

Modelización matemática y tecnologías digitales en las trayectorias de formación de docentes de educación secundaria

Mónica E. Villarreal

Consejo Nacional de
Investigaciones Científicas
y Técnicas

Grupo de Enseñanza de la Ciencia y la
Tecnología (GECyT)
Facultad de Matemática, Astronomía,
Física y Computación
Universidad Nacional de Córdoba

CONICET



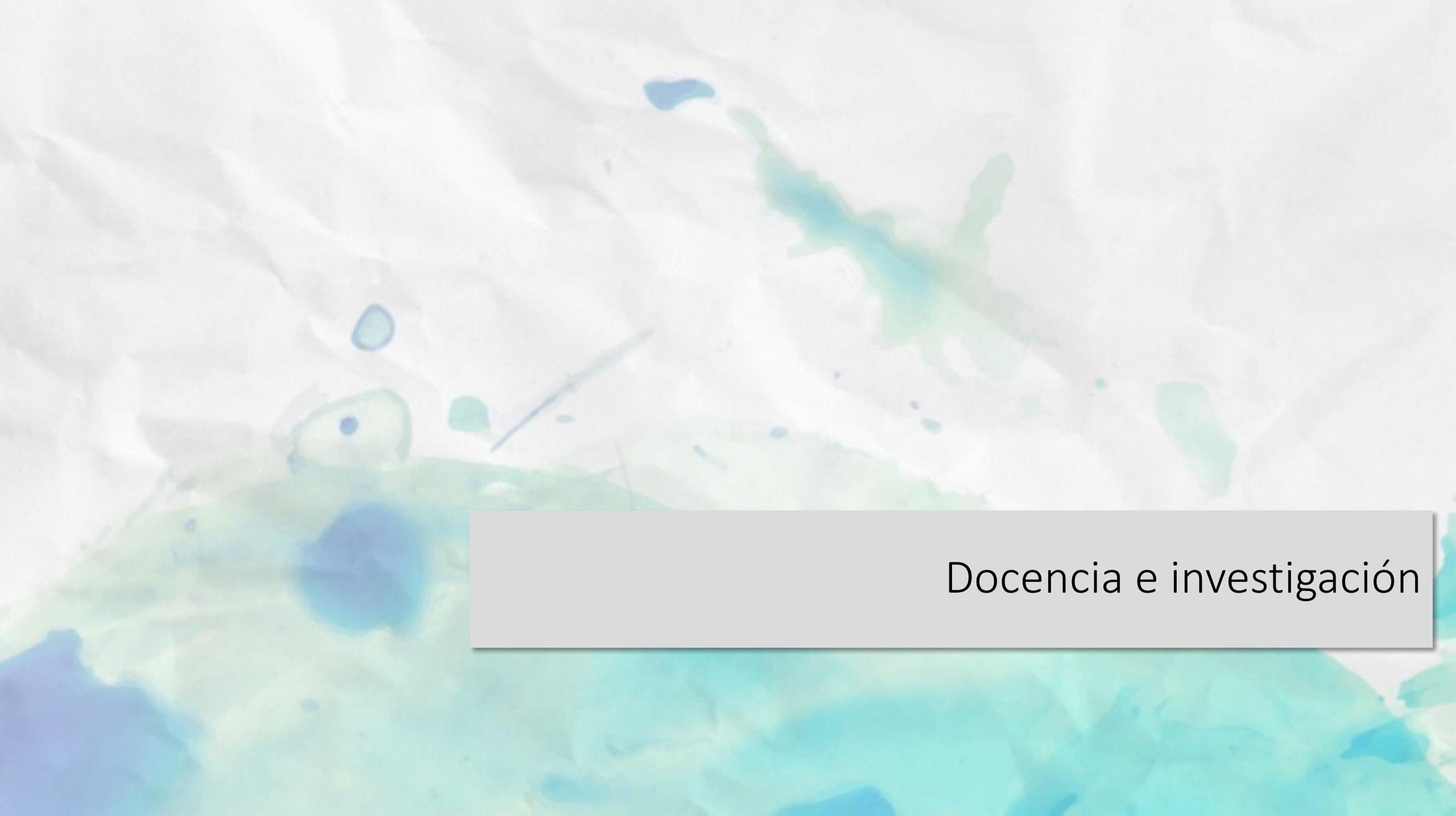
UNC

FAMAF

ARGENTINA

Recorrido de la conferencia

- ✓ Docencia e investigación
- ✓ Acerca de la modelización matemática
- ✓ Acerca de las tecnologías
- ✓ Modelización y tecnologías en el curriculum y en la formación docente
- ✓ Escenarios de modelización matemática en la formación de futuros/as profesores/as
 - ✓ Experiencias de modelización matemática abierta
- ✓ Reflexiones finales



Docencia e investigación

Docencia

Formación de futuros/as profesores/as de matemática

- Profesorado en Matemática tiene una duración de 4 años



Didáctica especial y taller de matemática



- 66% cursos de matemática, 34% cursos didáctico-pedagógicos



Metodología y Práctica de la Enseñanza

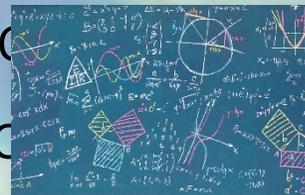
Investigación

Futuros/as profesores/as de matemática...

