



# Actividades de aprendizaje para el desarrollo de competencias y construcción de saberes matemáticos

Jordi Deulofeu Piquet

Universidad Autónoma de Barcelona (España)

Foro EMAD

28 de octubre de 2023

# Un reto actual de la Educación Matemática

Uno de los objetivos principales y actuales de la Educación matemática es el desarrollo de competencias específicas como Resolver problemas, Modelizar, Razonar y Comunicar matemáticamente, y al mismo tiempo la construcción de saberes sin los cuales no es posible adquirir la competencia matemática.

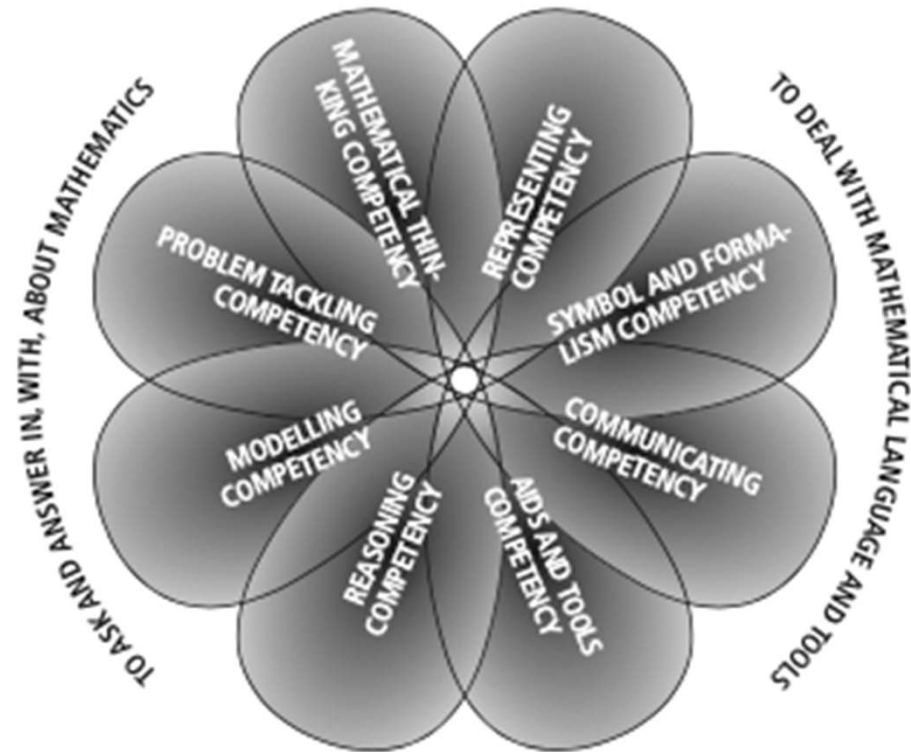
Para lograr este objetivo, un elemento clave son las actividades de aprendizaje para el aula de matemáticas, así como su gestión.

Mostraremos y ejemplificaremos las características que a nuestro entender deberían cumplir las actividades de aprendizaje potencialmente ricas para llevar a una clase de matemáticas, donde el ambiente de resolución de problemas sea el centro de la actividad.

# ¿Qué entendemos competencias matemáticas?

Las competencias son **procesos matemáticos** que organizan el currículo, tales como: resolver problemas, modelizar, razonar o representar.

Se desarrollan a través de situaciones de aprendizaje que implican el uso de contenidos matemáticos y se alcanzan a largo plazo.



(Niss & Højgaard, 2011 )

# Plantear y resolver problemas, ¿para qué?

- Ayudar a los alumnos a progresar en su autonomía a través de problemas que les lleven a tomar decisiones, a comprender las informaciones que reciben, a ser creativos y críticos con aquello que se les presenta y con aquello que hacen.
- Desarrollar múltiples competencias (pensar, razonar, modelizar, utilizar técnicas, comunicar, argumentar, ...) y contribuir a la construcción del conocimiento matemático propio.
- Mostrar lo que son las matemáticas y crear interés por ellas, como parte importante del conocimiento generado por la humanidad, relevante tanto por él mismo como por sus aplicaciones.
- Dar sentido al hecho de plantearse problemas y al reto que supone tratar de resolverlos.

