

XVI CIAEM



Conferencia Interamericana de Educación Matemática
Conferência Interamericana de Educação Matemática
Inter-American Conference of Mathematics Education



Lima - Perú
30 julio - 4 agosto 2023



xvi.ciaem-iacme.org

Tareas para el desarrollo de los pensamientos aleatorio y variacional a través del ajedrez

Rubiela Sánchez Penagos

Departamento de Matemáticas, Universidad Pedagógica Nacional
Colombia

rsanchezp@upn.edu.co

Cesar Guillermo Rendón Mayorga

Departamento de Matemáticas, Universidad Pedagógica Nacional
Colombia

cgrendonm@upn.edu.co

Resumen

Se presenta una secuencia de tareas para promover la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas escolares utilizando el ajedrez en el aula. A partir de una indagación de referentes teóricos y antecedentes que emplean el ajedrez en la educación matemática escolar, se crearon cuatro tareas para contribuir al desarrollo los pensamientos aleatorio y variacional abordando conceptos específicos como patrones, plano cartesiano, probabilidad, diagramas de árbol entre otros, según lo dispuesto en los documentos curriculares de matemáticas escolares de Colombia. Se llevó a cabo una implementación inicial de las tareas con un grupo de estudiantes de grado séptimo de la educación básica secundaria colombiana. Al respecto, se relacionan avances de los estudiantes en la determinación de secuencias, el hallazgo de espacios muestrales, en el manejo del plano cartesiano, en el cálculo de probabilidades simples, entre otros.

Palabras clave: Ajedrez; Pensamiento aleatorio; Pensamiento variacional; Pensamiento algebraico; Probabilidad; Tareas de enseñanza; Educación secundaria.

Introducción

Se presenta un conjunto de cuatro tareas dirigidas a la enseñanza de las matemáticas escolares y que involucran el juego del ajedrez en el aula. Estas tareas se elaboraron específicamente para desarrollarse en grado séptimo de la educación básica secundaria del

sistema educativo escolar colombiano, con el objetivo de llevar una experiencia de enseñanza al aula que fuera distinta de lo convencional, integrando el ajedrez como medio de aprendizaje para potenciar el desarrollo de los pensamientos variacional y aleatorio.

Para la realización de esta secuencia de tareas, previamente se hizo una indagación de documentos relacionados con el uso de los juegos en la enseñanza y aprendizaje, así como de la enseñanza de las matemáticas por medio de juegos, y el ajedrez como herramienta en el aula de matemáticas, los cuales sirvieron para fundamentar e inspirar la realización de este trabajo. También, fueron de gran importancia los documentos curriculares que plantea el Ministerio de Educación Nacional de Colombia [MEN] (MEN, 1998; MEN, 2016), los cuales orientan aspectos generales de la organización curricular de las matemáticas escolares a nivel nacional.

El ajedrez y los procesos de enseñanza y aprendizaje en matemáticas

Previo a comentar concretamente el caso de las relaciones entre el ajedrez y las matemáticas, se considera relevante señalar algunos aspectos más generales de la relación que hay entre la acción de jugar y la de aprender (en particular aprender matemáticas). La idea de integrar el juego y las matemáticas permite crear un ambiente idóneo para el aprendizaje, siempre y cuando se tenga un objetivo claro de conceptos matemáticos y procesos que se quieren desarrollar antes de implementar el juego, como lo señala Bishop (1998) quien alude a Huizinga (1949), esta interacción entre juego y matemáticas proporciona un contexto emocional y afectivo en el que considera a los juegos, y al juego en la educación matemática, como una acción que, por ejemplo, no responde a las características de un deber, sino que resulta voluntario y libre; tiene orden y reglas; se puede relacionar con el ingenio y creatividad de los jugadores; entre otros elementos que se pueden advertir como tierra fértil para desarrollar procesos de enseñanza de las matemáticas a través de un contexto que resulta de interés natural para los niños y jóvenes.