... que realizan actividades de modelización matemática

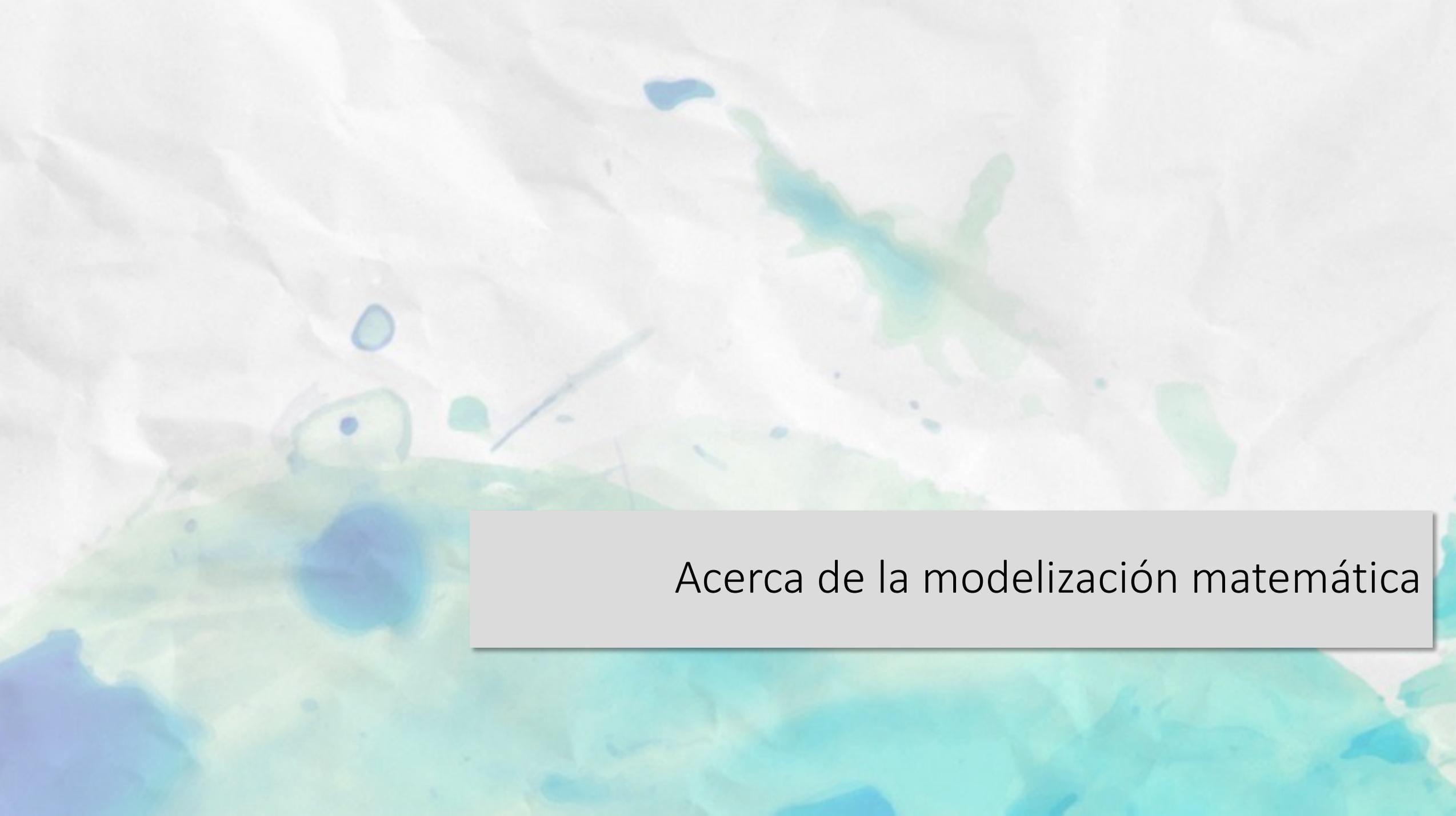


... que implementan actividades de modelización en la escuela

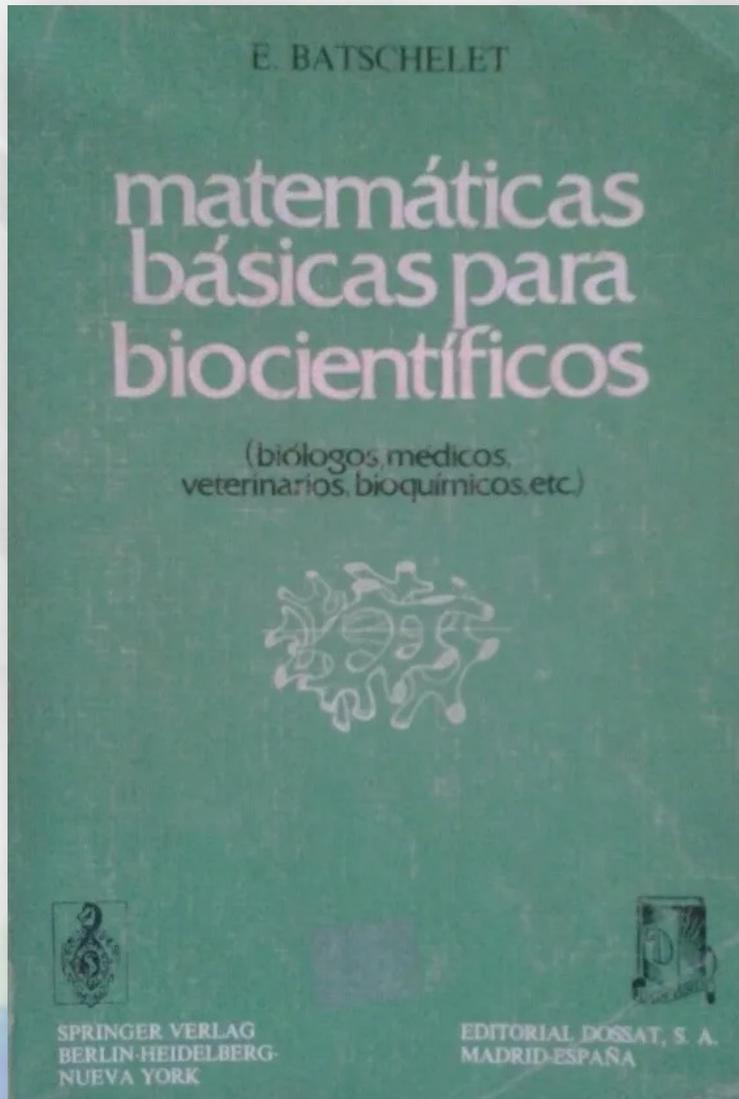


Comunidades de Investigación en Matemáticas

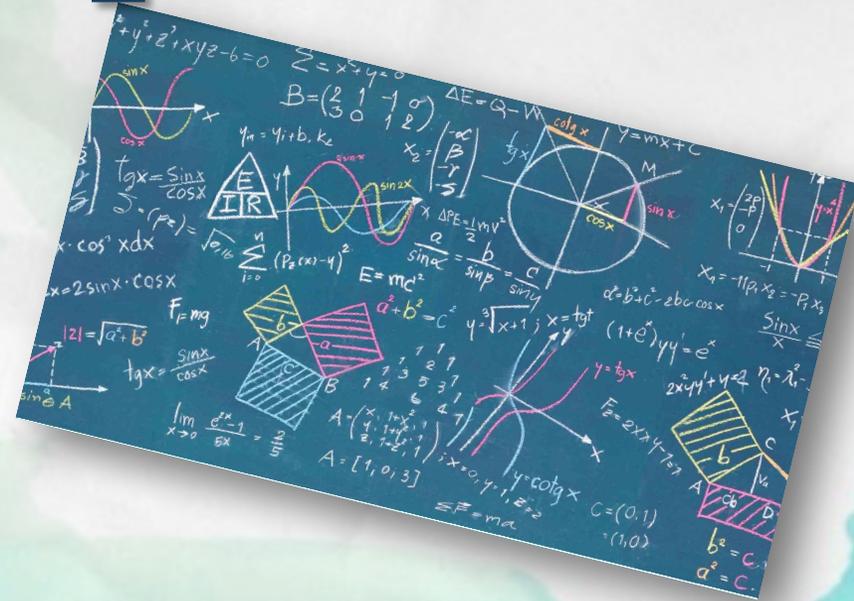




Acerca de la modelización matemática



Aplicación



Soltamos 1000 moscas en una isla en la que no había ninguna. La ley de crecimiento diario (t en días) seguida por la población, está dada por la siguiente función, donde N es el número de moscas

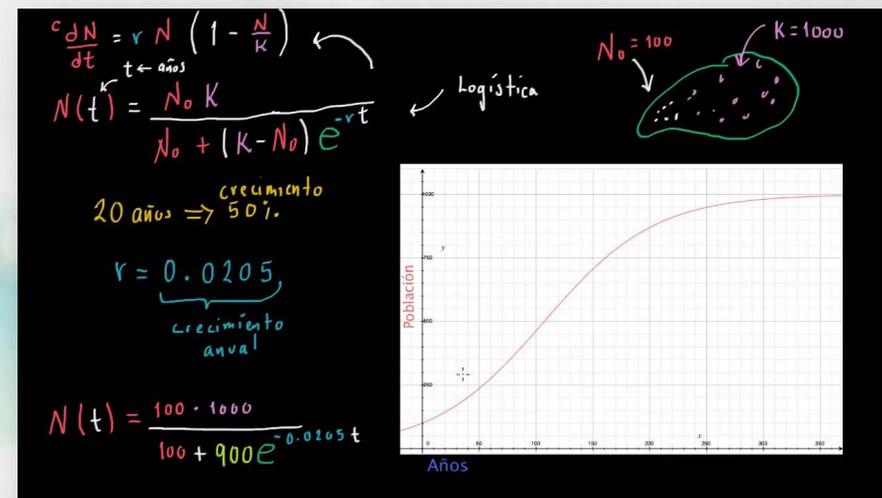
$$N = \frac{600000}{1 + 599. e^{-0.02t}}$$

llamada función logística de crecimiento

a) Complete la siguiente tabla

t (tiempo en días)	0	100	200	300	400	500
N (moscas)						

- b) Grafique en los ejes coordenados los puntos obtenidos en la tabla anterior representando el tiempo t en el eje x y el número de moscas en el eje y .
- c) Resuelva la ecuación $N = 600000$
- d) Teniendo en cuenta los incisos anteriores indique cuáles son los posibles valores que pueden tomar las variables t (tiempo) y N (número de moscas).
- e) ¿En cuántos días la población alcanzará el número de 100000?