# La enseñanza de la resolución de problemas

## - La resolución de problemas como contenido:

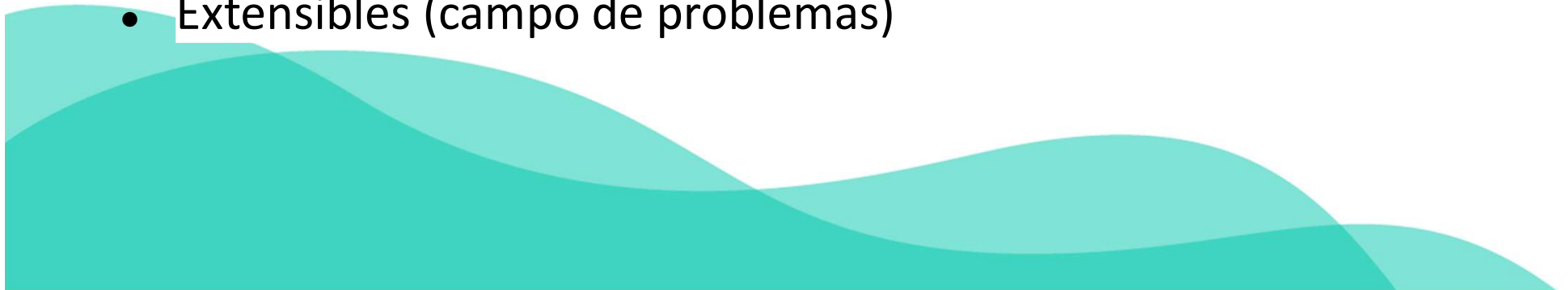
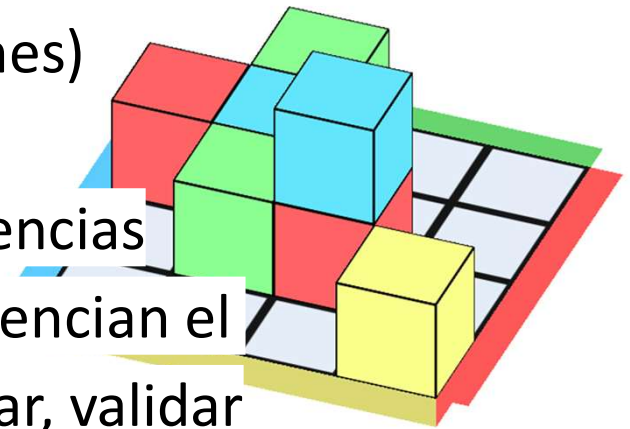
- Comprender y representar el problema
- Diseñar planes de resolución (conocer / aplicar heurísticas)
- Aplicar un plan (variedad de métodos de resolución)
- Visión retrospectiva (hacia atrás y hacia adelante)

## - La resolución de problemas como metodología para enseñar / aprender matemáticas:

- Crear ambientes de resolución de problemas (interrogación)
- Mostrar la necesidad de introducir nuevos conceptos / procedimientos y proporcionar contextos para construirlos
- Tener en cuenta las creencias de los alumnos sobre los problemas / los métodos / las soluciones / las matemáticas

## Los problemas como actividades matemáticas competencialmente ricas.

- Accesibles (suelo bajo – techo alto – paredes anchas)
- Significativas (para los alumnos y las matemáticas)
- Variedad de enfoques (camino y soluciones)
- Matemáticamente relevantes: posibilitan construir conceptos y desarrollar competencias
- Activan el pensamiento matemático y potencian el ciclo: experimentar, conjeturar, argumentar, validar
- Fomentan la colaboración, la reflexión y la discusión (en general los distintos tipos de interacción)
- Extensibles (campo de problemas)



