Diseño de tareas por variación para promover la argumentación

Wilmer Ríos-Cuesta[1]

RESUMEN

Las tareas presentadas en los libros de matemáticas diseñados por el Ministerio de Educación Nacional de Colombia no suelen abordar diversos registros de representación semiótica que promueva que los estudiantes construyan su conocimiento y que atiendan la complejidad de los conceptos, el contexto, el razonamiento matemático y la argumentación. En ese sentido, el objetivo de este estudio fue ejemplificar la creación de problemas por variación de uno ya dado en el libro de texto de matemáticas. Para esto, se tomó como referente un libro de texto de matemáticas de 7° grado de educación secundaria donde se abordan los conceptos de área y perímetro de cuadriláteros. Se concluye que el diseño de tareas por variación es una oportunidad para que los profesores aumenten su comprensión de los objetos matemáticos y tomen en consideración el conocimiento que tienen sus estudiantes; además, se pueden identificar oportunidades de argumentación al establecer conexiones intramatemáticas y extramatemáticas al relacionar los conceptos que poseen los estudiantes y varios registros de representación.

PALABRAS CLAVE

Diseño de tareas, Variación de tareas, Argumentación en clase, Libros de texto, Gestión de clase.

---

[1] wilmer.rios@correounivalle.edu.co
Universidad del Valle. Cali, Colombia
https://orcid.org/0000-0001-8129-2137

Ríos-Cuesta, W. (2023). Diseño de tareas por variación para promover la argumentación. En Juárez Ruíz, E. L., Hernández Rebollar, L. A., & Castañeda, A. (Eds.), *Tendencias en la Educación Matemática 2023* (pp. 69–88). SOMIDEM Editorial.
https://doi.org/10.24844/SOMIDEM/aa/aaaa/aa

INTRODUCCIÓN

El libro de texto es un insumo importante en la construcción de los currículos de las instituciones educativas en Colombia. El Ministerio de Educación Nacional se encarga del diseño de la política educativa mediante orientaciones y directrices que permiten formular los planes de estudio que se ejecutan en las escuelas y colegios del país. En su diseño se aterrizan los Lineamientos Curriculares de Matemáticas (Ministerio de Educación Nacional, 1998), los Estándares Básicos de Competencias (Ministerio de Educación Nacional, 2006), los Derechos Básicos de Aprendizaje (Ministerio de Educación Nacional, 2016) y las Mallas de Aprendizaje (Ministerio de Educación Nacional, 2017a), todo esto a través del Proyecto Educativo Institucional, mediante el cual se da la autonomía a las instituciones educativas para elaborar el currículo que es ejecutado a través del Plan de Aula por cada uno de los profesores encargados de la asignatura.

Por otro lado, el Ministerio de Educación Nacional asume una postura sobre el aprendizaje de las matemáticas desde el enfoque de desarrollo de competencias que deben adquirir los estudiantes en su interacción en el aula. En particular, en el documento de Estándares Básicos de Competencias (Ministerio de Educación Nacional, 2006) se alude al término competencia para referirse al "aprendizaje significativo y comprensivo" (p. 49), para lo que se requiere "de ambientes de aprendizaje enriquecidos por situaciones problema significativas y comprensivas, que posibiliten avanzar a niveles de competencia más y más complejos" (Ministerio de Educación Nacional, 2006, p. 49). Además, en dicho documento se hacen precisiones sobre algunos procesos existentes en la actividad matemática, entre ellos la argumentación, donde se solicita a los profesores "usar la argumentación, la prueba y la refutación, el ejemplo y el contraejemplo, como medios de validar y rechazar conjeturas, y avanzar en el camino hacia la demostración" (Ministerio de Educación Nacional, 2006, p. 51) y "utilizar diferentes registros de representación o sistemas de notación simbólica para crear, expresar y representar ideas matemáticas; para utilizar y transformar dichas representaciones y, con ellas, formular y sustentar puntos de vista" (Ministerio de Educación Nacional, 2006, p. 51). Ahora bien, la discusión se centra sobre lo que se plantea en el documento de Estándares Básicos de Competencias (Ministerio de Educación Nacional, 2006) y lo que se propone en los libros de textos que son publicados por el Ministerio de Educación Nacional. En ellos se observa que gran parte de las tareas propuestas apuntan a la ejecución de algoritmos, esto, según la clasificación propuesta por Smith y Stein (1998), se sitúa en procedimientos sin conexión. Este hecho en particular supone una contradicción entre las orientaciones y políticas formuladas por el Ministerio de Educación y su puesta en escena a nivel curricular.

Un asunto importante relacionado con el aprendizaje de las matemáticas se refiere a la mediación del profesor, la cual constituye un aspecto fundamental al situarse entre las políticas ministeriales y los libros de texto que supone, además, que el profesor reconozca la actividad cognitiva que se espera promover con las tareas del libro de texto, y lo que su experiencia y conocimiento sobre el desarrollo de competencias le permita identificar en ellas para proponer cambios que favorezcan el aprendizaje. Aquí se destaca el enfoque sociocultural sobre el aprendizaje de las matemáticas y el papel mediador de las tareas. El profesor tiene la función de orientar a los estudiantes, promover el uso de diversos registros de representación y cuestionar la validez de las afirmaciones que producen buscando la precisión de las ideas, generando ambientes de argumentación (Urhan & Zengin, 2023).

Daher (2014) destaca la importancia del profesor en la mediación de los diferentes registros semióticos y las relaciones que los estudiantes construyen con los objetos matemáticos donde reconocen su naturaleza abstracta, pero advierte que se puede acceder a ellos mediante sus registros de representación y definiciones. Otros estudios, como los de Berger (2009) se apoyan en las múltiples representaciones que ofrece el Sistema de Álgebra Computacional (Computer Algebra System –CAS–) para afirmar que los Entornos de Geometría Dinámica facilitan el aprendizaje de los estudiantes aun cuando ellos no posean destrezas en el manejo de herramientas tecnológicas. Capone et al. (2021) desarrollaron un experimento en el cual promovieron la articulación de diversos registros de representación y la argumentación en estudiantes de secundaria; en su investigación registraron algunas dificultades para pasar del registro gráfico o simbólico al textual, observando también barreras cognitivas al traducir enunciados verbales y argumentarlos.