Aplicación

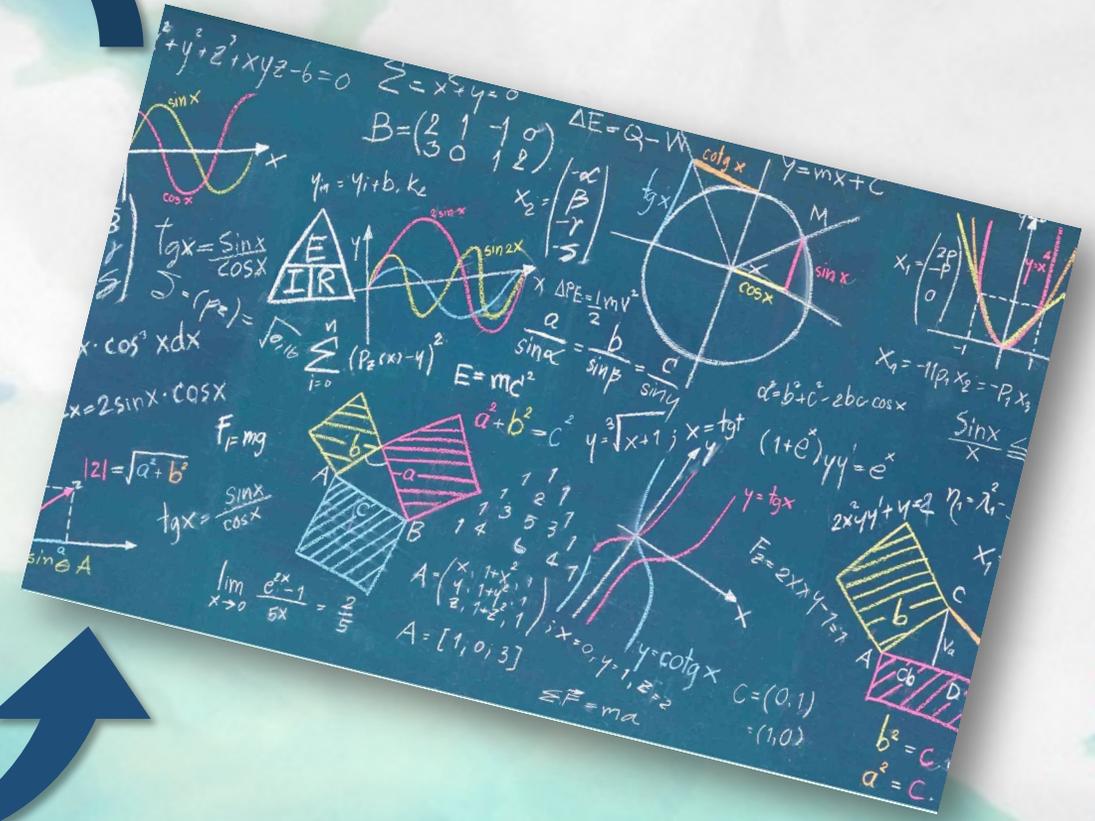


- ✓ **Semi-realidad** inventada (Skovsmose, 2001)
- ✓ **Aplicación ilustrativa** (Muller & Burkhardt, 2007)
- ✓ **Modelo** ya construido para poner en juego conocimiento matemático ya disponible

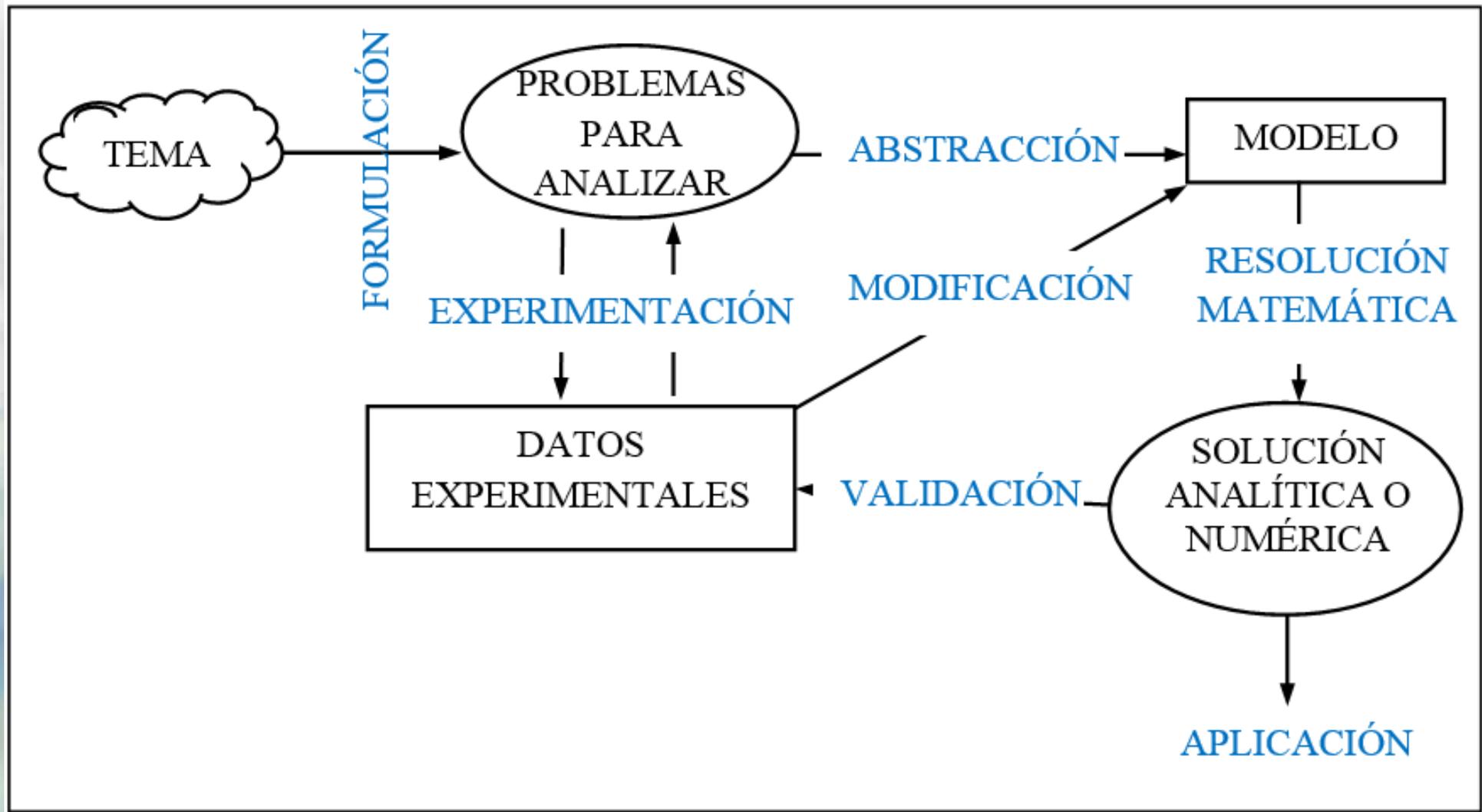


¿Cómo ese modelo fue creado? ¿Qué problema le dio origen? ¿Quién lo creó?
¿Para qué fin? ¿Representa adecuadamente la situación?

