



De lo concreto a lo indeterminado. Un estudio de caso sobre el proceso de generalización en un contexto funcional

Romina Narváez

Universidad de Granada

España

rnarvaez@correo.ugr.es

María D. Torres

Universidad de Granada

España

mtorres@ugr.es

María C. Cañadas

Universidad de Granada

España

mconsu@ugr.es

Resumen

Esta investigación es parte de un estudio más amplio realizado en España sobre el pensamiento funcional en infantil y primaria. Nuestro objetivo de investigación es describir el proceso de generalización (abducción, inducción y generalización) realizado por un estudiante de cuarto de primaria (9 años) durante el desarrollo de una entrevista individual que consideró la función lineal ($y=3x+1$). La metodología es un estudio de caso de carácter intrínseco, donde describimos lo sucedido con el estudiante durante su proceso de generalización, identificando, además, las estructuras que el estudiante evidenció a lo largo de la entrevista. Dentro de los hallazgos, destacamos que el estudiante valida y reafirma la estructura de la función que evidencia previamente (fase de abducción) generalizando con casos indeterminados, sin pasar por el trabajo con casos lejanos. Como conclusión expresamos que no es necesario pasar por todas las fases del proceso de generalización para generalizar. Así también, que la identificación de estructuras es una característica clave dentro del proceso de generalización.

Palabras clave: Educación primaria; estudio de caso; estructura, generalización; pensamiento funcional; proceso de generalización; razonamiento abductivo; razonamiento inductivo.

Antecedentes y marco teórico

La introducción de modos de pensamiento algebraicos en edades tempranas se centra en la generalización a partir de la observación de regularidades en una situación matemática planteada (Radford, 2013). Entre los distintos modos de pensamiento algebraico para educación primaria, nos ubicamos en el pensamiento funcional. Este pensamiento se centra en la relación entre dos (o más) cantidades que covarían; específicamente, involucra los tipos de pensamiento que van desde relaciones entre cantidades concretas hasta la generalización de esas relaciones (Kaput, 2008. p. 143).

Asumimos aquí la concepción dual de la generalización, como proceso y como producto de dicho proceso (Harel y Tall, 1991). La generalización como proceso implica: (a) identificar los elementos comunes a todos los casos, (b) ampliar el razonamiento más allá del rango en el que se originó y (c) obtener resultados más amplios que los casos particulares (Ellis, 2007; Radford, 2013). El producto de la generalización es la forma en que se expresa la generalidad, es decir, es el resultado de dicho proceso (Ellis, 2007). Al generalizar, los estudiantes pueden incluir acciones tales como explorar, formular, revisar y validar conjeturas, organizar datos e identificar la estructura de la relación funcional (Cañadas y Castro, 2007). Estas acciones podrían llevar a los estudiantes a plantear conclusiones tanto por razonamientos abductivos como inductivos (Rivera, 2007; Torres et al., 2021). En la figura 1 recogemos un modelo que relaciona en tres fases el proceso de generalización con los diferentes razonamientos (abducción, inducción y generalización) (Torres et al., 2021).

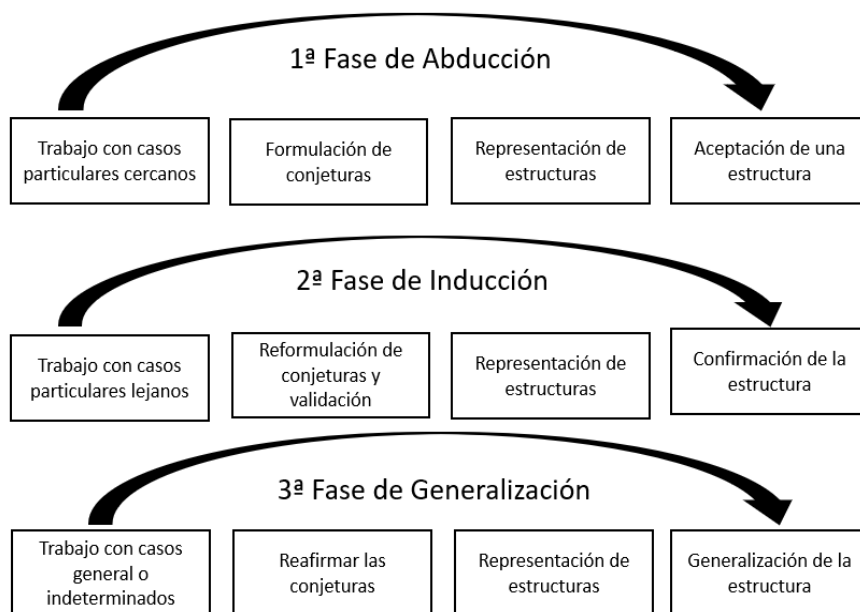


Figura 1. Proceso de generalización (Torres et al., 2021).