Además, en la clasificación de Bishop (1998) de las seis actividades matemáticas importantes, está jugar y se señala además que los juegos han sido fuente de las principales actividades matemáticas que actualmente se aceptan como una parte central de las matemáticas, por ejemplo, en Probabilidad o Teoría de Números.

Por otra parte, la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas por medio del ajedrez es una actividad que se viene desarrollando en el aula con más frecuencia en los últimos años, se sabe que el ajedrez brinda muchos beneficios en la educación de los niños y niñas, y algunos autores como Gairín y Fernández (2010) destacan la influencia del ajedrez tanto a nivel cognitivo (atención, memoria, concentración, percepción, razonamiento lógico, orientación espacial, creatividad, imaginación) como a nivel personal (responsabilidad, control tenacidad, análisis, planificación, autonomía, discusión, control, tenacidad) y expresan su importancia en los sistemas educativos de muchos países. Otros autores como Maz-Machado y Jiménez-Fanjul (2012) indican que algunos de los componentes de la práctica del ajedrez son la concentración y el desarrollo de estrategias para la resolución de problemas y del pensamiento lógico, todos ellos necesarios para las matemáticas. Por su parte, Guik (2012) indica que el tablero de ajedrez, las piezas y el propio juego se utilizan frecuentemente para ilustrar conceptos, ideas y problemas matemáticos.

A continuación, se relacionan algunos de los documentos encontrados que abordan la relación entre ajedrez y enseñanza de las matemáticas, y que contribuyeron al diseño de las tareas propuestas:

Tabla 1

Documentos e investigaciones de ajedrez y enseñanza de las matemáticas basado en Fernández (2008)

Año	País	Autor	Tema de Investigación
2001	(Barcelona) España	Ferran García Garrido	Educando desde el ajedrez
2008	(Barcelona) España	Joaquín Fernández Amigo	Tesis Doctoral Utilización de material didáctico con recursos de ajedrez para la enseñanza de las matemáticas. Estudio sobre sus efectos sobre una muestra de alumnos de 2º de primaria.
2010	(Barcelona) España	Joaquín Gairín Sallán y Joaquín Fernández Amigo	Enseñar matemáticas con recursos de ajedrez
2013	(Avilés) España	Daniel Sánchez Repullo	Posibilidades didácticas en matemáticas del ajedrez – TG Análisis de las posibilidades del ajedrez como recurso didáctico en la enseñanza de las matemáticas: Estudio de caso en 4º curso de Educación Secundaria Obligatoria del Colegio San Fernando de Avilés
2014	(Murcia) España	Rosa Nortes Martínez- Artero y Andrés Nortes Checa	El ajedrez como recurso didáctico en la enseñanza-aprendizaje de las Matemáticas
2020	España	Noelia López Sáez	Ajedrez y Matemáticas para socializar dentro y fuera del aula, en primer ciclo de ESO
2020	Cuba	Roelvis Sosa Benítez, Julia Fiol Machin Yarileidys y Leyva Frómata	Tareas docentes integradoras en la asignatura Ajedrez Básico
2021	Cuba	Joaquín Fernández Amigo	Material didáctico para la enseñanza de las matemáticas utilizando recursos de Ajedrez

Elementos curriculares

En 1998 el MEN propone el documento denominado “Lineamientos Curriculares de Matemáticas” derroteros para el desarrollo de la educación matemática en el país para el contexto escolar. En tal documento se describen, entre otros, asuntos relacionados con la epistemología del saber matemático y se trazan sendas líneas para el trabajo de las matemáticas en la escuela, concretamente se propone un sistema de cinco "componentes", a saber: variacional, numérico, geométrico (métrico), aleatorio, espacial. Además, se propone un sistema de competencias las cuales son: formulación y resolución de problemas, modelación, comunicación, ejercitación de procedimientos e interpretación. Finalmente, se establece también un sistema de contextos para la resolución de problemas: matemáticos, de otras ciencias y cotidianos.