Por otro lado, la argumentación es una competencia que permite al profesor identificar los razonamientos de los estudiantes y mediar conforme a las inferencias que realiza sobre su actividad cognitiva. Sin embargo, en la literatura científica se informa que los estudiantes presentan dificultades al momento de argumentar sus producciones (Goizueta, 2015; Ríos-Cuesta, 2021a) y coordinar varios registros semióticos (Duval, 2006), otros estudios reportan que algunos estudiantes evaden el conflicto cognitivo en clase al adherirse a las explicaciones que ofrece el profesor o los estudiantes destacados, sin que esto signifique que hayan comprendido la actividad que se desarrolla en ese momento (Castellaro & Peralta, 2020). Además, en diversos estudios se reportan algunas dificultades que experimentan profesores para argumentar, promover argumentos y atender la argumentación de los estudiantes (Zhao et al., 2021). Este hecho constituye un reto que deben asumir los profesores que pretenden soportar su práctica de enseñanza en la argumentación como un mecanismo de validación y consolidación de los aprendizajes.

En tanto a la diferencia entre lo que se enuncia en los documentos normativos y lo que se plasma en los libros de texto, esta se puede conciliar mediante la articulación de registros semióticos en el diseño de las tareas que se proponen en clase. Para esto se debe brindar la oportunidad de reconocer la complejidad de los conceptos matemáticos que se ponen en juego y articularse con otros conocimientos necesarios para promover el desarrollo de competencias, por ejemplo, una tarea que pretenda desarrollar la comprensión del concepto de función debe promover el registro tabular, gráfico, algebraico y verbal, de modo que el estudiante gane claridad sobre lo que es una función. Lo anterior se plantea partiendo de la premisa de que las diversas representaciones semióticas de los objetos de conocimiento tienen un impacto positivo en la adquisición de habilidades de pensamiento que apoyan el razonamiento (Martí & Pozo, 2000).

Así pues, el profesor debe analizar las tareas de los libros de texto y enriquecerlas de acuerdo con los propósitos de la clase. Este tipo de acciones docentes requieren que se desarrolle la capacidad de seleccionar, modificar y crear problemas más productivos para la clase, lo que contribuye a ampliar el conocimiento matemático del profesor (Malaspina, 2016). Bonotto (2013) afirma que la creación de problemas permite superar las limitaciones de los problemas típicos presentados en clase. Una propuesta para crear y modificar las tareas de los libros de texto fue presentada por Malaspina (2013), quien resalta la necesidad de que el profesor desarrolle esta competencia para aprovechar su conocimiento del contexto, las motivaciones de sus estudiantes, graduar la dificultad de las tareas y convertirlo en una oportunidad para aclarar, ampliar o corregir las ideas sobre los conceptos que construyen. Además, Malaspina (op. cit.) señala que crear problemas es una forma de llenar el vacío existente en los libros de texto en lo relacionado con la resolución de problemas. La variación de problemas es la acción que realiza el profesor para tomar un problema ya planteado y modificarlo, ampliando el horizonte matemático de la tarea con el planteamiento de nuevos requerimientos o mixturas que enriquezcan el problema (Malaspina, 2016).

En este estudio se ha tomado la construcción de los conceptos de área y perímetro, dado que los estudiantes deben usar nociones previas sobre conteo, medición, ubicación espacial y distintos sistemas de representación (Aldana-Bermúdez & López-Mesa, 2016); además, los estudiantes colombianos comienzan a construir nociones sobre estos conceptos desde el grado tercero, de modo tal que en el grado séptimo ya deben haber logrado una definición sólida que les permita resolver problemas (ver Ministerio de Educación Nacional, 2016). Sin embargo, en la literatura se informa la dificultad de los estudiantes para diferenciar y usar estos conceptos (e. g. Mántica et al., 2002; Martínez-Artero & Nortes, 2013). Algunos errores se relacionan con la aplicación de fórmulas o la confusión de las unidades de medida (Alguacil de Nicolás et al., 2016), situación que se debe, en parte, al uso excesivo de la memoria. Para tratar de resolver esta situación, Manotas y Rojas (2008) proponen que "deben tomarse como pretexto las situaciones problemáticas de la vida cotidiana para que el estudiante asimile de forma directa los conceptos pertinentes" (p. 69).

De acuerdo con lo anterior, el objetivo de este estudio es ejemplificar la creación de problemas por variación de uno ya dado en un texto de matemáticas de secundaria, propuesto por el Ministerio de Educación Nacional de Colombia. Se toma como objeto matemático la construcción de los conceptos de área y perímetro para estudiantes de grado séptimo para hacer una mixtura entre ellos, haciendo uso de diversos registros de representación semiótica.

APROXIMACIÓN TEÓRICA

Este apartado se ha subdividido en cuatro partes, las cuales, además de servir como unidades de análisis, permiten entender los elementos clave en el diseño de la tarea propuesta en este artículo. La subdivisión corresponde a: tarea matemática, creación de problemas, registros de representación semiótica y argumentación en clase.

Tarea matemática

Smith y Stein (1998) definen una tarea matemática como las actividades que potencialmente pueden mediar en el aprendizaje escolar. Stein et al. (2007) advierten que las tareas presentes en los libros de texto que son usados por los profesores determinan la manera como los estudiantes se acercan al conocimiento y cómo aprenden. Esto sucede porque en algunos libros de texto se presenta un algoritmo que permite resolver una tarea que sirve de ejemplo para desarrollar un concepto o idea, posteriormente, se les solicita a los estudiantes resolver tareas similares aplicando el mismo procedimiento. Así pues, este tipo de tareas rutinarias donde el estudiante debe aplicar un algoritmo no fomentan un pensamiento divergente, sino la memorización y ejecución de procedimientos (Jäder et al., 2020; Ríos-Cuesta, 2020, 2021b).

