operatórios* (I) que, por sua vez, são expressos por um conjunto de representações simbólicas (L)".

Encontramos o aporte necessário para respondermos nossa questão no trabalho desenvolvido por Sureda e Otero (2013), que se baseiam na Teoria dos Campos Conceituais para estudar o processo de conceitualização da função exponencial, em particular. Em seu estudo, as autoras consideram certos sistemas de representação, cuja concepção foi baseada na literatura, principalmente em Font (2001), para inferir teoremas em ação a partir dos *esquemas* desenvolvidos nas resoluções das situações por seus alunos.

Sureda e Otero (2013) descrevem cinco situações que envolvem o conceito de função exponencial, realizadas em uma escola secundária pública de gestão privada na Argentina, implementadas em dois cursos de quarto ano (alunos 15-16 anos), sendo um total 59 alunos. Também, por questões de ordem curricular, fez-se necessária a implementação em outras duas turmas do quinto ano com 56 alunos (16-17 anos).

As situações foram seccionadas em tarefas (recortes da situação), as quais puderam ser respondidas em determinados sistemas de representação, tomados a priori pelas pesquisadoras, que se encontram no Quadro 1.

Quadro 1 - Os cinco sistemas de representação [SR]

SR	Sigla	
NUMÉRICO	SRN	Tabelas e cálculos com números
ALGÉBRICO DE PRIMEIRA ORDEM	SRA1	Procedimentos algébricos onde os parâmetros estão dados (explícitos): $2 \cdot 5^x = 3$
ALGÉBRICO DE SEGUNDA ORDEM	SRA2:	Procedimentos algébricos onde os parâmetros não estão dados (implícitos): $a \cdot b^x = c$
ANALÍTICO-GRÁFICO	SRG	Gráficos nos eixos cartesianos
VERBAL ESCRITO	SRVE	Formas linguísticas escritas

Fonte: traduzido de Sureda e Otero (2013).

As implementações foram gravadas em áudio e os registros escritos pelos alunos (protocolos), um total de 885, foram recolhidos. A análise desses registros permitiram que as autoras as classificassem em níveis que formam parte do processo de conceitualização e cuja caracterização se construiu a partir da explicitação dos teoremas em ação evocados, pelos alunos, nos *esquemas* que realizaram em suas resoluções em cada sistema de representação, conforme o Quadro 2:

Quadro 2 - Classificação dos níveis

Nível	**Indicador**
Linear – L	Resposta linear em todos SR
Parcialmente não linear – PNL	Resposta não linear em pelo menos um SR
Não Linear – NL	Resposta não linear em todos os SR
Parcialmente exponencial – PE	Resposta exponencial em pelo menos um SR
Exponencial – E	Resposta exponencial em todos SR

Fonte: Sureda e Otero (2013, p. 34, tradução nossa).

As autoras destacam que os alunos estavam acostumados a trabalhar em grupo e, já desde o início do ano letivo, participavam de dinâmicas que priorizavam a construção do próprio conhecimento. Tais características vão ao encontro do que é proposto em atividades de Modelagem Matemática. O recolhimento dos protocolos foi indispensável para o estudo da conceitualização da função exponencial, já que "resulta imprescindível ter acesso às primeiras estratégias formuladas pelos alunos, pois estes normalmente apagam ou modificam as primeiras estratégias por outras mais pertinentes ou consensual com o grupo da classe" (SUREDA; OTERO, 2013, p. 94, tradução nossa).

É importante salientar que as situações propostas pelas autoras foram se tornando progressivamente mais complexas, tanto nos enunciados das situações quanto nos procedimentos que deveriam ser realizados pelos alunos para execução das tarefas, indo ao encontro do que propõe a Teoria de Vergnaud para o processo de conceitualização, ou seja, para que ocorra a conceitualização de determinado conceito de forma eficiente é necessária uma gama de exercícios que, gradativamente, tornam-se mais complexos, tanto em seus enunciados quanto em suas resoluções.

Pautamos-nos no trabalho de Sureda e Otero (2013) por compreendermos que os sistemas de representação de que se valeram as autoras, e nos quais puderam inferir os invariantes operatórios, podem ser utilizados por nós em uma situação problema desenvolvida por meio da Modelagem Matemática. Diferimos, portanto, na maneira como foi aplicada a situação problema, isto é, enquanto em sua pesquisa os alunos desenvolveram resoluções de várias situações e em vários momentos, nós nos restringimos a uma única situação problema envolvendo o conceito apresentado. É importante salientar também a proximidade do nível escolar dos participantes de ambas as pesquisas, muito embora estejam em diferentes níveis de ensino. Enquanto os participantes de nossa pesquisa são integrantes do Ensino Superior, os participantes do trabalho de Sureda e Otero (2013) estão no último ano do Ensino Médio.