Dentro de este modelo, la estructura hace referencia a la regularidad evidenciada entre las variables de una función, siendo un elemento clave en el proceso de generalización. Para nuestro estudio fue clave, puesto que nos ayudó a evidenciar cuando el estudiante cambió de fase en dicho proceso.

Como lo expresamos, este modelo considera tres fases. La primera, fase de abducción, comienza con el trabajo con casos particulares cercanos. En esta fase se lleva a cabo un razonamiento abductivo por el cual se prueba repetidamente y se formulan conjeturas (Rivera y Becker, 2003). La fase de inducción parte de los casos particulares lejanos que son aquellos que necesitan del conocimiento de la estructura para dar el resultado; son valores más grandes que no se pueden dibujar o contar según el nivel académico del estudiante. La fase de inducción tiene un carácter comprobatorio y no creador, es decir, los razonamientos inductivos no aportan conocimiento nuevo (Pierce, 1965). Su función es la de verificación de la estructura previamente aceptada por abducción que, en algunos casos, puede modificarse durante la misma fase. Finalmente, para generalizar habrá que imponer la presencia de casos indeterminados o generales con los que el estudiante pueda reafirmar la estructura validada durante la fase de inducción. De esta manera el estudiante podrá expresar la generalidad de la relación funcional, a través de la generalización de esta estructura.

Para este estudio nos planteamos como objetivo analizar el proceso de generalización que sigue un estudiante de cuarto de primaria (9 años) cuando aborda una tarea con una función lineal ($y=3x+I$). Para ello, usaremos el modelo presentado anteriormente.

Metodología

Nuestra investigación es cualitativa de carácter descriptiva y explicativa. Específicamente, presentamos un estudio de caso intrínseco (Stake, 2005). El sujeto de investigación es un estudiante de cuarto de primaria (9 años) de un colegio concertado de Granada (España). Este estudiante participó un experimento de enseñanza, que realizamos con su grupo-clase. Durante el experimento de enseñanza, implementamos cuatro sesiones de trabajo, donde planteamos tareas de generalización con contextos cercanos, utilizando las funciones $f(x)=2x+I$; $f(x)=x+3$ y $f(x)=2x$. Posteriormente, realizamos entrevistas individuales a un grupo de estudiantes. El estudiante de este estudio fue seleccionado porque fue muy participativo durante las sesiones de clase. La buena disposición para trabajar y conversar es necesaria para la realización de la entrevista. Además, al revisar su entrevista, observamos que la investigadora solo trabajó con casos cercanos e indeterminados, sin presentarse casos con cantidades lejanas. La entrevista duró 36 minutos aproximadamente donde trabajamos la siguiente situación “En el cumpleaños de Isabel le regalará la misma cantidad de globos a cada invitado y colocarán un globo en la puerta para avisar que es la casa del cumpleaños”, involucrando la función $f(x)=3x+I$. Transcribimos la entrevista y analizamos el proceso de generalización con base en las categorías dadas en el modelo del proceso de generación detallado en la figura 1 (Torres et al., 2021).

Resultados y análisis

Durante el desarrollo de la entrevista se trabajó con diversos casos (cercanos e indeterminados) donde el estudiante evidenció distintas estructuras. Al inicio de la entrevista, la investigadora realizó la introducción de la tarea. En esta primera aproximación el estudiante identifica la estructura $3x+I$. A continuación, detallamos una parte de la entrevista donde se observa esta situación. Utilizamos la letra I para referirnos a la investigadora y la letra E para referirnos al estudiante:

1. I: El siguiente caso es cuando fueron seis invitados. ¿qué piensas? Cuando fueron seis invitados, necesité 19 globos.
2. E: 19 globos, ¿y van seis? Pues pone uno en la puerta y tres para cada uno.
3. I: Entonces como sabes esto...
4. E: Contando... Uno, dos, tres, cuatro, cinco, seis, siete, ocho, nueve, diez... o dividiendo.
5. I: ¿Cómo?
6. E: Pues si somos seis amigos y hay 19 globos...
7. I: Y la puerta...
8. E: Y la puerta. Pues se divide tres por seis, sale 18, más me sobra uno y lo pongo en la puerta.
9. I: ¿Y serían?
10. E: Pues totalmente 19.