De acuerdo con lo anterior, se pretende desmitificar el hecho de que los problemas matemáticos tienen un solo camino de resolución que ha sido presentado previamente por el profesor. Dentro de las funciones del profesor no se pretende que se convierta en un expositor de cómo se resuelven los problemas, sino que debe promover el desarrollo de procesos de pensamiento que lleven a los estudiantes a desarrollar heurísticas y estrategias de razonamiento (Malaspina, 2006). Sepúlveda et al. (2009) afirman que, al resolver problemas, los estudiantes van desarrollando procesos de pensamiento que poco a poco se van ordenando hasta convertirse en habilidades que más adelante se convierten en heurísticas de resolución, lo que le permitirá abordar problemas más complejos.

Creación de problemas

Para hablar de creación de problemas es necesario asumir una postura sobre lo que esto significa y sus posibles implicaciones en el diseño de las tareas. Resnick y Glaser (1976) definen un problema como aquello de lo cual no se tiene experiencia para resolver. Liljedahl (2008) afirma que aquellas tareas que puedan abordarse de manera deliberada, donde el resolutor pueda ver cómo solucionarlo, se concibe como un problema rutinario que no conduce a un descubrimiento importante. En consecuencia, un problema requiere una comprensión creativa de parte del resolutor que le permita probar diversos caminos hasta encontrar una respuesta (Liljedahl, 2008).

Para la creación de problemas, nos alineamos con la propuesta de Malaspina (2013) y Malaspina y Vallejo (2019), mediante la variación de un problema dado en un libro de texto, el cual consiste en construir un nuevo problema mediante la modificación de elementos o parámetros del problema. Para ello, se deben tener en cuenta cuatro elementos fundamentales en las tareas, que son: 1) información, 2) requerimientos, 3) contexto y 4) el entorno matemático (Malaspina & Vallejo, 2019). La información hace referencia a los datos cuantitativos necesarios para el problema. El requerimiento es lo que se le pide al estudiante en la tarea. El contexto hace referencia a que la situación que se le plantea al estudiante sea familiar o que se relacione con su realidad. El entorno matemático se refiere a los conceptos involucrados o que potencialmente pueden emerger al tratar de resolver la tarea.

Registros de representación semiótica

La forma de relacionarnos con los objetos matemáticos es por medio de sus propiedades, definiciones o registros semióticos, y esto es porque no son objetos físicos. Las representaciones semióticas permiten la manipulación física o mental de dichos objetos (Duval, 2004). Sin embargo, dependiendo del nivel de comprensión del estudiante, este puede llegar a confundir un objeto con su representación (D'Amore et al., 2015). Entre los registros de representación se encuentra el algebraico, el tabular, el geométrico, el verbal y el gráfico, que son los que se tratarán de articular en esta propuesta.

Argumentación en clase

En la literatura científica coexisten diversas posturas sobre lo que se entiende como argumentación, cada una de ellas depende de la perspectiva teórica y epistemológica del investigador y del propósito dentro de la actividad que desarrollan. El Ministerio de Educación Nacional de Colombia (2006) concibe la argumentación como un medio para acercar a los estudiantes a la prueba, lo que implica "saber dar y pedir razones, probar y refutar, y ojalá avanzar hacia la demostración formal" (p. 56). Douek (1999) entiende la argumentación como un proceso que genera argumentos conectados lógicamente, sin que esto suponga el uso de razonamientos formales o deductivos, de tal modo que se valoran todas las declaraciones, dibujos y datos numéricos usados para defender o refutar una afirmación.

Ahora bien, si uno se alinea con la perspectiva dialógica y social (Díez-Palomar & Olivé, 2015) en el aula de clase, ocurren intercambios comunicativos entre los estudiantes y el profesor. Esto permitió el desarrollo de la argumentación dialéctica donde ocurren debates y diferencias de opinión frente a los métodos de resolución y respuestas ofrecidas. Con esto se busca que la argumentación permita llegar a la aceptabilidad de las acciones, donde el argumento cumple la función de ser un procedimiento (Van Eemeren, 2018; Zamudio, 2012). En cambio, si lo que interesa es el resultado, la argumentación se focaliza en el argumento y se destaca el carácter lógico y las cadenas de razonamiento ofrecidas para llegar a una conclusión, en consecuencia, el investigador se sitúa en la perspectiva lógica que busca acercar a los estudiantes a la prueba formal (Fiallo & Gutiérrez, 2017; Molina et al., 2019). Si el interés se sitúa en observar la forma en que se busca convencer o persuadir a otro, se está frente a la perspectiva retórica, y la argumentación es vista como un proceso que se asocia con la lógica informal (Perelman & Olbrechts-Tyteca, 2006; Zamudio, 2012).

Con estos elementos, el profesor organiza la actividad en el aula y se prepara para orquestar discusiones productivas que lleven a los estudiantes a comprender la actividad que realizan, así como distinguir los caminos seguidos por sus compañeros al resolver los problemas propuestos y reconocer los razonamientos que los llevaron a una solución o estancamiento.

MÉTODO

Esta investigación se basó en el análisis de la propuesta de Malaspina y Vallejo (2019), la cual se usó para sostener el diseño de una tarea que permitiera avanzar en la comprensión de los conceptos de área y perímetro. Además, se buscaba que promoviera la argumentación en clase como un mecanismo para que el profesor identificara los razonamientos de los estudiantes y los ayudara a conectar sus conocimientos previos y relacionar estos conceptos con elementos de su entorno.

Asimismo, se tomó como muestra el libro más reciente publicado por el Ministerio de Educación, ya que este recoge la visión actual sobre el desarrollo de competencias y la manera como se articulan los documentos normativos del país en materia educativa.

Enfoque investigativo

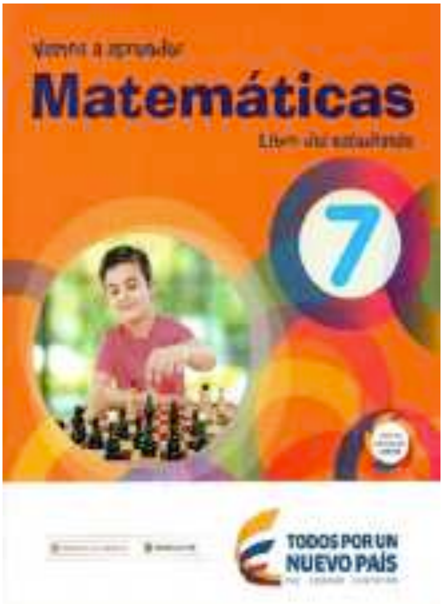
La investigación se sitúa en el paradigma cualitativo con un enfoque exploratorio y descriptivo, teniendo en cuenta que se propuso ejemplificar la variación de dos problemas dados para atender el desarrollo de los conceptos de área y perímetro. La variación se realiza considerando el conocimiento sobre los estudiantes, de su entorno sociocultural, de los elementos matemáticos presentes en la tarea y la aplicabilidad de los conceptos que emergen, los cuales, en última instancia, pretenden causar un giro sobre la concepción utilitaria de la matemática a otro funcional.