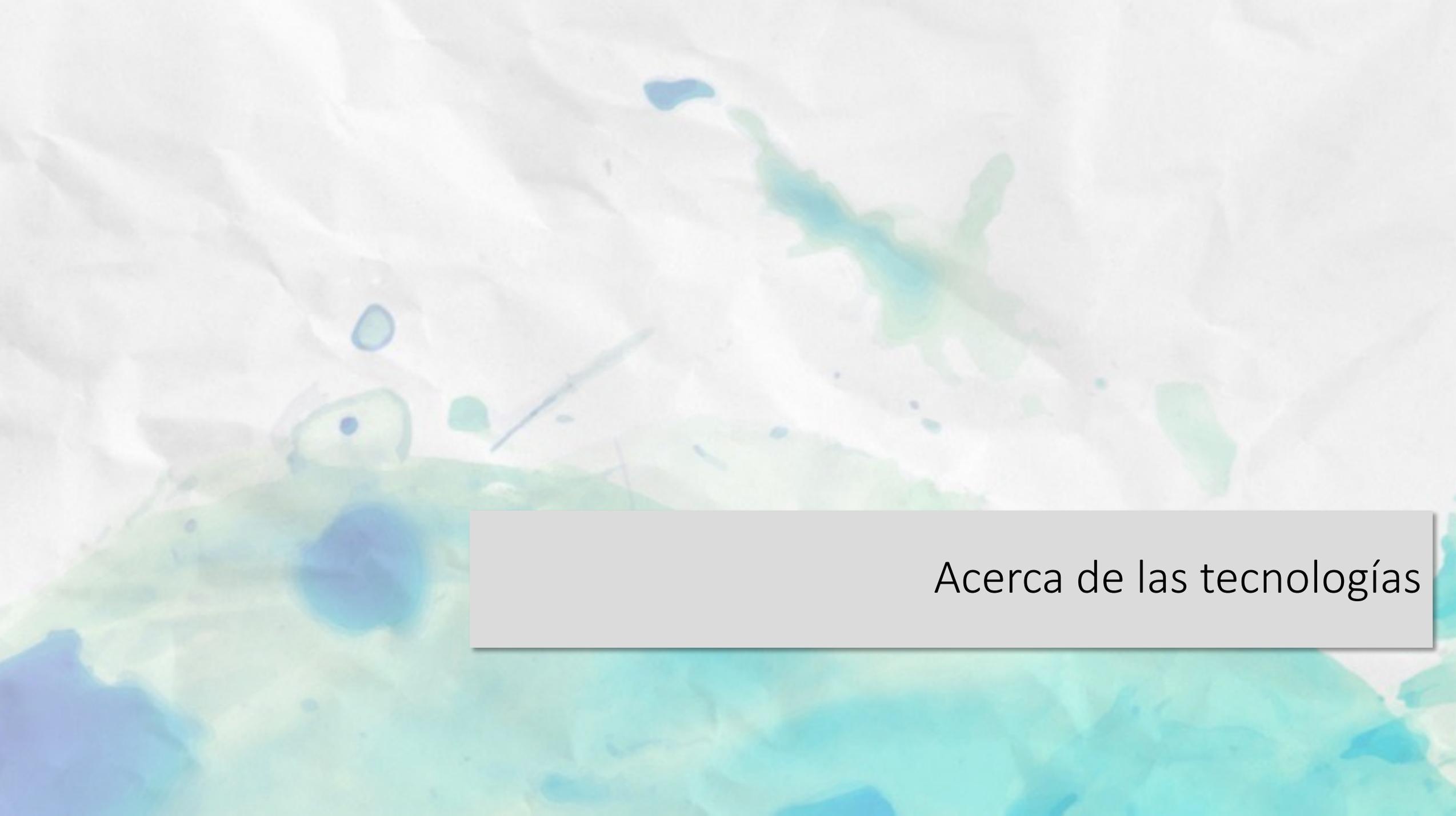
Aplicación



Modelización



Rodney Bassanezi



Acercas de las tecnologías

Principios “irrenunciables”

- El acceso a las tecnologías digitales como un derecho del ciudadano.
- La necesidad de una “alfabetización tecnológica” en las escuelas, integrando las tecnologías en actividades esenciales.
- La producción de conocimiento se ve condicionada por los medios utilizados. Tales medios definen las prácticas, los contenidos y las formas de conocer.



El constructo epistemológico
humanos-con-medios

Humanos-con-medios



La cognición no es una empresa individual sino social



La cognición incluye medios con los cuales se produce el conocimiento



Los medios son elementos constitutivos del conocimiento

Humans-with-Media and the Reorganization of Mathematical Thinking

Information and Communication
Technologies, Modeling,
Experimentation and Visualization

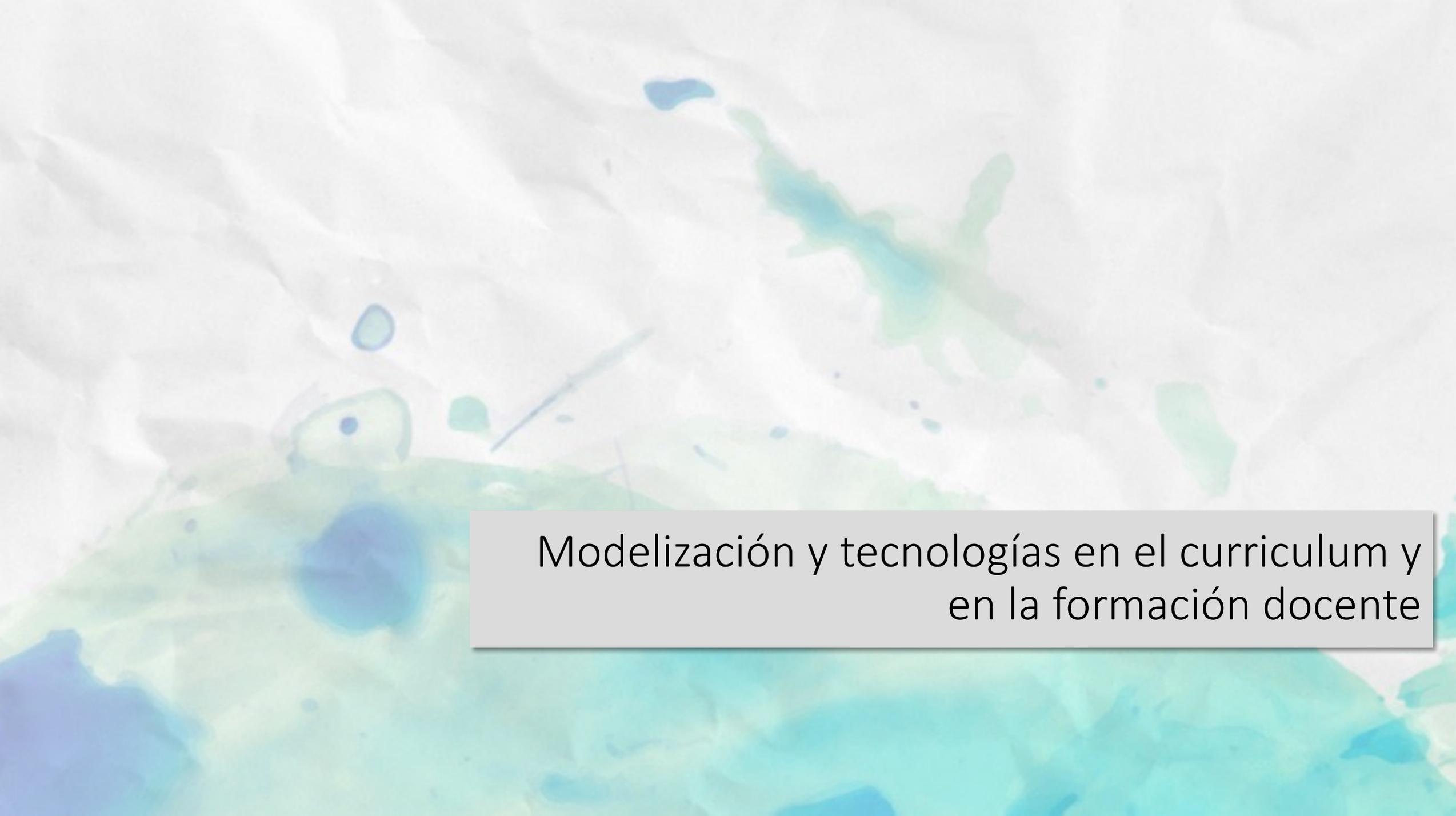
Marcelo C. Borba and Mónica E. Villarreal