# Ejemplos de relación entre actividades, desarrollo de competencias y construcción del conocimiento matemático

- **Ejemplo 1:** De un problema estándar a una situación de modelización
- **Ejemplo 2:** Quien es el intruso. Hallar criterios matemáticos para discriminar y discutir en el aula alrededor de una situación geométrica
- **Ejemplo 3:** Conjeturar, experimentar y validar en una situación de probabilidad
- **Ejemplo 4:** De un ejercicio a un problema a través de la gestión.

# 1. De un problema estándar a uno de modelación

ENUNCIADO 1: El corazón de una persona late, por término medio, 70 veces por minuto. Si esta persona vive 80 años, ¿cuántas veces habrá latido su corazón?

ENUNCIADO 2: ¿Cuántas veces latirá mi corazón durante toda mi vida?

- Pensar semejanzas y diferencias entre los dos enunciados y su gestión en el aula



## 2. ¿Quién es el intruso?

Pensar el mayor número de criterios posibles para determinar cual de las 4 figuras es la “intrusa”. Hallar por lo menos un criterio para “eliminar” cada una de las 4 figuras.



Tener más de 4 lados

(elimina la 1)

Tener 2 o más pares de lados paralelos

(elimina la 1)

Tener un área superior a  $8 u^2$

(elimina la 1)



Tener un número par de lados

(elimina la 2)

Contiene figuras sólo de dos colores

(elimina la 2)

Tener al menos un eje de simetría

(elimina la 2)



Tener el mismo perímetro –  $9u$ -

(elimina la 3)

Tener algún ángulo agudo

(elimina la 3)

No tener todos los ángulos iguales

(elimina la 3)



Ser un polígono convexo

(elimina la 4)

Tener ángulos superiores a  $180^\circ$

(elimina la 4)

No tener tres o más lados paralelos

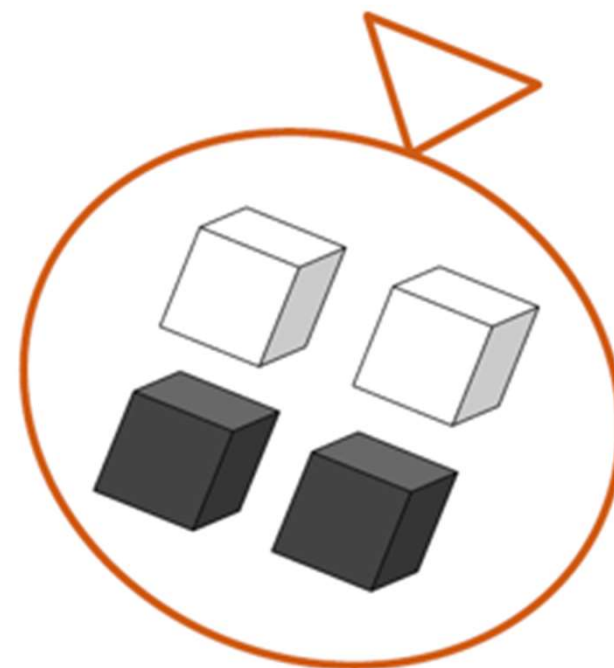
(elimina la 4)



## Ejemplo 3. Conjetura, experimentación y validación

En una bolsa ponemos dos pares de cubos de colores diferentes.  
Si extraemos dos cubos de la bolsa,  
¿qué es más probable?