Nesse artigo, pretendemos descrever como inferimos determinadas proposições nos *esquemas* evocados pelos grupos, nas estratégias de resolução da atividade proposta, como um processo de negociação e aceite de seus participantes. Assim, a partir desse momento, tratamos da formulação de hipóteses, sistematização dos dados e construção do protocolo de respostas construídas em grupo para nos referirmos às proposições que eventualmente possam surgir.

Aqui, vale ressaltar que essas proposições diferem-se dos teoremas em ação inferidos no trabalho de Sureda e Otero (2013), pois estes, apesar de terem sido discutidos em grupo, foram protocolizados de maneira individual, ou seja, o sujeito valeu-se de suas convicções na situação problema, utilizando para isso seus próprios *esquemas*, que podem ter sido alterados ou não durante a resolução em grupo.

Na próxima seção, tratamos de descrever as estratégias e os *esquemas* utilizados pelos grupos para desenvolvimento e resolução da situação-problema, destacando os sistemas de representação de que se valem e os respectivos teoremas em ação por eles evocados.

Percurso metodológico da pesquisa e descrição da atividade

Caracterizamos essa pesquisa como qualitativa, pois foi conduzida em um ambiente natural (sala de aula), dentro do contexto, focada nas perspectivas dos participantes e por possuir um caráter interpretativo, do pesquisador, sobre os registros produzidos, visando buscar proposições que indicam o processo de conceitualização da função exponencial, em uma atividade que fosse do conhecimento do sujeito. Assim, esse trabalho é

> [...] uma atividade situada que localiza o observador no mundo. A pesquisa qualitativa consiste em um conjunto de práticas materiais interpretativas que tornam o mundo visível. Essas práticas transformam o mundo. Elas transformam o mundo em uma série de representações, incluindo notas de campo, entrevistas, conversas, fotografias, registros e lembretes para a pessoa. Nesse nível, a pesquisa qualitativa envolve uma abordagem interpretativa e naturalística do mundo. Isso significa que os pesquisadores qualitativos estudam coisas dentro dos seus contextos naturais, tentando entender, ou interpretar, os fenômenos em termos dos significados que as pessoas lhes atribuem. (DENZIN; LINCOLN, 2011, p. 3 apud CRESWELL, 2014, p. 49).

Para a análise da situação problema proposta neste trabalho, nos valemos da Teoria dos Campos Conceituais, proposta por Vergnaud, e, por pretendermos que os sujeitos participantes façam aproximações da realidade e elaborações representativas de um dado sistema, adotamos a concepção de Modelagem Matemática dada por Bassanezi (2013, p. 25), pois "este método pode ser aplicado em várias situações de ensino-aprendizagem, com a intenção de estimular alunos e professores de matemática a desenvolverem suas próprias habilidades como modeladores".

Para tanto, o desenvolvimento da atividade de Modelagem Matemática, segundo Bassanezi (2013), deve seguir uma sequência de etapas, a saber: experimentação, na qual ocorrem a obtenção e o processamento de dados; abstração, procedimento que deve conduzir ao Modelo Matemático em que se estabelece a seleção de variáveis; problematização, formulação de hipóteses e simplificação; resolução que é a tradução da linguagem natural para uma linguagem matemática coerente; validação, aqui se confronta o modelo encontrado com os dados empíricos, podendo assim ser aceito ou não; modificação, caso o modelo obtido não satisfaça as condições iniciais propostas pela situação.

Participaram dessa atividade 7 alunos do primeiro ano do curso de Matemática de uma universidade pública do Paraná. Esses participantes se dividiram em dois grupos; um com quatro participantes que denominaremos de grupo 1 e o outro com 3 participantes que denominaremos grupo 2.

O convite para a atividade intitulada "*Produção de alimentos e o crescimento da população mundial*" foi feito mediante a apresentação de fotos com imagens de desperdício de alimentos, bem como fotos de alguns banners que se localizam no Restaurante Universitário da Universidade, frequentado por nossos alunos, que relatam informações que dizem respeito ao tema. Ainda no decorrer da apresentação, foi-lhes apresentado um vídeo de pequena duração apontando o aumento da população, o descarte inadequado de alimentos e a potencial degradação das terras cultiváveis de nosso planeta.

Também foram discutidas algumas ações para a redução do desperdício de alimentos e o aumento das regiões que produzem alimentos, tais como: hortas comunitárias, prédios com telhados verdes, hortas urbanas e o controle de natalidade.

Na sequência, com o intuito de estimular a discussão, apresentamos dois links, o primeiro, das Nações Unidas, contendo algumas informações e apontamentos do crescimento populacional, e o segundo, apresentando alguns gráficos, infográficos e um contador que mostra a quantidade de nascimentos e falecimentos em tempo real, também uma breve discussão do modelo malthusiano de crescimento populacional.

Ao final da apresentação, foi feita aos alunos/participantes, reunidos em grupos, a seguinte pergunta:

Se a população continuar a crescer nessa proporção, quando a Terra atingirá o limite de pessoas que poderão alimentar-se bem?