Mathematics
Education
Library

Springer

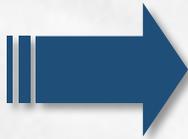
2005



Modelización y tecnologías en el curriculum y
en la formación docente

Curriculum para la
educación secundaria
(2011)

Estándares nacionales para
la formación de
profesores/as

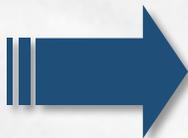


... recomiendan la introducción de
aplicaciones y modelización para la
enseñanza de la matemática

... también recomiendan el uso de
las tecnologías en la enseñanza y
el aprendizaje de la matemática

Curriculum para la educación secundaria (2011)

Estándares nacionales para la formación de profesores/as

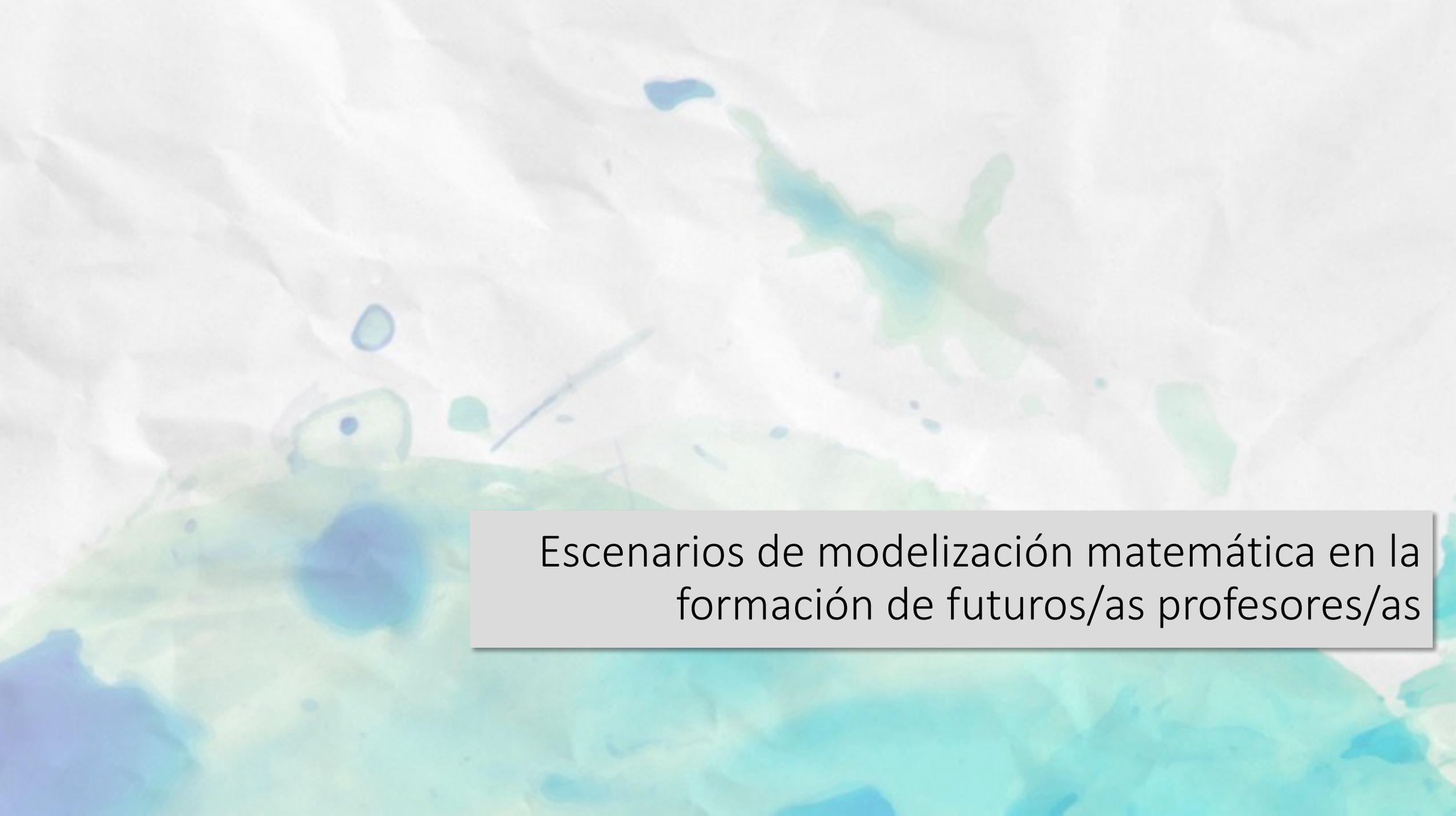


Desafíos para la formación inicial y continua de docentes

Mientras tanto...



nuestro programa universitario se caracteriza por una fuerte presencia de matemática pura sin aplicaciones a problemas del mundo real, un escaso uso de tecnologías y pocos espacios curriculares donde se estudien situaciones no matemáticas.



Escenarios de modelización matemática en la
formación de futuros/as profesores/as

Desde 2010

□ Curso de Didáctica Especial y Taller de Matemática.

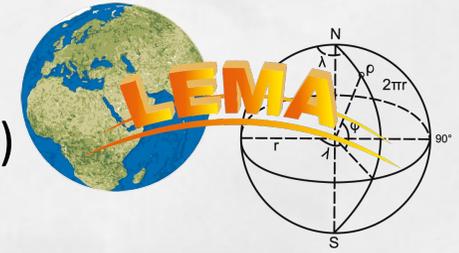
- Tercer año del Profesorado en Matemática
- Anual. 30 semanas
- Dos clases de 4 horas por semana
- Distintas tendencias en educación matemática son estudiadas: resolución de problemas, educación matemática crítica, uso de tecnologías en la educación matemática, **modelización matemática...**



- Modelo
- Modelo matemático
- Resolución de diversas tareas de modelización (o no)...

Tarea: Festival de música

Learning and Education in and through
Modeling and Applications (2006 -2009)

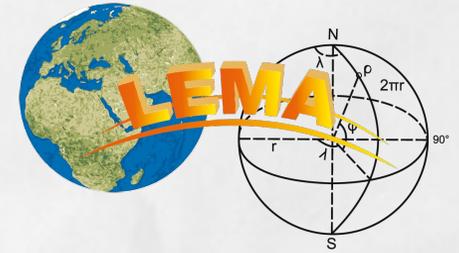


El Festival de Artes Escénicas Contemporáneas de Glastonbury es el mayor festival al aire libre de música y artes escénicas del mundo. En 2005, el área vallada del festival tenía más de $3,6 \text{ km}^2$ (900 acres), y hubo más de 385 actuaciones en directo. Muchos de los asistentes al festival llevan sus propias tiendas de campaña y duermen dentro de la zona del festival.



Los organizadores necesitan limitar el número de entradas a la venta y el número de tiendas que pueden instalarse para poder garantizar la seguridad. ¿Qué les aconsejarías?

○ Criterios para determinar si una tarea es de modelización matemática



Contexto de la tarea

- Real y auténtico
- Interesante para lo/as estudiantes
- Relevante para lo/as estudiantes

Conocimiento matemático implicado

- No determinado por adelantado
- No único

Implicación de múltiples conocimientos no predeterminados

Soluciones esperadas

- Multiplicidad de soluciones
- Que se relacionen con el contexto inicial

Actividad de quien resuelve la tarea

- Múltiples procedimientos de resolución
- Explorar, plantear hipótesis, buscar distintas maneras de trabajar, interpretar y validar soluciones...