Observamos como en la línea 8 el estudiante evidencia claramente la estructura $3x+1$ en esta primera aproximación. Posterior a la introducción de la tarea, la investigadora continuó presentando casos particulares cercanos. En esta etapa el estudiante estaba en la fase de abducción, periodo de prueba donde el estudiante está probando diferentes estructuras que pueden dar respuesta a la tarea dada. En esta fase realizó la identificación de estructuras. En primer lugar, identificó la estructura $3x+1$, expresando que “¿el tres? es lo que le damos a cada niño y el uno, lo que le damos a la puerta”. Después identificó las estructuras $5x$ y $x+1$. En esta parte de la entrevista el estudiante expresó que se le debe dar la misma cantidad de globos a cada niño, pero la cantidad fue diferente a la función que se está trabajando. Un ejemplo de esto es cuando identifica la estructura $x+1$ expresando “es seis porque uno para la puerta, otro para él, otro para él y otro para él”. La investigadora al observar que el estudiante no avanzaba revisó junto a él los ejemplos anteriores. Posterior a ello, el estudiante identificó nuevamente la estructura $3x+1$. En el siguiente fragmento de la entrevista lo detallamos:

1. I: Ahora si fuesen diez invitados, ¿cuántos globos necesito?
2. E: Sumando tres por cinco...tres por 10.
3. I: Lo anotamos ese cálculo y yo te digo el resultado.
4. E: Tres por 10 igual a 30. Necesitamos 30 globos.
5. I: ¿Esos tres qué significa?
6. E: Lo que le dio a cada uno.
7. I: ¿Y ese 10?
8. E: El número de invitados.
9. I: ¿Y qué pasa con la puerta?
10. E: Que le sumo la puerta y es igual a 31.

En esta situación observamos que el estudiante aceptó en este primer período de prueba (fase abductiva) la estructura $3x+1$ avanzando en su proceso de generalización. Para observar si se reafirma o no en su identificación de la estructura, indagamos en su trabajo con nuevos casos particulares. En esta fase se pasó de trabajar con casos cercanos a casos indeterminados. El primer caso indeterminado fue introducido así: “Isabel quiere invitar a muchos invitados”. Consideramos que el estudiante ha reafirmado una estructura evidenciada cuando la usa en más de dos ocasiones de manera correcta para un caso indeterminado. A continuación, detallamos parte de la entrevista y respuesta escrita en la figura 3:

1. I: Pero ella sabe el número, solo que no te lo quiere decir a ti. Solo te dice que son muchos.
¿Cómo le explicas tú a ella qué tiene que hacer para saber la cantidad de globos?...
2. E: Multiplicar y darle tres globos a cada uno. Multiplica por tres [Escribe en la tabla, segunda celda continua a "muchos"]
3. I: Y ahí cuando multiplique por tres si son muchos, ¿qué hace después?
4. E: Muchos por tres... Igual a muchos globos.
5. I: ¿Solo multiplica por tres? ¿Qué pasaba con la puerta?
6. E: Más uno es igual a muchos globos uno.

muchos	$\times 3$ muchos $\times 3 =$ muchos globos $+ 1 =$ muchos globos 1.
--------	--

Figura 3. Respuesta escrita del estudiante en tabla de datos.

El estudiante vuelve a expresar que se debe “multiplicar y darle tres globos a cada uno más uno”. Con esto evidenciamos que está reafirmando la estructura (por medio de los casos indeterminados), que había aceptado previamente (fase de abducción), generalizando la estructura.

Para finalizar la entrevista, la investigadora le propuso dos casos particulares relativos a la forma inversa de la función trabajada. Esta parte de la entrevista evidencia que el estudiante reafirmó nuevamente su elección de estructura, ya que la usó para dar respuesta a las cuestiones planteadas. Un ejemplo fue con trece globos, donde el estudiante indicó que es cuatro porque se divide 13 por 3, que es el número de globos y eso da como resultado 4. En la figura 4 mostramos su respuesta escrita:

4	13	$\frac{13}{3} = 4$ $\frac{12}{3} = 4$
---	----	--

Figura 3. Respuesta escrita del estudiante en tabla de datos.