Tipo de investigación

Se presenta una investigación situada en el paradigma cualitativo mediante un estudio de caso único (Stake, 2010), que consistió en el análisis de un libro de texto de matemáticas de distribución gratuita en las instituciones educativas del país.

Figura 1

Carátula del libro analizado



Nota. Fuente: Carátula del libro (Ministerio de Educación Nacional, 2017b)

Muestra

Se hizo una revisión de los libros de texto publicados por el Ministerio de Educación Nacional de Colombia en los últimos años. Posteriormente se seleccionó el libro de texto “Vamos a aprender Matemáticas: Libro del estudiante" de grado séptimo (Figura 1), publicado bajo las directrices del Ministerio de Educación Nacional (2017b), donde se aborda la construcción de los conceptos de área y perímetro. Su elección obedece a que es el último texto elaborado con las directrices ministeriales producto de la agenda 2015-2025, donde se asume el reto de hacer de Colombia una de las naciones más educadas de América Latina (Ministerio de Educación Nacional, 2017b).

Diseño

De este texto se seleccionaron dos tareas, una relativa a cada concepto, donde se les pide a los estudiantes hacer cálculos. Después, se hace una mixtura de las tareas y se propone una nueva situación enriquecida que trata de articularlos e ir un poco más allá al solicitarles el reconocimiento y la aplicación de estos conceptos para tomar decisiones mediante la comparación de resultados. Para ello, se identificaron y modificaron los cuatro elementos sugeridos por Malaspina y Vallejo (2019): 1) información, 2) requerimientos, 3) contexto y 4) el entorno matemático. Primero, se presentan las tareas tal como aparecen en el libro de texto, posteriormente se presenta la variación hecha y la mixtura de las tareas.

El papel del profesor

Dado que se propone que la actividad gire en torno a la argumentación de los estudiantes, el profesor debe generar espacios de discusión y gestionar, de acuerdo con la postura epistemológica que asuma sobre esta competencia, la manera como será usada para validar las ideas que construyen los estudiantes, tratando siempre de indagar sobre las garantías que usan (Ríos-Cuesta, 2022b) desde la propuesta de análisis estructural de los argumentos planteada por Stephen Toulmin. En consecuencia, nos alineamos con el diseño instruccional sugerido por Sepúlveda y Santos-Trigo (2006):

1) Actividad previa: el profesor da al grupo una breve introducción a la tarea con el propósito de ubicar a los estudiantes en contextos similares a la actividad; destacando la importancia que representa su participación en el desarrollo de la sesión.
2) Trabajo en equipos: se organiza al grupo en equipos de tres, procurando que en cada uno haya estudiantes con distintos niveles de desempeño, que tengan la posibilidad de interactuar entre ellos y los demás equipos, así como de expresar y comunicar sus ideas. Al concluir el periodo asignado al trabajo por equipos, cada uno entrega su reporte de solución.
3) Presentaciones: cada equipo presenta a toda la clase su solución a la tarea, permitiendo que los demás estudiantes pregunten libremente a quienes exponen.

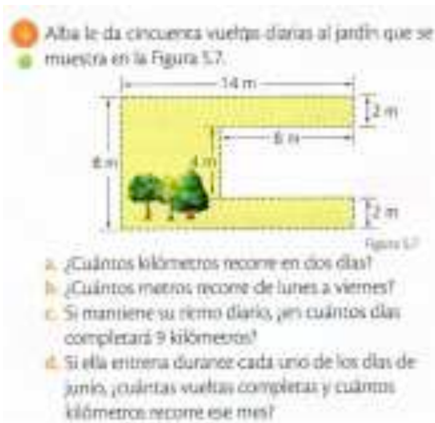
4) Discusión colectiva: el profesor promueve la discusión colectiva entre los estudiantes, con el propósito de analizar ventajas y desventajas de los diferentes métodos de solución presentados y, cuando sea necesario, realiza una sistematización de las ideas e identifica posibles extensiones del problema.
5) Trabajo individual: enseguida, a partir de la discusión colectiva, los estudiantes tienen la posibilidad de volver a la actividad y abordarla individualmente, aplicando los nuevos entendimientos que se generaron como producto de la interacción. (Sepúlveda & Santos-Trigo, 2006, p. 1394)

Resultados

Los problemas abordados en los textos: perímetro (Figura 2) y área (Figura 3) se presentan a continuación:

Figura 2

Problema sobre perímetro



Nota. Fuente: Ministerio de Educación Nacional, 2017b, p. 161.

Figura 3

Problema sobre área

Nota. Fuente: Ministerio de Educación Nacional, 2017b, p. 163.

Información: en la primera tarea se entrega la longitud de los lados del jardín. En la segunda tarea se entregan las longitudes del terreno, su forma y el área de cada árbol.

Requerimiento: calcular el perímetro, expresar el resultado en kilómetros, calcular el tiempo que toma recorrer una medida determinada. Calcular la cantidad de árboles que caben en el espacio determinado.

Contexto: extramatemático.

Entorno matemático: perímetro, conversión de unidades, área, división de números naturales.