Criterios propuestos por Rita Borromeo Ferri (Universidad de Kassel – Alemania)

- Significatividad de la tarea
- Contexto de la realidad basado en la experiencia
- Provocación de preguntas posteriores
- Estimulación de caminos holísticos de aprendizaje
- Nivel apropiado del lenguaje



Criterios propuestos por Katja Maass (International Centre for STEM education - Alemania)

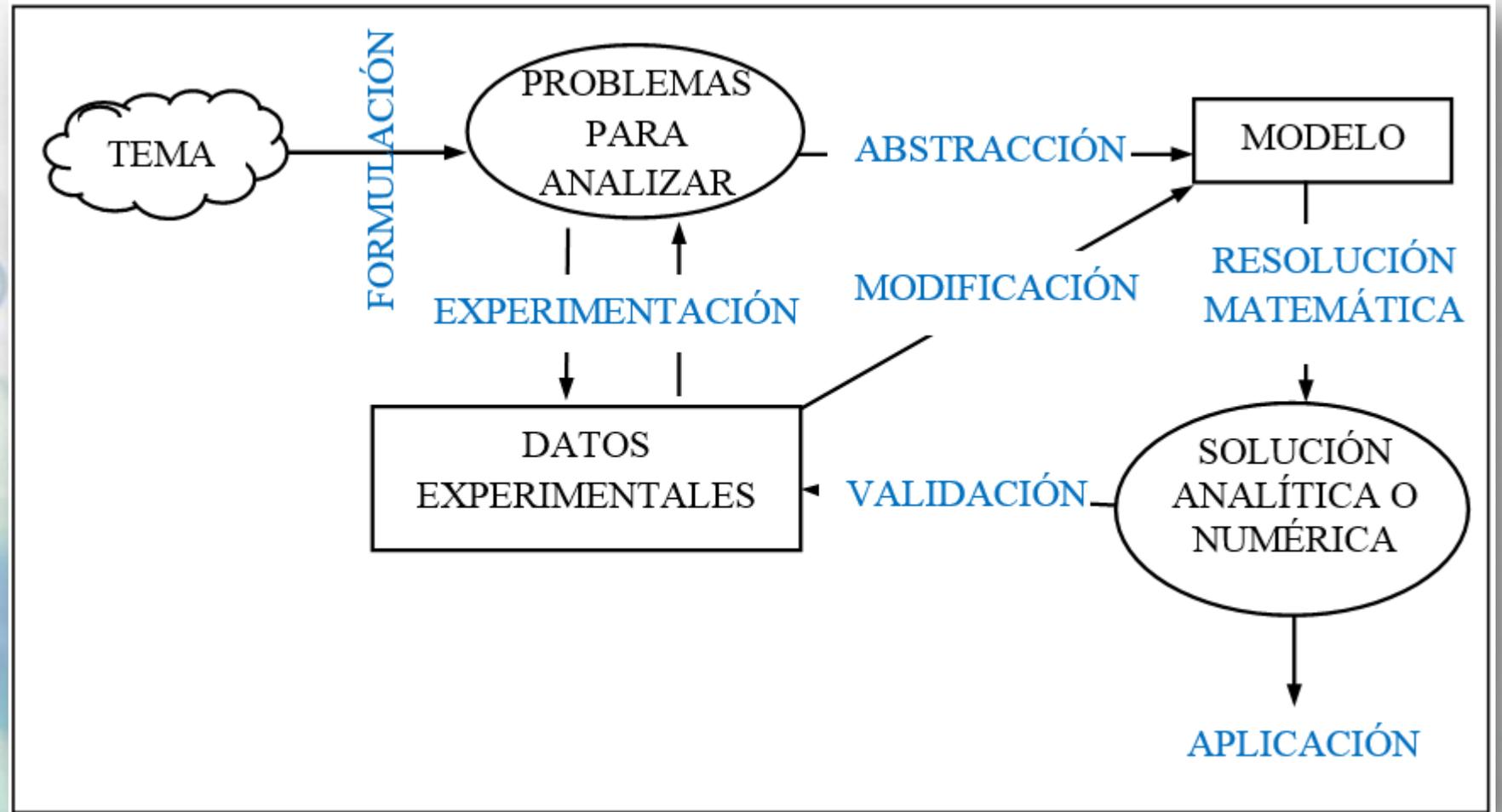
- Abierta
- Compleja
- Concreta
- Auténtica
- Resoluble por medio del proceso de modelización



○ Proceso de modelización matemática: ciclos de modelización



Rodney Bassanezi



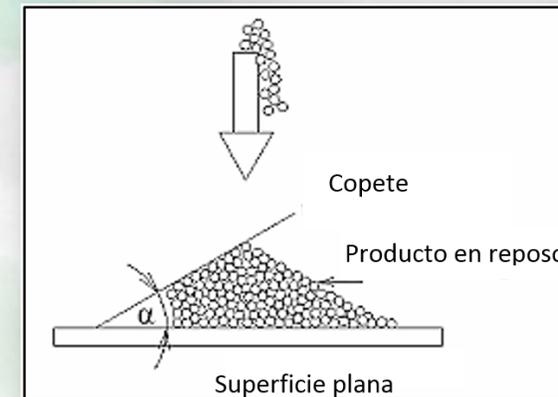
○ Resolución de tareas de modelización que implican experimentación.

Tarea del montículo de material granulado

Cuando un material granulado, como la arena o la sal, es arrojado sobre una superficie horizontal, se deposita creando un montículo, generalmente en forma de cono. Este fenómeno es observable en muchas situaciones reales, como ilustran las siguientes imágenes.



El material granulado permanece apilado y no se desliza debido a una cierta fricción entre las partículas. El ángulo de inclinación del montículo (ángulo formado entre el copete y la horizontal) se denomina ángulo de reposo y es el ángulo máximo que permite que el material granulado se mantenga sin deslizarse o resbalar (ver la figura).