Adicionalmente, en el 2006 el MEN publica los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas, los cuales tienen como función orientar la organización curricular matemática de las instituciones escolares a través del establecimiento de estándares mínimos que debe garantizar el sistema educativo escolar del país a sus estudiantes. Además, organiza por ciclos el sistema escolar (los ciclos en la educación colombiana son: primer ciclo: grados primero, segundo y tercero de primaria; segundo ciclo: cuarto y quinto de primaria; tercer ciclo: sexto y séptimo de básica secundaria; cuarto ciclo: octavo y noveno de básica secundaria y el último ciclo: décimo y undécimo de educación media) y por pensamientos (pensamiento variacional, geométrico, aleatorio, numérico y espacial).

Para la elaboración de este trabajo se focalizaron los esfuerzos en el desarrollo de tareas que, a través del ajedrez, permitan desarrollar los pensamientos aleatorio y variacional en el tercer ciclo escolar. La selección de estos pensamientos no fue aleatoria. Por una parte, el grupo de estudiantes que se tenía disponible para realizar este trabajo se proyectaba para iniciar su tránsito por el álgebra escolar, por lo cual se consideró oportuno atender aspectos del pensamiento variacional como el hallazgo de patrones, la representación de secuencias, el uso de lenguaje algebraico sencillo, entre otros que les sirvieran cuando tuvieran que enfrentarse al estudio del álgebra. Por otra parte, el pensamiento aleatorio se seleccionó debido a que, al menos en la institución educativa en la que se desarrollaría el trabajo, los asuntos correspondientes a estadística y probabilidad eran dejados de lados en el currículo para ser abordados solo hasta el final del año escolar y muchas veces de manera apresurada, con lo cual se deseó aportar a que los estudiantes tuvieran un acercamiento temprano a conceptos como evento probabilístico, espacio muestral y a procesos como calcular probabilidades simples o determinar los elementos de un espacio muestral.

Aspectos metodológicos

Como se ha esbozado previamente, un primer asunto metodológico por atender para la elaboración de las tareas fue una revisión documental que permitiera, en primer lugar, identificar si se habían diseñado tareas que tuvieran el mismo propósito que las proyectadas; y en segundo lugar, que los documentos que fueran encontrados, sirvieran como marcos de referencia para la elaboración de las tareas propias.

A continuación, se debió pensar en el pilotaje de las tareas. El grupo de estudiantes con el que se realizó la primera implementación de las tareas pertenece a una institución pública del municipio de Zipaquirá (Colombia), el grupo consta de 37 estudiantes de grado séptimo que estaban entre los 11 y los 13 años. Algunos de ellos ya tenían nociones sobre cómo jugar ajedrez, aunque no todos. Al respecto, previo a la implementación de las tareas, se les realizaron algunas tutorías para que aprendieran los movimientos básicos de las piezas del juego, la terminología y el uso del lenguaje simbólico que usa el ajedrez (dado que todas las filas están numeradas del 1 al 8, las columnas están etiquetadas con las letras de la A a la H y, por tanto, para hacer, por ejemplo, mención de una casilla se habla de “b5”, “c7”, etc. Asimismo, las piezas del juego se escriben con la inicial de su nombre, es decir: T: torre; R: rey, etc.). Además, en todo caso, los estudiantes no habían tenido acercamientos ni con el hallazgo de secuencias y patrones, ni uso del plano cartesiano, ni tampoco conceptos asociados a la probabilidad.


Los resultados de la primera versión implementada en el aula de clase se sistematizaron y analizaron a partir de viñetas, Camargo (2021) caracteriza una viñeta como una narración en la cual los investigadores exhiben explícitamente los hallazgos, usándolos como hilo conductor, reviviendo el escenario, pero sin ser una descripción de este sino enfocando la atención en lo significativo, en el fenómeno producto del análisis.