La modificación de estas dos tareas, por variación, queda de la siguiente manera:

- Problema: La Familia Reyes tiene un terreno que desean dedicar al cultivo de café. Con el objetivo mirar la viabilidad de su idea, miden las dimensiones del terreno rectangular, y encuentran que mide 42 m de ancho y 50 m de largo. Necesitan estimar:

a. El terreno se va a cercar usando alambre para evitar que las personas lo invadan, se van a poner cuatro líneas paralelas ¿cuántos metros de alambre se necesitan para hacer el cerco? ¿Cómo puede representarse matemáticamente la expresión que permite calcular la cantidad de alambre requerido?

b. Si el metro de alambre cuesta $25, ¿cuánto cuesta todo el alambre que necesitan? Si nos hacen un descuento del 20%, ¿Cuánto hay que pagar? ¿Cuánto nos descontaron?

c. Si nos ofrecen una segunda opción de alambre que viene en rollos de 50 m a $960, ¿qué opción le conviene más?

d. Don Pedro, un trabajador que se dedica a la construcción, va a instalar la malla en el terreno, nos dice que se debe poner estacones para sostener la malla con una distancia entre ellos de un metro, ¿cuántos estacones se necesitan?

e. Si cada estacón vale $30, ¿cuánto dinero hay que pagar por ellos?

f. Don Pedro cobra $650 por día de trabajo para instalar la cerca y dice que se demora 8 días, ¿cuánto hay que pagarle?

g. Saúl Reyes debe aplicar un fertilizante disuelto en agua, pero antes debe determinar el área de la granja. Si le dicen que debe aplicar 280 gramos de fertilizante por cada 2 m2, ¿cuántos kilogramos necesita aplicar? ¿Qué configuración geométrica permite tener un espacio dentro del terreno equivalente a 1800 m2?

h. Saúl fue a cotizar en una tienda agropecuaria y le han dicho que el bulto de fertilizante trae 21 kg, ¿cuántos bultos debe comprar?

i. Cada bulto cuesta $900, ¿Cuál es el valor que se debe pagar por los fertilizantes?
j. Las plantas de café que Saúl quiere sembrar pertenecen a la variedad Coffea arabica, ya que esta se adapta a alturas entre los 600-2000 metros sobre el nivel del mar (msnm). El vendedor le recomienda sembrar 1 árbol por m2, ¿Cuántas plantas de café puede sembrar?
k. Si cada planta de café cuesta $8, ¿Cuánto debe pagar por ellos?
l. ¿Cuál es el costo total que debe invertir la familia Reyes para llevar a cabo su idea?
m. Con la distribución de las plantas de café se puede lograr una cosecha anual de 24 kg por cada planta sembrada. Sin embargo, si aumenta la densidad de siembra en un 25%, la producción se reduce a 20 kg por planta. Si la aumenta a 50% se reduce a 17 kg por planta, y si se aumenta la densidad de siembra un 75%, su producción disminuye hasta los 13 kg por planta. Finalmente, si se duplica la cantidad de plantas, estas no son capaces de producir. Completa la siguiente tabla con los datos y haz los cálculos pertinentes.

Cantidad de plantas	Área por planta	Rendimiento por planta	Producción total

n. Ubique en un plano cartesiano los datos de la tabla, en las abscisas la cantidad de plantas y en las ordenadas la producción total. ¿Cuál es la cantidad ideal de siembra para maximizar la producción? ¿Qué puede decir sobre la relación entre el área por planta y la producción total?

- *Información*: medidas del terreno, precios del alambre, estacones, fertilizantes, mano de obra, palos de café.
- *Requerimiento*: calcular el perímetro para identificar la cantidad de alambre necesario para hacer el cerco, teniendo en cuenta que se necesita cuatro veces ese valor, y proponer una expresión matemática que permita hacer este cálculo. Determinar el precio de las dos ofertas de alambre y seleccionar la más económica, para lo cual es necesario calcular el porcentaje. Calcular el área del terreno y las dimensiones del espacio dentro del terreno para determinar el área pedida. Dividir el área del terreno entre la cantidad de fertilizante que debe usarse por metro cuadrado. Tabular el rendimiento de los palos de café de acuerdo

con su densidad, graficar estos valores y decidir sobre la cantidad óptima a sembrarse.

- *Contexto*: intramatemático y extramatemático.
- *Entorno matemático*: perímetro, área, función lineal, descomposición factorial, porcentajes, aumentos y descuentos, suma y multiplicación de números naturales, proporcionalidad directa, plano cartesiano.
- *Papel del profesor*: es importante que el profesor haga una serie de preguntas para conocer el estado actual de los conocimientos de sus estudiantes y hacer las aclaraciones al respecto para que puedan resolver la tarea que se les va a proponer, sin que esto signifique que anticipe todos los requerimientos que necesitan para hacerlo. La gestión de aula se orienta a generar espacios de discusión donde los estudiantes puedan presentar sus respuestas, con lo cual, se busca activar la argumentación. Además, debe alinearse con la propuesta de Sepúlveda y Santos-Trigo (2006).

En la modificación que se propone se resalta que el entorno matemático ha sido modificado sustancialmente para abarcar la mayor cantidad de contenidos matemáticos que hasta el momento han sido trabajados en los currículos institucionales, de acuerdo con la propuesta del Ministerio de Educación Nacional de Colombia; además, se fomenta el desarrollo de pensamiento crítico y reflexivo que potencialice la toma de decisiones informadas. También se incluyen temas como el cálculo de porcentajes, que es una situación que puede presentarse en contextos reales cuando se realizan compras o la optimización de una inversión cuando se planea desarrollar proyectos de siembra y se requiera optimizar los recursos.

De este modo, la variación de problemas es una oportunidad para enriquecer las tareas, sin que esto signifique aumentar la dificultad de esta, sino que se potencia la toma de conciencia de las acciones y del papel de la formación matemática de los individuos. Con esto, las matemáticas cobran sentido para quien aprende, pues dejan de presentarse de manera aislada y se muestra cómo cada contenido aprendido es necesario y útil para resolver situaciones de contextos similares a la realidad.