Discusión y conclusiones

Este estudio evidencia que el estudiante de cuarto de primaria tiene capacidades para generalizar del mismo modo que lo reflejan otros estudios con diferentes edades (e.g., Cañadas y Castro, 2007; Stephens et al., 2017; Torres et al., 2021). En este caso particular, el estudiante generalizó la relación funcional $f(x) = 3x + 1$. El proceso de generalización realizado por el estudiante partió desde la fase de abducción, trabajando con casos particulares cercanos, donde identificó diferentes estructuras que después validaría con los siguientes casos a trabajar (cercanos e indeterminados). En Torres et al. (2021) la validación de la estructura se hacía en la fase de inducción, momento en el que los estudiantes trabajaron con casos particulares lejanos previos a los indeterminados. Este estudio da un ejemplo de cómo puede validarse la estructura

identificada con casos indeterminados y lograr generalizar, sin necesidad de trabajar con casos lejanos. Consideramos relevante analizar el proceso de generalización de más estudiantes y comparar esos resultados con los obtenidos en el trabajo de Torres et al. (2021) y así dar una mirada más crítica al proceso de generalización.

Destacamos la importancia del trabajo con casos cercanos para que los estudiantes prueben diferentes estructuras y acepten una de ellas para más tarde poder confirmarla. Esto es clave para lograr generalizar. En este estudio de caso, el estudiante identificó previamente distintas estructuras que le ayudaron a aceptar y validar la estructura correspondiente. Con este estudiante no se trabajó con casos lejanos, pero esto no fue obstáculo para que el estudiante generalizara. Al trabajar con casos cercanos y luego con casos indeterminados, permitió que el estudiante validara su estructura y la confirmara con los casos indeterminados. Concordamos además con lo expresado por Torres et al. (2022) que la identificación de estructuras es una característica clave, ya que nos permite interpretar fases dentro del proceso de generalización.

Así mismo observamos que las intervenciones de la investigadora permitieron que el estudiante respondiera y guiara su trabajo hacia la generalización. Consideramos relevante en un futuro trabajo estudiar las relaciones que existen con el proceso de generalización y las mediciones realizadas. De la misma manera, consideramos que habrá que atender a las justificaciones que realizan los estudiantes sobre sus validaciones y reafirmaciones, para estudiar en más profundidad el proceso de generalización.

Agradecimientos

Proyectos de investigación del Plan Nacional I+D con referencias EDU201675771-P y PID2020-113601GB-I00, financiados por el Ministerio de Economía y Competitividad de España. Beca de Doctorado en el extranjero, Becas Chile, Folio 72210075.

Referencias y bibliografía

- Cañadas, M. C. y Castro, E. (2007). A proposal of categorisation for analysing inductive reasoning. *PNA*, 1(2), 67-78. <https://doi.org/10.30827/pna.v1i2.6213>
- Ellis, A. B. (2007). A taxonomy for categorizing generalizations: Generalizing actions and reflection generalizations. *Journal of the Learning Sciences*, 16(2), 221-262. <https://doi.org/10.1080/10508400701193705>
- Harel, G. y Tall, D. (1991). The general, the abstract, and the generic in advanced mathematics. *For the Learning of Mathematics*, 11(1), 38-42.
- Kaput, J. J. (2008). What is algebra? What is the algebraic reasoning? En J. J. Kaput, D. W. Carraher y M. L. Blanton (Eds.), *Algebra in the early grades* (pp. 5-17). LEA. <https://doi.org/10.4324/9781315097435-2>.
- Peirce, C. (1965) *Collected Papers of Charles Sanders Peirce*. En C. Hartshorne y P. Weiss (Eds.), *The Belknap Press of Harvard University Press*. Cambridge, MA, USA.
- Radford, L. (2013). En torno a tres problemas de la generalización. En L. Rico, M. C. Cañadas, J. Gutiérrez, M. Molina y I. Segovia (Eds.), *Investigación en Didáctica de las Matemáticas. Homenaje a Encarnación Castro* (pp. 3-12). Granada, Spain: Editorial Comares.

De lo concreto a lo indeterminado. Un estudio de caso sobre la generalización en un contexto funcional.

Rivera, F. y Becker, J. R. (2003). The Effects of Numerical and Figural Cues on the Induction Processes of Preservice Elementary Teachers. *International Group for the Psychology of Mathematics Education*, 4, 63-70.

Stake, R. E. (2005) Investigación con estudio de casos. Madrid, Morata.

Torres, M. D., Moreno, A. y Cañadas, M. C. (2021). *Generalization process by second grade students*. Mathematics, 9(10), 1109. <https://doi.org/10.3390/math9101109>.

Torres, M. D., Cañadas, M. C. y Moreno, A. (2022). Pensamiento funcional de estudiantes de 2° de primaria: estructuras y representaciones. *PNA*, 16(3), 215-236. <https://doi.org/10.30827/pna.v16i3.23637>.