Tareas diseñadas

A continuación, se muestran cada una de las tareas diseñadas:

Tarea 1																																					
<table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="text-align: center; width: 20%;"></td> <td style="text-align: center; width: 40%;">IEM Liceo Integrado de Zapiquira</td> <td style="width: 20%; text-align: center;">Fecha: _____</td> <td style="text-align: center; width: 20%;"></td> </tr> <tr> <td></td> <td></td> <td style="text-align: center;">Grado: _____</td> <td></td> </tr> <tr> <td colspan="4" style="text-align: center;">ACTIVIDAD 1</td> </tr> <tr> <td colspan="4" style="text-align: center;">Nombre: _____</td> </tr> <tr> <td colspan="4" style="text-align: center;">Docente: Rubelá Sánchez Penagos</td> </tr> <tr> <td colspan="4">1. En cada una de las siguientes posiciones encuentra el jaque mate y escriba la solución en sistema algebraico.</td> </tr> <tr> <td style="text-align: center; padding: 5px;"> a) Juegan las blancas y dan mate en 1 1. _____# </td> <td style="text-align: center; padding: 5px;"> b) Juegan las blancas y dan mate en 1 1. _____# </td> <td colspan="2"></td> </tr> <tr> <td style="text-align: center; padding: 5px;"> c) Juegan las blancas y dan mate en 1 1. _____# </td> <td style="text-align: center; padding: 5px;"> d) Juegan las blancas y dan mate en 1 1. _____# </td> <td colspan="2"></td> </tr> <tr> <td style="text-align: center; padding: 5px;"> e) Juegan las negras y dan mate en 1 1. _____# </td> <td style="text-align: center; padding: 5px;"> f) Juegan las negras y dan mate en 1 1. _____# </td> <td colspan="2"></td> </tr> </table>		IEM Liceo Integrado de Zapiquira	Fecha: _____				Grado: _____		ACTIVIDAD 1				Nombre: _____				Docente: Rubelá Sánchez Penagos				1. En cada una de las siguientes posiciones encuentra el jaque mate y escriba la solución en sistema algebraico.				 a) Juegan las blancas y dan mate en 1 1. _____#	 b) Juegan las blancas y dan mate en 1 1. _____#			 c) Juegan las blancas y dan mate en 1 1. _____#	 d) Juegan las blancas y dan mate en 1 1. _____#			 e) Juegan las negras y dan mate en 1 1. _____#	 f) Juegan las negras y dan mate en 1 1. _____#			<p>2. Para los seis diagramas anteriores:</p> <ol style="list-style-type: none"> Indiquen las piezas que intervienen en el mate. _____ ¿Qué condiciones debe tener la posición de las piezas identificadas en la anterior pregunta? _____ ¿Qué tienen en común las posiciones del rey? _____ ¿Qué tienen en común las piezas que intervienen en el mate? _____ <p>3. Con base en lo que encontraron en las preguntas anteriores, ¿hay algún otro elemento (pieza o posición) que sea relevante para poder obtener el mate? Justifiquen su respuesta. _____</p> <p>4. En el siguiente tablero de 3x3, y utilizando lo que encontraron en las preguntas 2 y 3, recreen una posición de un mate similar a los del primer diagrama y describan con detalle la función de cada pieza en la situación planteada.</p> <div style="display: flex; align-items: center;"> <div style="border-bottom: 1px solid black; width: 100%; height: 15px; margin-bottom: 5px;"></div> <div style="border-bottom: 1px solid black; width: 100%; height: 15px; margin-bottom: 5px;"></div> <div style="border-bottom: 1px solid black; width: 100%; height: 15px; margin-bottom: 5px;"></div> <div style="border-bottom: 1px solid black; width: 100%; height: 15px; margin-bottom: 5px;"></div> </div>
	IEM Liceo Integrado de Zapiquira	Fecha: _____																																			
		Grado: _____																																			
ACTIVIDAD 1																																					
Nombre: _____																																					
Docente: Rubelá Sánchez Penagos																																					
1. En cada una de las siguientes posiciones encuentra el jaque mate y escriba la solución en sistema algebraico.																																					
 a) Juegan las blancas y dan mate en 1 1. _____#	 b) Juegan las blancas y dan mate en 1 1. _____#																																				
 c) Juegan las blancas y dan mate en 1 1. _____#	 d) Juegan las blancas y dan mate en 1 1. _____#																																				
 e) Juegan las negras y dan mate en 1 1. _____#	 f) Juegan las negras y dan mate en 1 1. _____#																																				