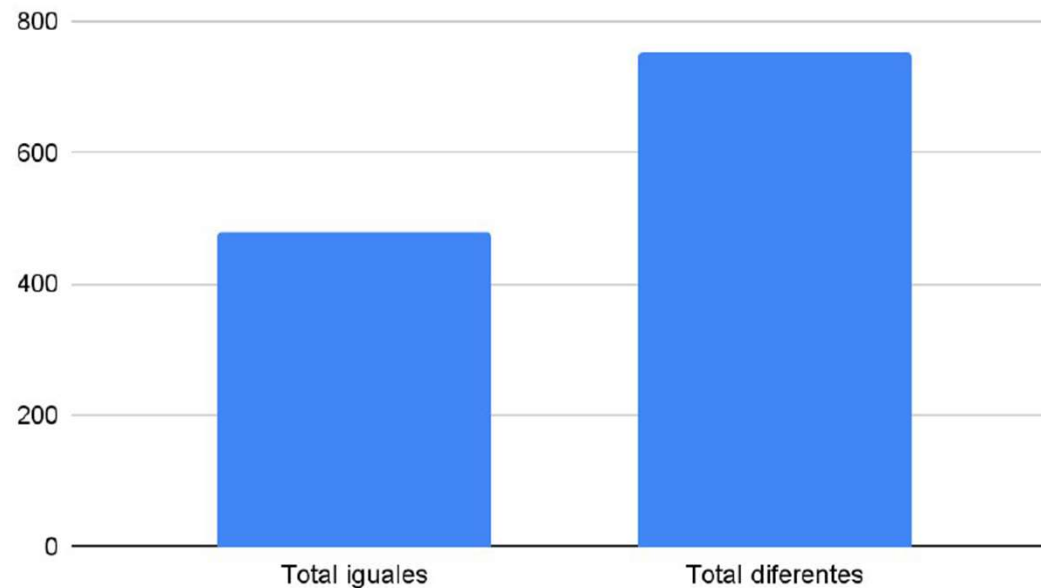
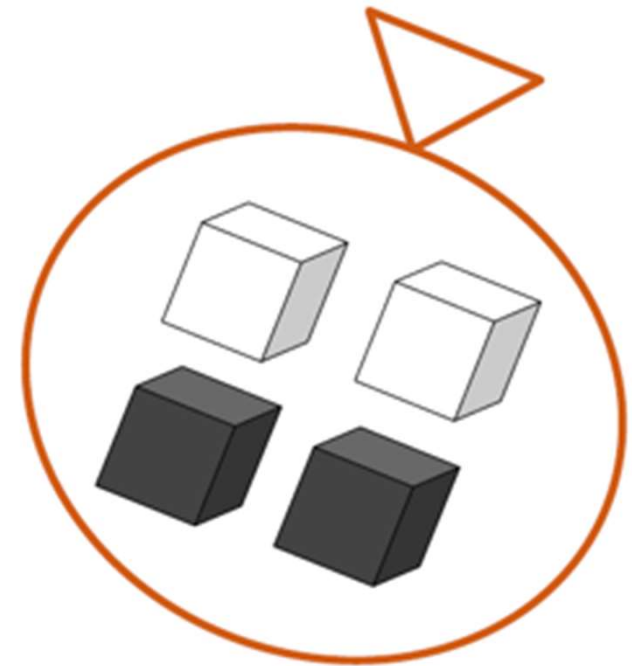
- a) que sean del mismo color
- b) que sean de diferente color?



**(1) Conjeturamos y explicamos la conjetura**









# Experimentamos

- a) Hacemos extracciones (10 cada uno)
- b) Ponemos en común los resultados de la experimentación



## Explicamos el resultado y validamos

- Hay que modificar la conjetura?
- Podemos explicar los resultados de manera “teórica”?

				
		=	≠	≠
	=		≠	≠
	≠	≠		=
	≠	≠	=	

$$P(=) = 4/12 = 1/3$$

$$P(\neq) = 8/12 = 2/3$$

## Ejemplo 4: ¿Esto es un problema? Convertir un ejercicio en un problema mediante la gestión

- **Hallar cuatro números que sumen 10**
- ¿Este enunciado es realmente un problema?
- ¿Cómo gestionar la clase para que sea una actividad competencialmente rica?
- ¿Qué es lo que estamos trabajando al tratar de resolver el problema?