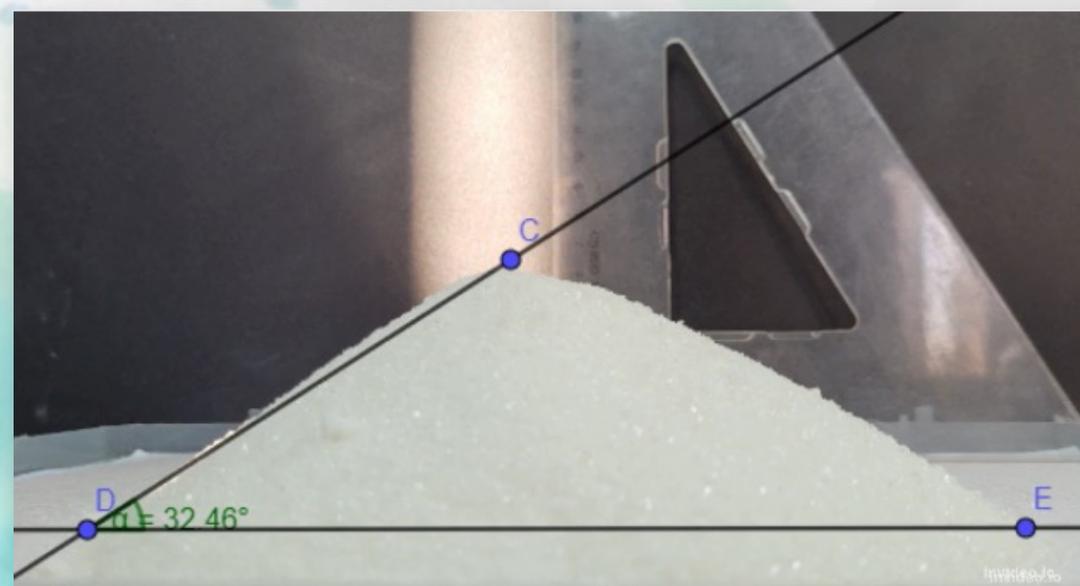
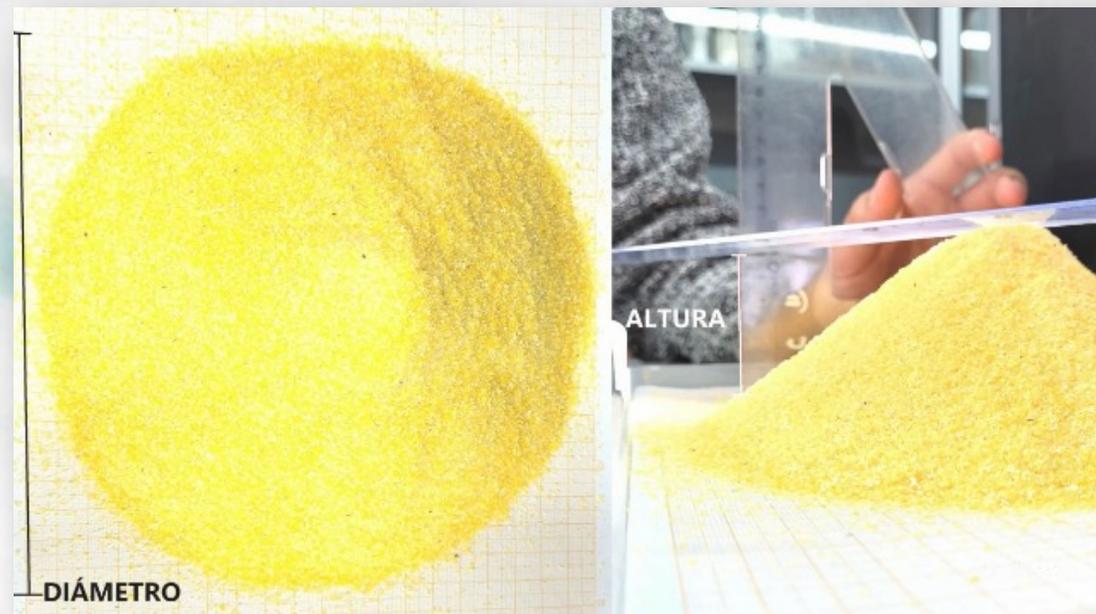
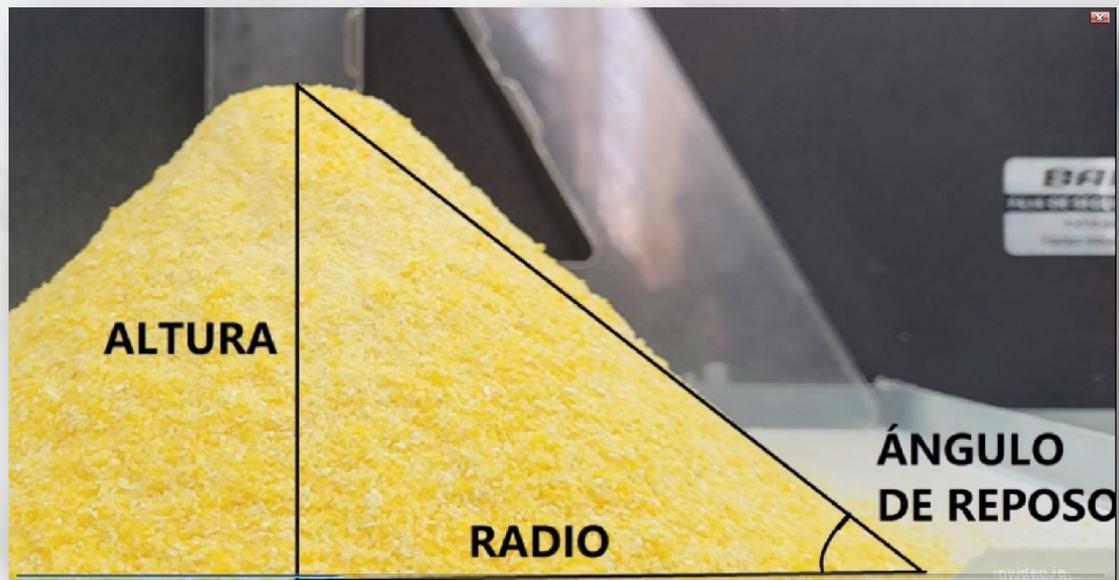


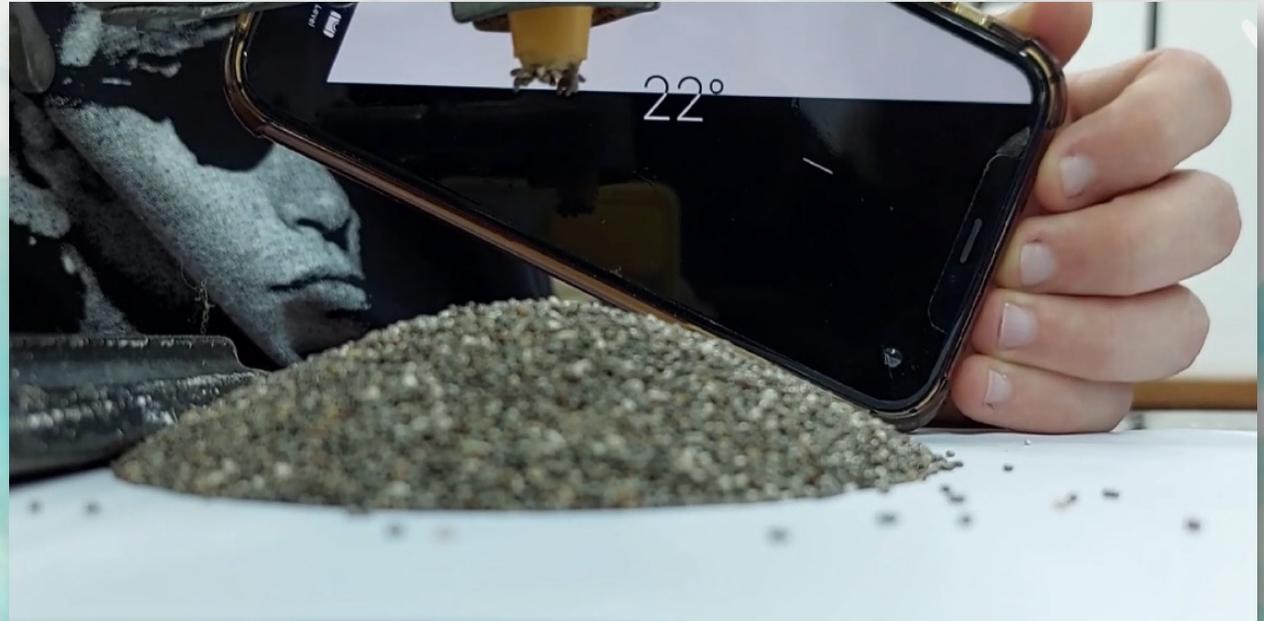
En muchos proyectos de ingeniería civil, en estudios de farmacología y también para evaluar el riesgo de avalanchas en las montañas, el conocimiento del ángulo de reposo es fundamental.

Formulen conjeturas sobre el ángulo de reposo. ¿Será este ángulo diferente dependiendo de los materiales? ¿Dependerá este ángulo de la cantidad de material que se deposite? ¿Puede este ángulo ser influenciado por el tamaño de las partículas?