Tarea 2




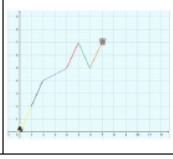
IEM Liceo Integrado de Zipaquira

Fecha: _____
Grado: _____


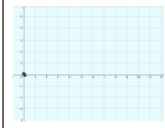
ACTIVIDAD 2


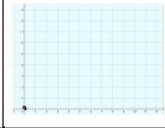
Nombre: _____
Docente: Rubiela Sánchez Peñasco

1. Observa la siguiente posición y el plano cartesiano. En el plano se grafica el recorrido que hace el caballo al ir capturando los peones. ¿Que cantidad o magnitud se representa en los ejes del plano?





2. Con base en el ejemplo anterior, traza en los siguientes planos cartesianos de la columna derecha el recorrido del caballo respectivo.

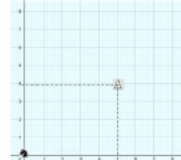



3. Observa que cada casilla del tablero se puede hacer corresponder con las coordenadas de un punto del plano cartesiano de la siguiente manera:



El peón está en la casilla (e4)

Columna	Fila
e	4



El peón está en el punto (5,4)

Eje x	Eje y
5	4

Con base en el anterior ejemplo y con ayuda del tablero de ajedrez completan las siguientes tablas.

a)

Columna	Fila
e	4
b	6
f	5
d	6
b	7
a	5

Eje x	Eje y


b)

Columna	Fila

Eje x	Eje y
3	8
2	4
5	1
7	3
4	6
3	7

c) ¿Cuál pieza se movió según lo observado en la tabla del literal a)? ¿Cuál pieza se movió en la tabla del literal b)? Justifiquen sus respuestas.

Tarea 3



IEM Liceo Integrado de Zipaquira

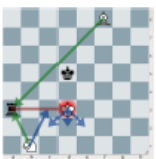
Fecha: _____
Grado: _____

ACTIVIDAD 3

Nombre: _____
Docente: Rubiela Sánchez Peñasco

En la posición del tablero se puede observar al rey blanco amenazado por la torre. Ante el jaque se pueden realizar las siguientes acciones:

- Capturar la pieza que está haciendo el jaque: Axa3 o Cxa3.
- Cubrir al rey del ataque con una pieza: Cc3.
- Mover al rey a una casilla que no esté atacada: Rc2, Rd2 o Re2.



Siendo 6 las posibilidades de defenderse del jaque, a saber:

Cxa3, Cc3, Axa3, Rc2, Rd2, Re2.

Y 15 todos los movimientos del blanco en esta posición, sin importar si el rey sigue en jaque o no:

Cxa3, Cc3, Cd2, Rc3, Re2, Rd2, Re2, Re3, Ag7, Ah6, Ah7, Ad6, Ac5, Ab4, Axa3.

Ante el jaque del ejemplo, ¿cuál es la probabilidad de defender al rey del jaque?

El evento será:

$J = \text{Defender al rey del jaque}$

Y la probabilidad de J será:

$$P(J) = \frac{\text{Movimientos en defensa del rey}}{\text{Movimientos posibles del blanco}} = \frac{6}{15} = 0.4$$

Solución: La probabilidad de que el blanco se defienda del jaque es de 0.4.