## La toma de decisiones en el aula de matemáticas

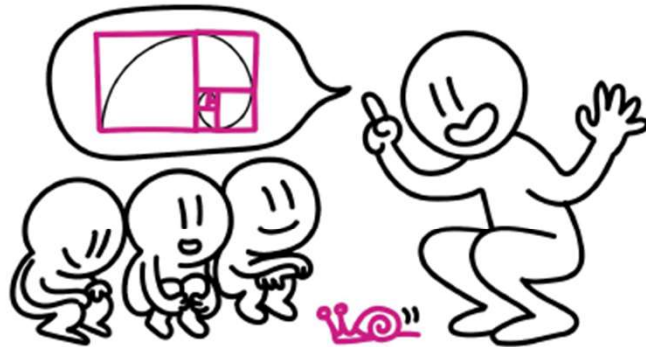
Cuando enseñamos matemáticas, hay que tomar muchas decisiones para hallar un equilibrio entre principios en conflicto:

- Matemáticas – contextos – intereses
- Homogeneidad – heterogeneidad / diversidad
- Promover métodos: informales – formales
- Lenguajes: oral – escrito / verbal - simbólico
- Técnicas y rutinas – procesos de orden superior
- Intuición-experimentación / argumentación-prueba
- Formas de resolución – resultados
- Retos complejos – asegurar éxitos

# Proyecto Innovamat: gestión del aula

10 claves para un ambiente de **Resolución de problemas**

Entiende las matemáticas más allá de los contenidos.



Considéralas como una manera de hacer, de ver el mundo y de vivirlo.

No expliques nada que el alumno pueda descubrir por sí mismo.



Haz preguntas para evocar deducciones en lugar de dar respuestas directas.



**No tengas miedo de la conversación ni del aparente desorden en el aula.**



Fomenta la participación de todos y discute sobre diversas estrategias, representaciones y soluciones.

**Plantea tareas de suelo bajo, techo alto y paredes anchas.**



Invita a todo el mundo a entrar y que, quien quiera, se haga nuevas preguntas para ir más allá.

**Valora más la profundidad que la velocidad.**



Deja tiempo para manipular y conjeturar.

**Cuestiona con frecuencia las observaciones de los alumnos.**



Favorece el espíritu crítico, el debate y la argumentación.

**Acepta y transmite  
que el error  
es bienvenido.**



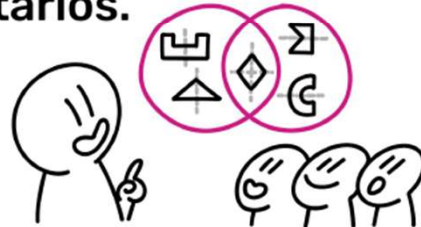
Vivirlo siempre como una oportunidad  
para aprender.

**Provoca conexiones  
desde la curiosidad  
y la creatividad.**



Ofrece contextos significativos para explorar  
el mundo desde distintos ámbitos.

**Da ejemplos  
que permitan  
observar patrones,  
y contraejemplos para  
acotarlos.**



Descubrid regularidades que os permitan  
modelizar, generalizar y definir.

**Procura que todos  
los alumnos tengan  
momentos de gloria  
matemática.**



Celebrad las aportaciones de todos  
como si hubierais marcado un gol.

## *A modo de conclusión (I)*

El trabajo con actividades ricas en el aula debería proporcionar oportunidades para:

- Ayudar a construir los conceptos, las relaciones entre dichos conceptos y las distintas formas de representación de los mismos.
- Desarrollar y aplicar los procedimientos y las técnicas propios de las matemáticas.
- Utilizar las heurísticas, tanto las de carácter general como las herramientas heurísticas específicas
- Promover la toma de decisiones, la argumentación sobre dichas decisiones y las soluciones halladas, y desarrollar el pensamiento crítico.

## *A modo de conclusión (II)*

Los problemas deberían ser la fuente principal para la elaboración de actividades de aula.