Para dar-lhes suporte à continuação do desenvolvimento da atividade, foi oferecida uma folha contendo dados demográficos do IBGE com informações sobre a quantidade de terra arável e a quantidade de pessoas "limite" que nosso planeta pode suportar. Também havia informações do Fundo de População das Nações Unidas (FNUAP) do número de pessoas no planeta Terra nos anos de 1990, 2000, 2010 e em 2017. Para que pudessem responder a situação proposta, ao final da atividade, cada grupo recebeu folhas em branco e um gravador para registro do áudio produzido por seus integrantes.

Assim, pudemos obter os protocolos escritos e as gravações em áudio que produziram os dados necessários para o desenvolvimento desta pesquisa. Os registros, observados nos protocolos, forneceram os *esquemas* de que se utilizaram os grupos, que puderam ser categorizados segundo os sistemas de representação de Sureda e Otero (2013). A análise das transcrições dos áudios possibilitou uma melhor compreensão de como esses *esquemas* evocados pelos grupos se manifestaram durante o desenvolvimento da atividade de Modelagem Matemática. Posteriormente esse material foi devidamente arquivado para análises futuras.

A seguir, apresentamos as descrições das estratégias de resolução da situação-problema, efetuadas pelos grupos, identificando-os de acordo com os mesmos sistemas de representação dados por Sureda e Otero (2013), a fim de obter as proposições que foram manifestadas em cada etapa da atividade de Modelagem Matemática.

Os sujeitos participantes formaram dois grupos para a resolução dessa atividade, o Grupo 1 com quatro componentes e o Grupo 2 com três componentes. É importante salientar que todo o desenvolvimento da situação proposta, tais como levantamento de hipóteses, identificação e análise dos dados, inferências, contas e gráficos, foi feito em grupo, bem como a confecção do protocolo final.

Como o Grupo 1 e o Grupo 2 uniram-se para resolver a situação proposta, evidenciamos, na sequência, os *esquemas* utilizados em suas resoluções, comuns aos dois grupos, nas etapas propostas por Bassanezi (2013).

Em um primeiro momento, esses grupos organizaram os dados fornecidos, que extraíram do enunciado da situação problema, organizando-os de acordo com suas compreensões do problema segundo um sistema de representação verbal escrito (SRVE), conforme a Figura 1:

Figura 1 - Resolução do Grupo 1

5,2 bilhões de pessoas em 1990
6,05 bilhões de pessoas em 2000
6,908 bilhões de pessoas em 2010
7,6 bilhões de pessoas em 2017

Fonte: acervo dos autores, 2019.

Na continuação, começaram a fazer conjecturas e a formular hipóteses que “dirigem a investigação e são comumente formulações gerais que permitem ao pesquisador deduzir manifestações empíricas específicas” (BASSANEZI, 2013, p. 28). A partir dos dados organizados na etapa anterior e, assumindo que o modelo do crescimento populacional é uma PG, com o auxílio de uma calculadora, concluíram que: *“E segundo esse dado, conseguimos achar uma razão* $q = 1{,}15$ *aproximadamente, em um período de 10 anos”*.

Nesse esquema, uma forma de linguagem escrita, observamos um SRVE, e a suposição de que, para os grupos, vale a proposição: **se multiplicarmos uma quantidade por 1,15 obteremos a população da próxima década**. Isso nos mostrou que os participantes estavam utilizando-se da hipótese de que o crescimento se dá de forma exponencial, pois, escrevem: “*Dessa forma, pensamos em PG*” que caracteriza um SRVE, em que inferimos a proposição: **a população atual se calcula multiplicando a população anterior por uma constante.**

A Figura 2 apresenta uma expressão algébrica que o grupo utilizou para representar a situação que é dada pela proposição: **A expressão algébrica é** $\mathbf{a_n = a_0 \cdot q^n}$**.**

Figura 2 - Resolução Grupo 1

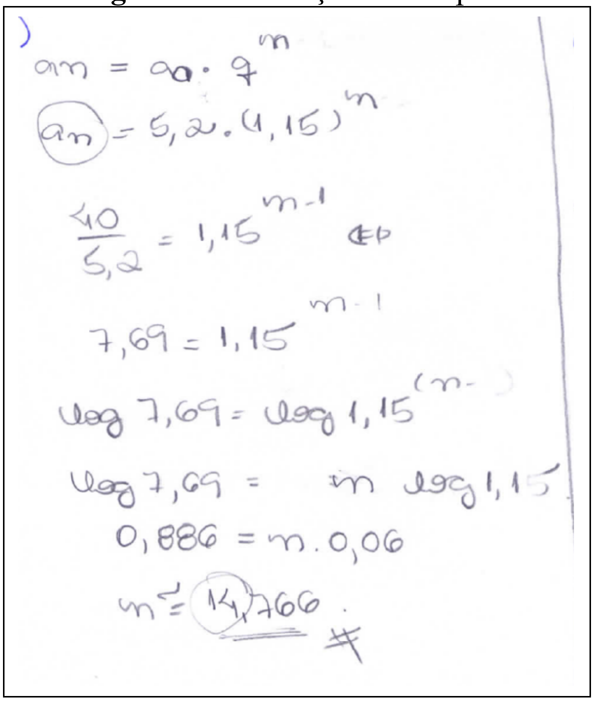
Dessa forma, pensamos em P.G, que segundo a fórmula $a_n = a_0 \cdot q^n$, conseguimos achar o valor de n. Veja em (x). As variáveis são:
a_n = População limite suportada pela terra.
a_0 = População inicial (segundo dados da atividade)
q = razão de crescimento (na progressão geométrica)