- Calculan la probabilidad de capturar la pieza que está haciendo el jaque

- Calculan la probabilidad de mover al rey ante el jaque

- Calculan la probabilidad de cubrir al rey del jaque.


4. Según los resultados de los cálculos anteriores:

- ¿Qué es más probable que suceda? ¿Por qué?

- Entre mover el rey y cubrirse del jaque, ¿Qué es lo más probable según los cálculos hechos?

- Entre las tres opciones de acción ante un jaque (capturar la pieza, mover al rey o cubrir al rey), ¿cuál será la mejor y por qué? ¿Por qué lo más probable no resulta ser lo más adecuado dentro del juego?

5. Observa la siguiente posición:



Se puede ver a simple vista que el rey negro ubicado en la casilla e6, está demasiado expuesto a cualquier ataque del blanco, tanto que se encuentra en jaque pues el alfil situado en g2 lo está amenazando.

Escriben (utilizando el sistema algebraico) todas las posibilidades que tiene el jugador de las piezas negras para defenderse del jaque.

Capturar a la pieza atacante	Interponer una pieza (cubrir)	Mover al rey a una casilla segura
-	- Dd5	-
-	- Td4	-
-	- Ce4	-
-	- Ce3	-
-	- Ad5	-
-	- E3	-


A continuación, algunos ejemplos de probabilidades calculadas utilizando la anterior tabla:

- Probabilidad de que el jugador de las piezas negras capture la pieza atacante.


$$P(\text{capturar pieza atacante}) = \frac{2}{13} = 0.15$$

Solución: La probabilidad de capturar la pieza atacante es de 0.15

Tarea 4

	IEM Liceo Integrado de Zapaquirá	Fecha: _____
		Grado: _____
ACTIVIDAD 4		
Nombres: _____		
Docente: Rubén Stacher Pizarro		


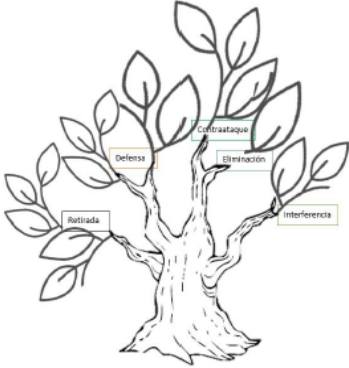
1. En la siguiente posición las blancas acaban de jugar Td6. Las negras no tienen muchas opciones para defender la dama, pues todos los movimientos de la dama negra hacen que el blanco la capture. Si, por supuesto, captura la torre. Dnde sigue A3+ y luego de que el rey se ampare la dama está perdida.



Completa el siguiente diagrama de árbol con los movimientos de la dama negra, seguido de la respuesta del blanco para capturar la dama. No tengas en cuenta las casillas de la octava fila porque en cualquiera de esas casillas la dama será capturada por la torre.

1. Td6	1. ... Dxa6	2. A3+
	1. ...	2. _____
	1. ...	2. _____
	1. ...	2. _____
	1. ...	2. _____
	1. ...	2. _____
	1. ...	2. _____
	1. ... Dd7	2. _____

2. Analiza la siguiente posición y encuentra las distintas formas de atacar sobre la situación Td5. A continuación, escríbelas usando el sistema algebraico en el árbol de variantes según corresponda en cada rama (Retirada, Defensa, Interferencia, Eliminación, Contraataque).

Análisis de los resultados

El diseño de Tareas aquí planteadas tuvo fundamento principalmente en cumplir con unos objetivos de correlación entre los conceptos, procesos y componentes matemáticos, por esto fue indispensable asignar para cada tarea uno o varios estándares de las competencias básicas de aprendizaje de las matemáticas, específicamente para el ciclo de sexto y séptimo, enfocadas en el pensamiento aleatorio y variacional, en el cual se pudiera evidenciar un aprendizaje significativo por medio del ajedrez.