Sobre la articulación de los registros semióticos en el numeral a puede resultar el registro algebraico y/o el geométrico dependiendo de la estrategia de resolución propuesta por el estudiante, el cual puede apoyarse en un dibujo del terreno y del cerco a instalar, o realizar los cálculos del perímetro y multiplicar este valor por cuatro; además, es necesario que el estudiante generalice una expresión algebraica que le permita calcular la cantidad de alambre. En los numerales *b* y *c* se requiere el uso del registro algebraico, el cálculo de porcentajes y tomar decisiones mediante la comparación de resultados. En el numeral *d*, el estudiante se puede apoyar en el registro geométrico usando dibujos de la ubicación de los estacones y contarlos, también puede usar el registro algebraico mediante el conteo, o relacionando este valor con el perímetro. Los numerales *e* y *f* requieren del registro algebraico mediante la multiplicación de los valores obtenidos en el numeral anterior y el precio dado. El numeral *g* necesita del registro geométrico si el estudiante hace subdivisiones del terreno en áreas de 2 m^2 para luego contar cuántos kilogramos de fertilizante requiere; además, este registro le sirve para identificar la configuración geométrica del espacio pedido dentro del terreno, pero también puede utilizar el registro algebraico si realiza las operaciones entre el área total y el área que ocupa para cada 280 gramos de fertilizante. Los numerales *h* e *i* requieren del registro algebraico mediante operaciones aritméticas. El numeral *j* se puede resolver por el registro algebraico o geométrico dependiendo de la estrategia del estudiante, el cual puede realizar subdivisiones para ubicar cada planta de café y luego contarlos, o mediante operaciones aritméticas relacionando el área total con el área que ocupa para cada planta de café. Los numerales *k* y *l* se resuelven mediante el registro algebraico. El numeral *m* requiere del registro tabular, y el numeral *n* del registro gráfico que le permita identificar el comportamiento de la siembra. Esta información es útil para generar nociones sobre el concepto de función o relaciones de dependencia. A modo de resumen, en la Tabla 1 se presenta los registros semióticos usados en la tarea propuesta:

Tabla 1

Registros de representación semiótica que pueden surgir

Numeral	Registro
a	Algebraico y/o geométrico
b, c	Algebraico
d	Algebraico y/o geométrico
e, f	Algebraico
g	Algebraico y/o geométrico
h, e, i	Algebraico
j	Algebraico y/o geométrico
k, l	Algebraico
m	Tabular
n	Gráfico

Nota. Fuente: elaboración propia.

En la realización de las actividades, los numerales que permiten el uso de dos registros de representación pueden ser aprovechados por el profesor para fomentar espacios de argumentación mediante la discusión de los procedimientos realizados y de la razón por la cual decidieron usarlo. Esto no significa que los otros numerales puedan ser usados con este propósito, pues los estudiantes pueden usar diversos razonamientos para llegar a una respuesta y, dependiendo del propósito del profesor, la argumentación puede ser usada como producto, procedimiento o proceso que sirva para avanzar en la comprensión de los conceptos de área y perímetro.

DISCUSIÓN Y CONCLUSIÓN

Reconociendo la emergencia de avanzar en la comprensión de las matemáticas escolares y desarrollar pensamiento crítico y reflexivo en el aula, la argumentación se sitúa como un camino previo que facilita el desarrollo de estas competencias. Esto, aunado con la resolución de problemas en contextos cercanos a los estudiantes, les permite poner en diálogo sus conocimientos previos con lo que aprenden. De este modo, las matemáticas cobran sentido y apoyan el razonamiento del estudiante, cuyo progreso se puede observar en la medida en que se avance en el diseño de tareas que promuevan diversos modos de pensamiento (Ríos-Cuesta, 2022a). Se reconoce la importancia de la mediación del profesor para lograr avances significativos en el aprendizaje escolar, lo que requiere un cambio en las dinámicas del aula y en la forma como se validan los conocimientos alcanzados (Ríos-Cuesta & Delgado-García, 2022).

Para que lo anterior se dé, es necesario que el profesor se apoye en la argumentación de los estudiantes, que identifique sus errores y los use para generar discusiones productivas que los lleven a la toma de conciencia sobre sus razonamientos y procesos llevados a cabo para responder las preguntas. El profesor debe trabajar permanentemente con los estudiantes para tratar de que hagan explícita la garantía usada en los argumentos que emerjan y que sirven de sustento para la toma de decisiones en los enunciados que así lo requieran.

Coincidimos con Malaspina (2016) en que la creación de problemas por variación tiene una fuerte conexión con la resolución de problemas y aporta al desarrollo de pensamiento matemático e inserción en la investigación de quien los crea. Con ella se busca establecer conexiones de las matemáticas con otras disciplinas y con los diversos conceptos que construyen los estudiantes. Además, estamos de acuerdo con Malaspina y Vallejo (2019) al afirmar que crear problemas es una tarea de los profesores y no puede delegarse a expertos, en particular porque el conocimiento del entorno sociocultural y de las especificidades de sus alumnos es un factor que no se tiene en cuenta en las tareas que se promueven en los libros de texto.

La variación de problemas permite que los profesores desarrollen competencias para leer el contexto, reconocer las habilidades de sus estudiantes y sus limitaciones, además, se pone de relieve el papel de la formación matemática en el desarrollo integral de las personas, buscando que sean matemáticamente competentes para que tomen decisiones informadas y analicen de manera crítica y reflexiva la sociedad en la que viven. Se reconoce que hacer variaciones de los problemas es una oportunidad para que los profesores identifiquen los elementos constitutivos de la tarea que se plantea, y que orienten a sus estudiantes a que también los identifiquen para que puedan resolverlos (Malaspina, 2016). Con eso, tanto profesores como estudiantes pueden trabajar en el diseño de problemas como una actividad central en el desarrollo de las matemáticas, buscando plantearse buenas preguntas que lleven a la reflexión y toma de conciencia de sus acciones.

Por otro lado, el Ministerio debe actualizar los libros de texto teniendo en cuenta la falta de coherencia entre los documentos orientadores de la política educativa, los aspectos teóricos en los que se sustenta y su aterrizaje en los libros. Estos elementos generan crisis en el aula, pues los profesores confían en que las tareas que se presentan allí cumplen con los requerimientos y lineamientos curriculares, pero, tal como se presentan, es difícil que los estudiantes desarrollen las competencias que se espera que alcancen en su paso por la educación secundaria. Por ejemplo, se espera que el aprendizaje de los estudiantes esté mediado por diferentes registros de representación que favorezcan su acercamiento a las matemáticas como medio para expresar sus ideas y sustentar su punto de vista (Ministerio de Educación Nacional, 2006).

Otro aspecto que debe considerarse es que resolver problemas –como la variación propuesta– que generan una complejidad conceptual porque requieren el uso de diversos contenidos matemáticos, va a requerir un mayor tiempo y acompañamiento del profesor. Por esta razón, es necesario que los estudiantes trabajen en grupo escogidos estratégicamente para favorecer la cooperación entre pares, y luego puedan validar y consolidar los conocimientos en la discusión y presentación de ideas.