Fonte: acervo dos autores, 2019.

Nessa expressão apresentada na Figura 2, os parâmetros aparecem de forma implícita, o que nos permite afirmar a utilização de um sistema de representação algébrico de segunda ordem. Nota-se que o grupo também fez uma seleção de variáveis, "distinguindo as variáveis que descrevem a evolução do sistema e as variáveis de controle do sistema" (BASSANEZI, 2013, p. 27 e 28).

De posse dessa expressão algébrica, com o intuito de encontrar a solução, apresentaram os seguintes cálculos:

Figura 3 - Resolução do Grupo 1



Fonte: acervo dos autores, 2019.

Na resolução apresentada na Figura 3, vimos que o grupo apresentou uma expressão algébrica explicitando os seus parâmetros, o que segundo Sureda e Otero (2013), caracteriza um sistema de representação algébrico de primeira ordem. Tal expressão foi obtida substituindo-se na expressão algébrica da Figura 2 os dados obtidos na situação problema, conforme a Figura 1. Assim, inferimos que o grupo se valeu da seguinte proposição: **a expressão algébrica é** $\mathbf{a_n = 5,2 \cdot (1,15)^n}$.

De posse desta resolução, o grupo afirmou que: "*Achamos* $n = 14{,}766$*, e preferimos aproximar para 14, a fim de não exceder a população limite*", o que indica a adoção de uma simplificação, isto é, "os fenômenos que se apresentam para o estudo matemático são, em geral, excessivamente complexos se os considerarmos em todos os seus detalhes" (BASSANEZI, 2013, p. 29).

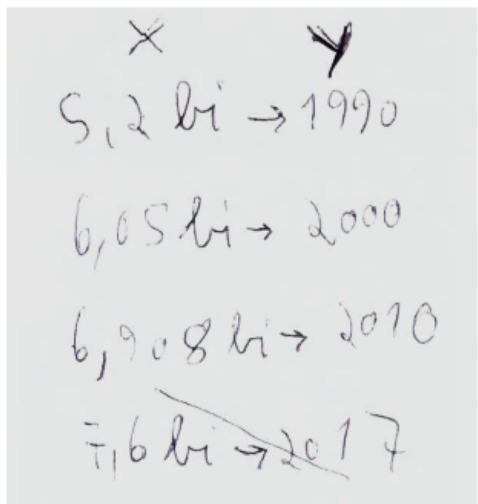
Para concluir o raciocínio, destacou: *"Sabendo disso,* $14 \cdot 10 = 140$ *anos, a partir de 1990, que o mundo atingirá a população de 37 bilhões aproximadamente. Bem perto do desejado.* $1990 + 140 = 2130$. *Ou seja, só no ano de 2130 que a Terra terá quase 40 bilhões de habitantes".*

É possível que o grupo não se sentiu satisfeito com a resposta apresentada, pois, escreveu: *"Curiosidade:* $a_n = a_0 \cdot q^n$ *com* $n = 14{,}6$ *temos* $a_n \cong 40$ *bilhões de pessoas. Ou seja, no ano 2136".* Para Bassanezi (2013, p. 30), "alguns fatores ligados ao problema original podem provocar a rejeição ou aceitação dos modelos".

O Grupo 2, mesmo participando ativamente das discussões com o outro grupo, manteve-se em separado; assim, passamos a descrever os *esquemas* na resolução que os mesmos desenvolveram, segundo as etapas de Basssanezi (2013).

Começaram organizando os dados em uma forma aproximada de tabela:

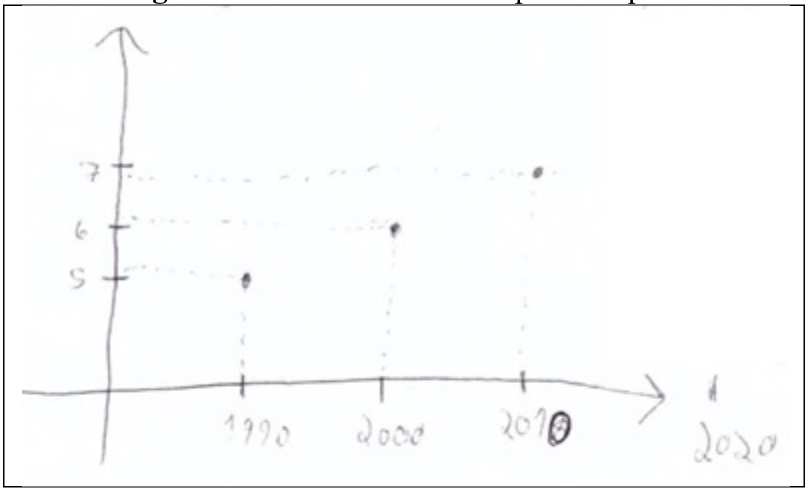
Figura 4 - Resolução do Grupo 2



Fonte: acervo dos autores, 2019.