Durante la revisión de las respuestas dadas por los estudiantes en sus guías de trabajo, se pudo evidenciar: en la Tarea 1, que los estudiantes hallaron regularidades a partir de la comparación y solución de los ejercicios de mate en una jugada propuestos en la guía de trabajo que permitieron con ayuda de las preguntas llegar al patrón. Con esta Tarea se quería desarrollar el razonamiento algebraico, siendo este como indica Godino y Font (2000, p.8) el que implica representar, generalizar y formalizar patrones y regularidades en cualquier aspecto de las matemáticas. A medida que se desarrolla este razonamiento, se va progresando en el uso del lenguaje y el simbolismo necesario para apoyar y comunicar. Así mismo, en la Tarea 2 se evidencia como los estudiantes lograron graficar en el plano cartesiano una situación dentro de un contexto propuesto, en este caso el ajedrez, representando el recorrido de un caballo sobre el tablero.

Las tareas 3 y 4 como se dijo anteriormente fueron enfocadas a desarrollar el concepto matemático de probabilidad utilizando diferentes representaciones, como tablas y diagramas de árbol que permitieron a los estudiantes en esta primera intervención calcular probabilidades simples, comparar y analizar lo más o menos probable, además organizaron y clasificaron

información, y comunicaron con términos matemáticos de forma verbal y escrita sus ideas y comprensión del tema.

Conclusiones

El ajedrez y las matemáticas permiten llevar al aula de clase dinámicas diferentes con el objetivo de desarrollar en los estudiantes su pensamiento lógico matemático, estas tareas solo son una puerta abierta a la construcción de muchas más, se ha pensado, por ejemplo, en crear secuencias de tareas de los otros tres pensamientos contemplados por el Ministerio de Educación Nacional (MEN, 1998) y complementar este trabajo. Asimismo, se reconoce como otra posibilidad de proyección el poder implementar las tareas de una forma más sistemática, es decir, atendiendo a una metodología de investigación propiamente dicha, con el fin de evaluar la eficacia de las tareas con un nivel de rigurosidad investigativa mucho más profundo que el realizado en este trabajo, por supuesto ese trabajo requerirá que cada una de estas tareas parte de un trabajo nuevo que vaya enfocado a un solo concepto a desarrollar durante una unidad de un curso determinado.

Referencias y bibliografía

- Bishop, A. (1998). *El papel de los juegos en educación matemática*. Uno. Revista de Didáctica de las Matemáticas, 18, 9-19.
- Camargo, L. (2021). *Estrategias cualitativas de investigación en educación matemática. Recursos para la captura de información y el análisis*. Medellín – Bogotá D.C.: Universidad de Antioquia – Universidad Pedagógica Nacional.
- Fernández, J. (2008). *Utilización de material didáctico con recursos de ajedrez para la enseñanza de las matemáticas. Estudio de sus efectos sobre una muestra de alumnos de 2° de primaria*. Barcelona. Universidad Autónoma de Barcelona. (Tesis Doctoral).
- Gairín, J., y Fernández, J. (2010). Enseñar Matemáticas con recursos de Ajedrez. *Tendencias pedagógicas*, Vol. 1(N° 15), 58–90.
- Huizinga, J. (1949). *Homo Ludens*. Londres. Routledge and Kegan Paul.
- Klein, M. (1929). *La personificación en el juego de los niños*. Buenos Aires: Hormé S.A.
- Maz-Machado, A., Jiménez-Fanjul, N., Gutiérrez-Arenas, P., Adrián, C., Vallejo, M., y Adamuz-Povedano, N. (2012). Estudio bibliométrico de la investigación educativa en las universidades de Andalucía en el SSCI (2002-2010). *Revista Iberoamericana de Psicología y Salud*, 3(2), 125-136.
- Ministerio de Educación Nacional. (1998). *Lineamientos Curriculares de Matemáticas*. Bogotá D.C.: Cooperativa Editorial Magisterio.
- Ministerio de Educación Nacional. (2006). *Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas*. Bogotá D.C.: Cooperativa Editorial Magisterio.