Finalmente, se resalta que abordar la mayor cantidad de registros semióticos es una forma de apoyar el aprendizaje escolar, pues se identifica la complejidad de los objetos matemáticos. Los estudiantes pueden construir fórmulas matemáticas sencillas dependiendo del nivel de abstracción que den cuenta de los procesos mentales que realizan, pueden registrar datos en tablas y graficarlos, y con ello tomar decisiones al observar el comportamiento de una variable. Con lo anterior, se espera que los profesores que usan los textos de matemáticas, en particular los del Ministerio de Educación Nacional de Colombia, puedan hacer variaciones de las tareas propuestas para la clase, teniendo en cuenta las particularidades de sus estudiantes.

AGRADECIMIENTOS

Al Ministerio de Ciencia, Tecnología e Innovación de Colombia por la beca de Excelencia Doctoral del Bicentenario otorgada al autor de este estudio.

Este trabajo ha sido realizado en el marco del Doctorado Interinstitucional en Educación de la Universidad del Valle y se deriva de la tesis Implicaciones de la interactividad en la argumentación en clase de matemáticas realizada en el periodo 2018-2023.

Un agradecimiento especial a los revisores de este capítulo, por sus comentarios y sugerencias.

REFERENCIAS

Aldana-Bermúdez, E., & López-Mesa, J. H. (2016). Matemáticas para la diversidad: un estudio histórico, epistemológico, didáctico y cognitivo sobre perímetro y área. *Revista de Investigación, Desarrollo e Innovación, 7*(1), 77–92. https://doi.org/10.19053/20278306.v7.n1.2016.5602

Alguacil de Nicolás, M., Boqué, M. C., & Pañellas, M. M. (2016). Dificultades en conceptos matemáticos básicos de los estudiantes para maestro. International Journal of Developmental and Educational Psychology. *Revista INFAD de Psicología, 1*(1), 419–429. https://doi.org/10.17060/ijodaep.2016.n1.v1.162

Berger, M. (2009). Mathematical Activity with a Computer Algebra System: A Semiotic Perspective. *African Journal of Research in Mathematics, Science and Technology Education, 13*(2), 30–43. https://doi.org/10.1080/10288457.2009.10740655

Bonotto, C. (2013). Artifacts as sources for problem-posing activities. *Educational Studies in Mathematics, 83*(1), 37–55. https://doi.org/10.1007/s10649-012-9441-7

Capone, R., Adesso, M. G., del Regno, F., Lombardi, L., & Tortoriello, F. S. (2021). Mathematical competencies: a case study on semiotic systems and argumentation in an Italian High School. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 52*(6), 896–911. https://doi.org/10.1080/0020739X.2020.1726517

Daher, W. M. (2014). Manipulatives and problem situations as escalators for students' geometric understanding: a semiotic analysis. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 45*(3), 417–427. https://doi.org/10.1080/0020739X.2013.837527

D'Amore, B., Fandiño-Pinilla, M. I., Iori, M., & Matteuzzi, M. (2015). Antecedentes ilustres de la paradoja cognitiva de Duval. En B. D'Amore & M. I. Fandiño-Pinilla (Eds.), *Didáctica de la matemática: Una mirada internacional, empírica y teórica* (pp. 133–158). Universidad de La Sabana. https://bit.ly/3FFP70M

Díez-Palomar, J., & Olivé, J. C. (2015). Using dialogic talk to teach mathematics: the case of interactive groups. *ZDM, 47*(7), 1299–1312. https://doi.org/10.1007/s11858-015-0728-x

Douek, N. (1999). Some remarks about argumentation and mathematical proof and their educational implications. En I. Schwank (Ed.), *European Research in Mathematics Education* (Vol. 1, pp. 125–139). Forschungsinstitut für Mathematikdidaktik. https://bit.ly/3SmeVGO

Duval, R. (2004). *Semiosis y pensamiento humano: Registros semióticos y aprendizajes intelectuales* (M. Vega, Trad.). Universidad del Valle.

Duval, R. (2006). A Cognitive Analysis of Problems of Comprehension in a Learning of Mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 61*(1–2), 103–131. https://doi.org/10.1007/s10649-006-0400-z

Fiallo, J., & Gutiérrez, A. (2017). Analysis of the cognitive unity or rupture between conjecture and proof when learning to prove on a grade 10 trigonometry course. *Educational Studies in Mathematics, 96*(2), 145–167. https://doi.org/10.1007/s10649-017-9755-6

Goizueta, M. (2015). *Aspectos epistemológicos de la argumentación en el aula de matemáticas* [Tesis Doctoral, Universidad Autónoma de Barcelona]. Repositorio TDX. https://bit.ly/45YoO0i

Jäder, J., Lithner, J., & Sidenvall, J. (2020). Mathematical problem solving in textbooks from twelve countries. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 51*(7), 1120–1136. https://doi.org/10.1080/0020739X.2019.1656826

Liljedahl, P. (2008). *The AHA! experience: Mathematical contexts, pedagogical implications.* VDM Verlag.

Malaspina, U. (2006). Problemas: oportunidades de aprendizaje para alumnos y profesores. En G. Martínez (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* (pp. 688–694). Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A. C. https://bit.ly/3FAWV3M

Malaspina, U. (2013). La creación de problemas de matemáticas en la formación de profesores. En Sociedad de Educación Matemática Uruguaya (Ed.), *Actas del VII Congreso Iberoamericano de Educación Matemática* (pp. 117–128). Sociedad de Educación Matemática Uruguaya. https://bit.ly/3sd40Eu

Malaspina, U. (2016). Creación de problemas: sus potencialidades en la enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas. *Cuadernos de Investigación y Formación En Educación Matemática, 11*(15), 321–331. https://bit.ly/3sd42fA

Malaspina, U., & Vallejo, E. (2019). Creación de problemas en la docencia e investigación. In U. Malaspina (Ed.), *Reflexiones y propuestas en Educación Matemática* (pp. 7–54). Moshera S.R.L.-PUCP. https://bit.ly/45O9Ee9