O registro da Figura 4 mostra que esse grupo utilizou um SRN, atribuindo para os valores (antecipação) a ordem de variável independente e variável dependente. Em seguida, passou para o SRG ao apresentar um gráfico, onde é possível visualizar que, para o grupo, vale a proposição: **a representação gráfica do aumento populacional é uma curva crescente**.

Figura 5 - Gráfico construído pelo Grupo 2



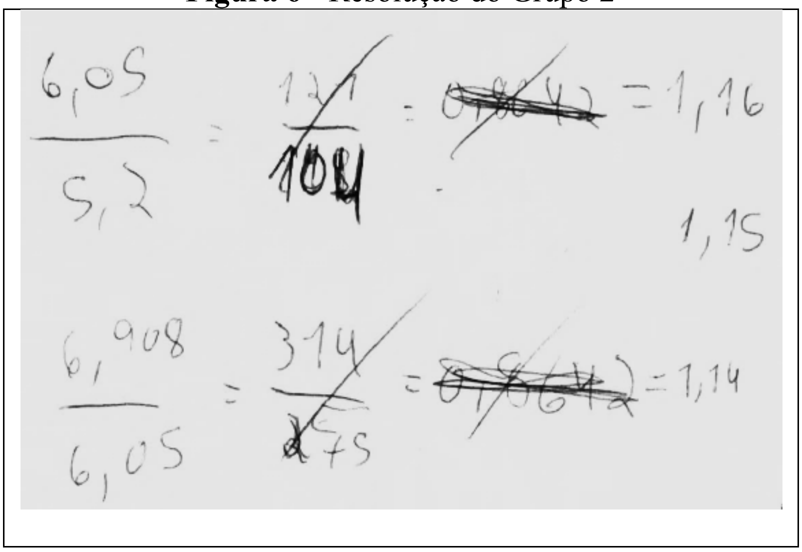
Fonte: acervo dos autores, 2019.

Para esse grupo, após a organização dos dados em uma tabela, se fez necessária a verificação de como ocorre a relação entre essas variáveis em um sistema de eixos coordenados. De acordo com Bassanezi (2013, p. 43),

> [...] é natural aparecer uma tabela de dados e isto pode ser o começo da modelagem. A disposição dos dados em um sistema cartesiano e um bom ajuste de seus valores, facilitará a visualização do fenômeno em estudo, propiciando tentativas de propostas de problemas, conjecturas ou leis de formação.

Nessa etapa os participantes realizaram cálculos, utilizando do SRN que julgaram ser relevantes:

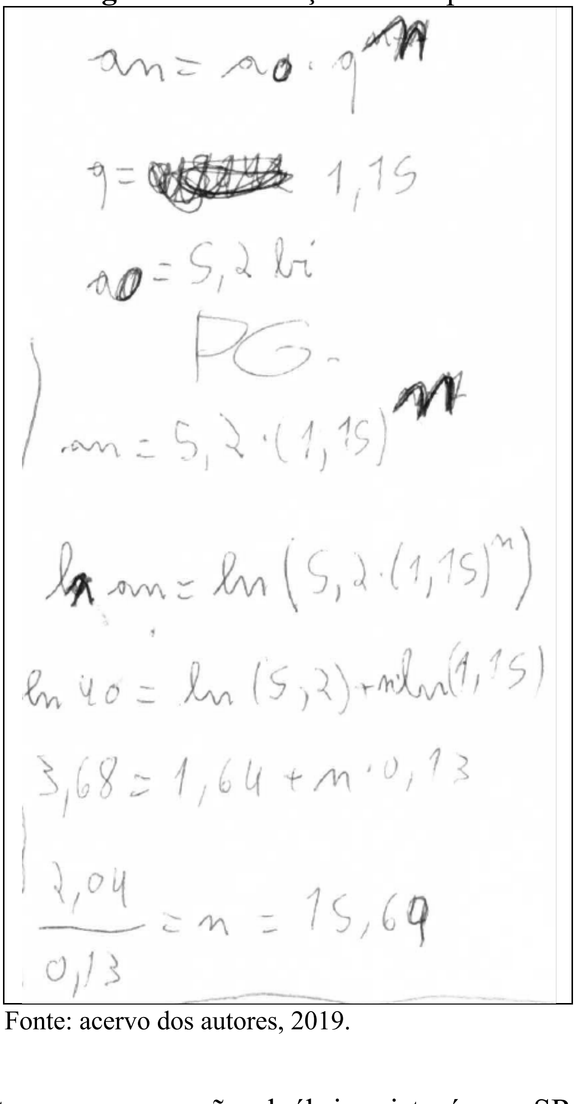
Figura 6 - Resolução do Grupo 2



Fonte: acervo dos autores, 2019.