Determinar qué es un "buen" problema, como actividad de aprendizaje, es difícil, pero algunas características que debería cumplir son:

Que permita experimentar y/o construir y/o argumentar

Que admita diferentes niveles de resolución

Que se pueda enmarcar en una situación más amplia

Que posibilite la discusión y la reelaboración

Que se relacione con conceptos del currículo

Muchas de estas características dependen no sólo de la situación / problema, sino de su formulación.

## *A modo de conclusión (III)*

En cuanto a la gestión de la clase, la actitud del profesor debe ser la de crear un ambiente de resolución de problemas (de interrogación, de discusión, de colaboración) y proporcionar las ayudas necesarias para que los alumnos puedan avanzar en su propio proceso de resolución.

Son posibles y deseables distintas organizaciones que van del trabajo individual a las discusiones con el grupo clase, pasando por el trabajo en parejas y en pequeños grupos. Cada una de estas formas de trabajo aporta elementos importantes y a menudo complementarios, desde el fomento de la autonomía y la toma de decisiones fundamentadas, hasta la incentivación de las distintas interacciones que promueven la argumentación y la comunicación y, en definitiva, la construcción de conocimiento.

## *A modo de conclusión (IV)*

Nuestro papel como profesores, hoy, sigue siendo fundamental: seleccionando y secuenciando las actividades, gestionándolas, ayudando al alumnado en su trabajo y evaluando todo el proceso.

Sin embargo, es necesaria una condición: que nosotros también nos planteemos y resolvamos problemas, y desarrollemos el pensamiento crítico, además de dar oportunidades a nuestros alumnos para hacerlo.

Entiendo que un trabajo conjunto en la línea que he tratado de exponer es imprescindible para que la educación matemática que proponemos sea relevante para la formación de todos los ciudadanos.

Un profesor de matemáticas tiene una gran oportunidad. Si dedica el tiempo a ejercitar a sus alumnos con operaciones rutinarias, matará en ellos el interés, impedirá su desarrollo intelectual y acabará desaprovechando su oportunidad. Pero si pone a prueba la curiosidad de sus alumnos, planteándoles problemas adecuados y les ayuda a resolverlos con preguntas estimulantes, podrá despertar el gusto por el pensamiento independiente, además de proporcionarles ciertos recursos.



George Polya  
(1887 – 1985)



**LA PRIMERA CONDICIÓN PARA QUE LOS ALUMNOS QUIERAN RESOLVER PROBLEMAS Y APRENDER MATEMÁTICAS A TRAVÉS DE ELLOS, ES QUE A SUS PROFESORES LES GUSTE HACERLO**

**LA SEGUNDA CONDICIÓN ES QUE LOS PROFESORES ESTEN CONVENCIDOS QUE SUS ALUMNOS PUEDEN HACERLO.**

**MUCHAS GRACIAS!**

[jordi.deulofeu@uab.cat](mailto:jordi.deulofeu@uab.cat)



## REFERENCIAS

- Calvo, C., Deulofeu, J., Jareño, J., Morera, L. (2016). *Aprender a enseñar matemáticas en la Educación Secundaria*. Madrid: Síntesis.
- Deulofeu, J. y Vila, A. (2021). Aprender a pensar matemáticamente en ambientes de resolución de problemas. *GIDIMAT-UA (Ed.), Ideas para la Educación Matemática. Perspectivas desde el Trabajo de María Luz Callejo de la Vega*. Murcia: Compobell
- Deulofeu, J., de la Fuente, A. (2022). Desarrollar las competencias de resolución de problemas y modelización para aprender matemáticas. En: *Aportaciones al desarrollo del currículum desde la investigación en Educación Matemática*. Granada: SEIEM y Editorial de la Universidad de Granada.
- Vilalta, A. (2021). Un proyecto para desarrollar la competencia matemática en el aula. *UNO, Revista de Didáctica de las matemáticas*, 92, p.73-79.