Manotas, M., & Rojas, C. J. (2008). Conceptualización acerca del perímetro, área y volumen en tres alumnos universitarios. *Zona Próxima, 9*, 60–69. https://doi.org/10.14482/zp.09.380.56

Mántica, A. M., del Maso, M. S., Götte, M., & Marzioni, A. (2002). La confusión entre área y perímetro. Análisis de una propuesta áulica. *Educación Matemática, 14*(1), 111–119. https://doi.org/10.24844/EM1401.07

Martí, E. y Pozo, J. I. (2000). Más allá de las representaciones mentales: la adquisición de los sistemas externos de representación. *Infancia y Aprendizaje, 23*(90), 11–30. https://doi.org/10.1174/021037000760087946

Martínez-Artero, R. N., & Nortes, A. (2013). Perímetro y área. Un problema en futuros maestros. *Números, 84*, 65–85. https://bit.ly/3QCXfoL

Ministerio de Educación Nacional. (1998). *Lineamientos curriculares: matemáticas*. Magisterio.

Ministerio de Educación Nacional. (2006). *Estándares Básicos de Competencias*. Ministerio de Educación Nacional.

Ministerio de Educación Nacional. (2016). *Derechos básicos de aprendizaje: matemáticas* (Vol. 2). Panamericana Formas e Impresos S.A.

Ministerio de Educación Nacional. (2017a). *Mallas de aprendizaje: matemáticas.* Ministerio de Educación Nacional.

Ministerio de Educación Nacional. (2017b). *Vamos a aprender Matemáticas: Libro del estudiante*. Ediciones SM.

Molina, O., Font, V., & Pino-Fan, L. (2019). Estructura y dinámica de argumentos analógicos, abductivos y deductivos: un curso de geometría del espacio como contexto de reflexión. *Enseñanza de las Ciencias, 37*(1), 93–116. https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.2484

Perelman, C., & Olbrechts-Tyteca, L. (2006). *Tratado de la argumentación: La nueva retórica.* Editorial Gredos.

Resnick, L., & Glaser, R. (1976). Problem solving and intelligence. En L. Resnick (Ed.), *The nature of intelligence* (pp. 230–295). Lawrence Erlbaum Associates.

Ríos-Cuesta, W. (2020). Competencias de argumentación y modelización en estudiantes de secundaria: la necesidad de un cambio de paradigma en la Educación Matemática del Chocó, Colombia. *Pesquisa e Ensino, 1,* e202020. https://doi.org/10.37853/pqe.e202020

Ríos-Cuesta, W. (2021a). Dificultades para argumentar el uso de registros semióticos en problemas de variación cuadrática. *Mendive. Revista de Educación, 19*(2), 446–457.https://bit.ly/49dUOQV

Ríos-Cuesta, W. (2021b). Aplicación de las representaciones gráficas y la visualización a la resolución de problemas con fracciones: una transición hacia el algoritmo. *Revista Virtual Universidad Católica del Norte, 63,* 196–222. https://doi.org/10.35575/rvucn.n63a8

Ríos-Cuesta, W. (2022a). Garantías de los argumentos en clase de matemáticas mediados por el uso de software vs lápiz y papel. En N. Sgreccia (Comp.), *Memorias de las Segundas Jornadas de Práctica Profesional Docente en Profesorados Universitarios en Matemática* (pp. 249–262). Editorial Asociación de Profesores de la Facultad de Ciencias Exactas e Ingeniería de la Universidad Nacional de Rosario. https://bit.ly/3QkIRQF

Ríos-Cuesta, W. (2022b). Modos de comprender y pensar de estudiantes de secundaria en la discusión de tareas matemáticas. En A. Rosas (Ed.), *Avances en Matemática Educativa. El alumno desde la teoría* (pp. 47–61). Editorial Lectorum. https://bit.ly/40kkQxJ

Ríos-Cuesta, W., & Delgado-García, C. A. (2022). Efecto mediador de la interactividad en la argumentación: un giro en las normas sociomatemáticas. En A. Rosas (Ed.), *Avances en Matemática Educativa. El profesor factor importante en el aula* (pp. 1–17). Editorial Lectorum. https://bit.ly/47cVgNC

Sepúlveda, A., Medina, C., & Sepúlveda, D. I. (2009). La resolución de problemas y el uso de tareas en la enseñanza de las matemáticas. *Educación Matemática, 21*(2), 79–115. https://bit.ly/46Q4Ndr

Sepúlveda, A. y Santos-Trigo, L. M. (2006). Desarrollo de episodios de comprensión matemática: estudiantes de bachillerato en procesos de resolución de problemas. *Revista Mexicana de Investigación Educativa, 11*(31), 1389–1422. https://bit.ly/46ReFnv

Smith, M. S., & Stein, M. K. (1998). Selecting and creating mathematical tasks: From Research to Practice. *Mathematics Teaching in the Middle School, 3*(1), 344–350. https://bit.ly/3tSaYPU

Stake, R. E. (2010). *Qualitative Research: Studying How Things Work*. Guilford Press.

Stein, M., Remillard, J. T., & Smith, M. (2007). How curriculum influences student learning. En F. K. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning: a project of the National Council of Teachers of Mathematics* (pp. 319–369). Information Age Publishing.

Urhan, S., & Zengin, Y. (2023). Investigating University Students' Argumentations and Proofs Using Dynamic Mathematics Software in Collaborative Learning, Debate, and Self-reflection Stages. *International Journal of Research in Undergraduate Mathematics Education.* https://doi.org/10.1007/s40753-022-00207-7

Van Eemeren, F. H. (2018). *Argumentation Theory: A Pragma-Dialectical Perspective* (Vol. 33). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-95381-6

Zamudio, B. (2012). Soportes de la argumentación. Lógica, dialéctica y retórica. Rihumso: *Revista de Investigación del Departamento de Humanidades y Ciencias Sociales, 1*(1), 1–9. https://bit.ly/49hZJAs

Zhao, G., Zhao, R., Li, X., Duan, Y. y Long, T. (2021). Are preservice science teachers (PSTs) prepared for teaching argumentation? Evidence from a university teacher preparation program in China. *Research in Science & Technological Education, 41*(1), 1–20. https://doi.org/10.1080/02635143.2021.1872518