Considerando os cálculos, realizados pelos estudantes e apresentados na Figura 6, identificamos que a razão de crescimento, no período considerado, foi estabelecida dividindo-se uma quantidade populacional pela anterior. Isso nos permitiu inferir que, nessa tarefa, o grupo valeu-se da proposição: **se dividirmos duas quantidades sucessivas, então obtemos uma razão**. Também efetuou uma simplificação, visto que tomou a média aritmética dos valores encontrados. Aqui notou-se que na formulação de hipótese já considerou uma progressão geométrica, conforme Figura 7.

Figura 7 - Resolução do Grupo 2

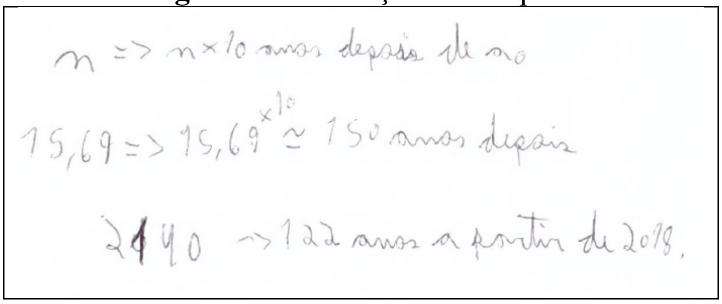


Fonte: acervo dos autores, 2019.

O grupo apresentou uma expressão algébrica, isto é, um SRA2, bem como escreveu "*PG*" um SRVE, onde observamos as seguintes proposições, respectivamente: **a expressão algébrica é $\mathbf{a_n = a_0 \cdot q^n}$** e **a população atual se calcula multiplicando a população anterior por uma constante**. Na sequência, desenvolveu cálculos para obtenção da solução da situação proposta e, ao substituir os valores anotados, conforme a Figura 4, se vale de um SRA1 e, associado a esse sistema de representação, inferimos a proposição: **a expressão algébrica é:** $\mathbf{a_n = 5{,}2 \cdot (1{,}15)^n}$**.**

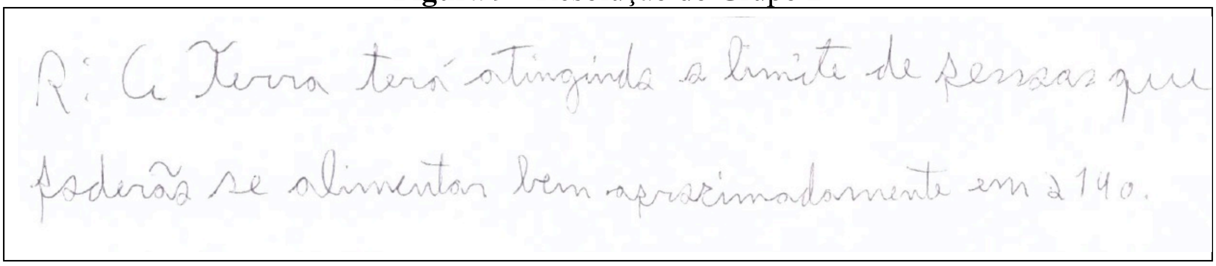
Em seguida, os participantes deste grupo concluíram a resolução da problemática posta na atividade de Modelagem Matemática, para justificar o modelo obtido, conforme as Figuras 8 e 9.

Figura 8 - Resolução do Grupo 2



Fonte: acervo dos autores, 2019.

Figura 9 - Resolução do Grupo 2



Fonte: acervo dos autores, 2019.

Pudemos averiguar que as estratégias dos grupos para a resolução da situação proposta foram parecidas, com a diferença de que o Grupo 2 plotou um gráfico de forma aproximada, isto é, apenas anotou alguns pontos no sistema de eixos coordenados sem, no entanto, desenhar a curva correspondente, e também não realizou a validação de seu modelo. A proximidade e as discussões iniciais podem ter contribuído para que os grupos se valessem de tal comportamento, visto que as discussões entre o pesquisador e os grupos se deram durante todo o desenvolvimento da atividade em questão. Observou-se que, mesmo que não tenham utilizado explicitamente o conceito de função exponencial, a interpretação e a resposta para o problema foram satisfatórias, pois resolveram a situação valendo-se de progressões geométricas, neste caso uma PG com primeiro termo positivo e razão maior que um.

Por meio da análise dos registros desenvolvidos pelos grupos, durante a situação problema, verificamos que ambos se enquadram no nível: Exponencial, segundo Sureda e Otero (2013), pois em todas as resoluções os sujeitos perpassam pelos diferentes sistemas de representação sem eventuais conflitos nos *esquemas* utilizados, o que pode indicar um possível domínio do conhecimento desse campo conceitual. Vale observar que os grupos estudados por Sureda e Otero (2013) e os participantes de nossa pesquisa se encontram no mesmo quadro cognitivo, possuem praticamente a mesma idade.

Durante as análises das descrições das estratégias de resolução, efetuadas pelos grupos, inferimos algumas possíveis ações em situação, que, embora possam não ser exatamente o que pretendiam assinalar os participantes, nos pareceu descrever, em parte, o *esquema* utilizado em relação aos sistemas de representação apresentados, tais ações evocaram certas proposições.

Nos Quadros 3 e 4, fizemos um resumo dessas proposições, considerando-se que foram identificados nos *esquemas* observados nas resoluções dos grupos em determinados sistemas de representação e em determinada etapa da Modelagem Matemática, segundo Bassanezi (2013).

Quadro 3 - Proposições inferidas nas resoluções do Grupo 1

Etapas de MM	Sistemas de Representação	Proposição	Esquema
Abstração	SRVE	Se multiplicarmos uma quantidade por 1,15 obteremos a população da próxima década.	EXPONENCIAL
	SRVE	A população atual se calcula multiplicando a população anterior por uma constante	EXPONENCIAL
Resolução	SRA1	A expressão algébrica é $\mathrm{a_n} = 5{,}2 \cdot (1{,}15)^{\mathrm{n}}$.	EXPONENCIAL
	SRA2	A expressão algébrica é $\mathrm{a_n} = a_0 \cdot \mathrm{q}^{\mathrm{n}}$	EXPONENCIAL

Fonte: os autores, 2019.

Quadro 4 - Proposições inferidas na resolução do Grupo 2

Etapas de MM	Sistemas de Representação	Proposição	Esquemas
Abstração	SRG	A representação gráfica do aumento populacional é crescente.	EXPONENCIAL
	SRN	Se dividirmos duas quantidades sucessivas, então obtemos uma razão.	EXPONENCIAL
	SRVE	A população atual se calcula multiplicando a	EXPONENCIAL

		população anterior por uma constante.	
Resolução	SRA1	A expressão algébrica é $a_n = 5{,}2 \cdot (1{,}15)^n$	EXPONENCIAL
	SRA2	A expressão algébrica é $a_n = a_0 \cdot q^n$	EXPONENCIAL

Fonte: os autores, 2019.

Considerações finais

Esse artigo teve como propósito a apresentação de uma situação problema sobre o conceito de função exponencial, que fez parte de um Curso de Extensão realizado em uma turma de primeiro ano do Curso de Matemática. A importância na Matemática e nos Cursos de Ciências em geral, bem como a carência de estudos sobre tal conceito, no âmbito do Ensino Superior, foram os motivadores para a realização desse trabalho.

A formação de grupos para a resolução da situação problema, uma das características fundamentais da Modelagem Matemática, permitiu-nos conjecturar, por meio dos diálogos estabelecidos entre os integrantes dos grupos, sobre a existência de proposições implícitas que direcionavam as ações, isto é, ao elaborarem estratégias para a resolução, os participantes, de um dado grupo valeram-se de determinados *esquemas* que podem ou não ser aceitos pelo grupo por meio de uma negociação e, em caso afirmativo, eram utilizados para encontrar o modelo desejado.

Na Teoria dos Campos Conceituais o conceito é uma terna interdependente: situação, invariantes e representação (S,I,L). Nesse sentido, temos que, apresentada uma situação problema de um determinado conceito em um sistema de representação apropriado, é possível que possamos identificar um invariante operatório, neste caso do tipo proposicional.

Essas proposições, identificadas nesse trabalho, diferem dos de Sureda e Otero (2013), em que o aluno para valer-se de um determinado *esquema* e registrá-lo em seu protocolo utilizou uma conduta própria, sem a necessidade de negociá-la para resolver as situações que as pesquisadoras propuseram, mesmo tendo discutido anteriormente em grupo o que pode ou não ter alterado sensivelmente esse *esquema*.

Dessa maneira, levando-se em conta o que foi observado, nossa análise dos resultados obtidos com referência à questão: *Que proposições do Campo conceitual das funções exponenciais são manifestadas por grupos de estudantes no desenvolvimento de uma atividade de Modelagem Matemática?,* indicou que os registros apresentados pelos participantes apontaram as proposições (invariantes operatórios), de que se valeram os grupos para solucionar a problemática proposta.

Tais proposições, evocadas pelos grupos em suas resoluções, evidenciaram indícios de que os mesmos possuem domínio do conceito de funções exponenciais, pois utilizam-se de *esquemas* não conflitantes em diferentes sistemas de representação, enquadrando-se no Nível Exponencial, de acordo com a categoria proposta por Sureda e Otero (2013).

Nessa pesquisa, o desenvolvimento da atividade de Modelagem Matemática mostrou-se uma alternativa coerente com os processos de ensino e de aprendizagem de conceitos matemáticos, como, no caso, o da função exponencial, pelas manifestações de interesse e de participação dos estudantes na construção de modelos pertinentes ao fenômeno, estabelecendo relações entre a Matemática e situações do cotidiano.

Dessa forma, com base nas discussões provocadas neste artigo, entendemos que o estabelecimento de situações problemas, com referência na realidade, para o confrontamento dos alunos com conceitos matemáticos pertinentes à situação, promove o processo de conceitualização, aqui entendida à luz da Teoria dos Campos Conceituais, como a pedra angular do desenvolvimento cognitivo de um sujeito.

Referências

AZEVEDO JÚNIOR, W. **Funções Exponenciais e Logarítmicas**: Ensinando Logaritmos através de suas tábuas. 2017. 148 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) – Departamento de Matemática, Pontifícia Universidade Católica, Rio de Janeiro, 2017.

BASSANEZI, R. C. **Ensino-aprendizagem com modelagem matemática**: uma nova estratégia. 3. ed. São Paulo: Contexto, 2013.

COSTA, M. M. **O ensino de funções exponenciais**: uma proposta alternativa por meio de contextualização, modelagem matemática e recursos tecnológicos. 2016. 113 f. Dissertação (Mestrado) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", Rio Claro, 2016.

CRESWELL, J. W. **Investigação qualitativa e projeto de pesquisa**: escolhendo entre cinco abordagens. Tradução: Sandra Mallmann da Rosa. 3. ed. Porto Alegre: Penso, 2014.

GONÇALVES, D. B.; MENEGAIS, D. A. F. N. Modelagem Matemática no estudo de Funções Exponenciais. **Revista de Educação, Ciências e Matemática**. Rio de Janeiro, v. 6, n. 2, p. 71-81, maio/ago, 2016.

HELENA, A. F. F. **Modelagem Matemática no ensino médio**: Uma abordagem para o ensino de funções exponenciais e logarítmicas. 2016. 72 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Rio Claro, 2016.

OTERO, M. R. et al. **La teoria de los campos conceptuales y la conceptualización em el aula de matemática y física**. Ciudad Autônoma de Buenos Aires: Dunken, 2014.

SILVA, A. L. **O ensino de Função Exponencial para além das aparências**. 2018. 158 f. Dissertação (Mestrado em Educação em Ciências e em Matemática) – Setor de Ciências Exatas, Universidade Federal do Paraná, 2018.

SILVA, R. F. **Função exponencial e logarítmica**. 2016. 118 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) – Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, São José do Rio Preto, 2016.

SUREDA, P.; OTERO, M. R. Estudio sobre el proceso de conceptualización de función exponencial. **Educación Matemática**. Santillana, México, v. 25, n. 2, p. 89-118, agosto de 2013.

TATSCH, K. J. S.; BISOGNIN, V. Modelagem Matemática no Ensino Médio: Alimentação, Obesidade e Desnutrição. **Vidya**. Santa Maria, v. 24, n. 42, p. 163-180, jul/dez., 2004.

VERGNAUD, G. Teoria dos Campos conceituais. In: 1º Seminário Internacional de Educação Matemática do Rio de Janeiro, 1993, Rio de Janeiro. **Anais...**. Rio de Janeiro: Projeto Fundão – Instituto de Matemática – UFRJ, 1993, p. 1- 26.

VERGNAUD, G. A Teoria dos Campos conceituais. In: BRUN, J. **Didáctica das Matemáticas**. Tradução: Maria José Figueiredo. Lisboa: Instituto Piaget – Horizontes Pedagógicos, 1996, p. 155-191.

VERGNAUD, G. O que é aprender? In: BITTAR, M.; MUNIZ, C. A. (Orgs.). **A aprendizagem matemática na perspectiva da teoria dos campos conceituais**. Curitiba: CRV, 2009.

ZANELLA, M. S.; BARROS, R. M. O. **Teoria dos Campos Conceituais**: situações problema da estrutura aditiva e multiplicativa de Naturais. Curitiba: CRV, 2014.

Restaurante Universitário UEM: Disponível na Internet: http://www.ru.uem.br/: acessado em 15/08/2019: Data de acesso: 03 set. 2018.

Vídeo sobre a população mundial: Disponível na Internet: https://www.youtube.com/watch?v=MS4X7isw4rU: Data de acesso: 03 set. 2018.

Nações Unidas: Disponível na Internet: https://nacoesunidas.org/acao/populacao-mundial/: Data de acesso: 05 set. 2018.

População mundial: Disponível na Internet: http://www.astronoo.com/pt/artigos/populacao-mundial.html: Data de acesso: 05 set. 2018.