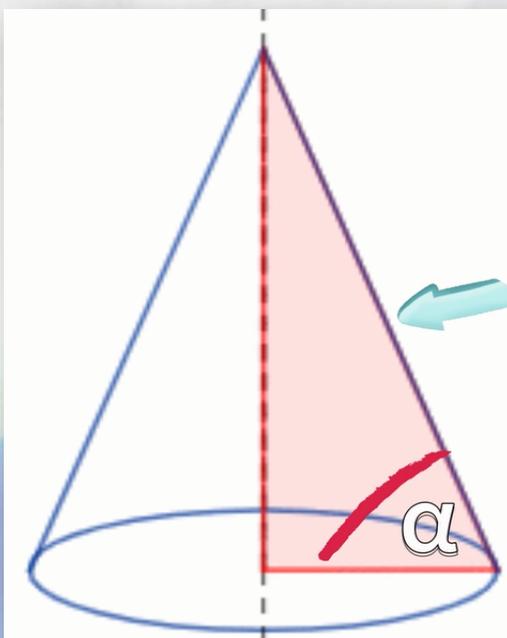
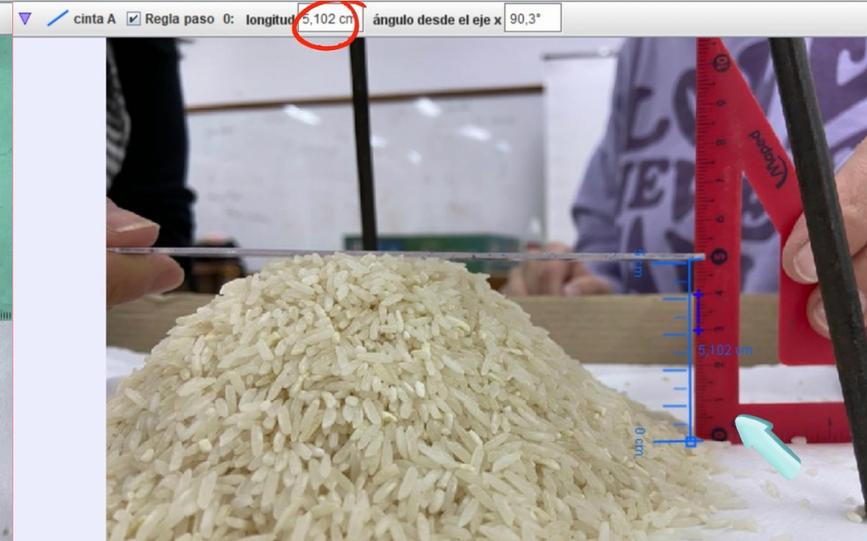
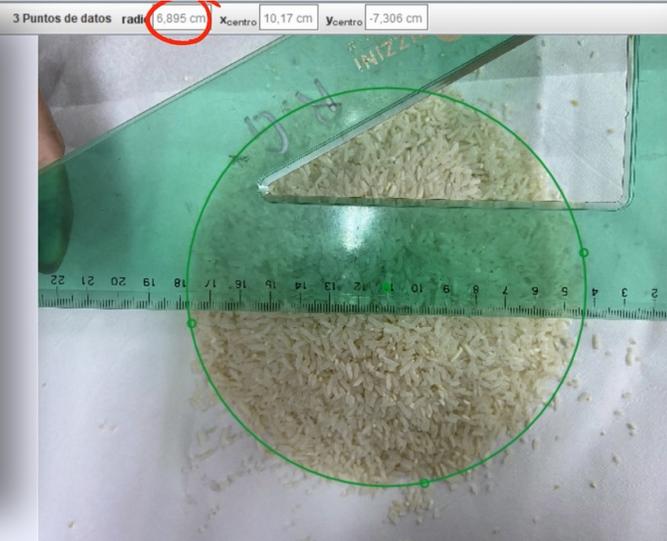
2022







- Obtenemos imágenes
- Con Tracker:
- Calibramos
- Calculamos altura y radio

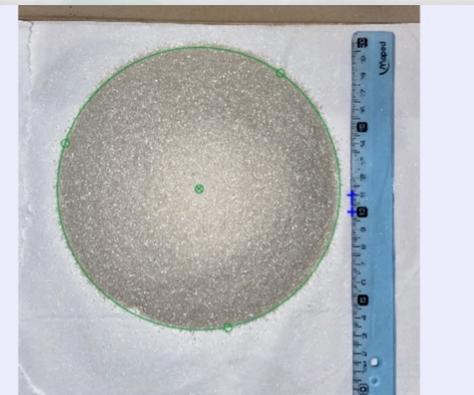


r : radio
h : altura

$$\text{tg}(\alpha) = h/r$$

$$\Rightarrow \alpha = \arctg(h/r)$$

Azúcar



$$r = 8.22 \text{ cm}$$

$$h = 4.26 \text{ cm}$$

$$\Rightarrow \alpha = 27.40^\circ$$

○ Análisis de experiencias de modelización en diferentes contextos educativos.

○ Desarrollo de proyectos de modelización abiertos utilizando libremente las tecnologías digitales.



Futuros/as profesores/as trabajando en pequeños grupos, son invitados/as a:

- elegir un tema del mundo real de su interés,
- formular problemas relacionados con el tema,
- seleccionar variables,
- levantar hipótesis,
- diseñar experimentos,
- buscar información,
- resolver problemas,
- escribir un informe y
- preparar y realizar una presentación oral y un video.

Perspectiva de modelización matemática

- ❑ Naturaleza abierta de las tareas planteadas, sin predeterminedar conocimientos matemáticos a utilizar.
- ❑ Naturaleza interdisciplinar del trabajo.
- ❑ Dominio del proceso completo de modelización considerando todas las fases del ciclo.
- ❑ Promoción de reflexiones sobre la propia matemática, los modelos creados y el papel social de la matemática y de la modelización matemática.
- ❑ Empleo de tecnologías.

Modelización-como-contenido (Julie & Mudaly, 2007)

Modelización activa (Muller & Burkhardt, 2007)

Perspectiva socio-crítica de modelización matemática (Bassanezi, D'Ambrosio, Borba, Barbosa, Araújo, etc.)

Trabajo con proyectos (Skovsmose, 2001)

Humanos-con-medios (Borba & Villarreal, 2005)



Experiencias de modelización matemática abierta
2022

TEMAS	PROBLEMAS
Contaminación COVID-19: Impacto en la huella cordobesa de desechos sanitarios	¿Qué cantidad de nuevos residuos se generaron a partir del COVID-19? ¿Cuántos residuos se generaron durante la pandemia a partir de la realización de testeos (PCR, antígenos) y la campaña de vacunación?
Comedor comunitario “En Familia y con Amor”	¿Qué incidencia tienen los aportes del estado en la alimentación saludable de las personas que asisten a este comedor?
Uso y dependencia del celular	¿Existe una relación entre el tiempo real de uso del teléfono móvil con la dependencia del mismo?
Exámenes finales en la virtualidad en FAMAFA	¿Aumentó o disminuyó la cantidad de exámenes rendidos por materia y la cantidad de exámenes aprobados por los alumnos de 1er año en todas las carreras dictadas en la FAMAFA?
Consumo de agua en la industria textil. La huella hídrica del jean azul	¿A partir de qué frecuencia de lavado reduciremos el porcentaje de consumo de agua en la fase de uso de un jean?

Formulación del problema



Tomando como referencia la Evaluación del consumo de agua durante el ciclo de vida de un jean sustentable (Levi 's), la Huella Hídrica total es de 3.772 litros:

- El porcentaje de consumo de agua en la fase de uso representa el 23 % del total que se consume a lo largo del ciclo de vida del jean.
- El 23% representa 860 litros por ciclo de vida (3 años)

Dado que aproximadamente una cuarta parte del impacto del ciclo de vida de la prenda ocurre durante la fase de uso del consumidor.

¿A partir de qué frecuencia de lavado reduciremos el porcentaje de consumo de agua en la fase de uso?

Peso jeans (P) = 800grs

Vida útil (V) = 3 años

Capacidad lavarropa, C (grs) 6500

Consumo por lavado, L (litros) 42

**Consumo por lavado 1 jeans,
L1(litros) = 800*L/C 5,17**



$$La = 365 / d$$

$$Lv = La * 3$$

$$Ca = L1 * La$$

$$Cv = Ca * 3$$

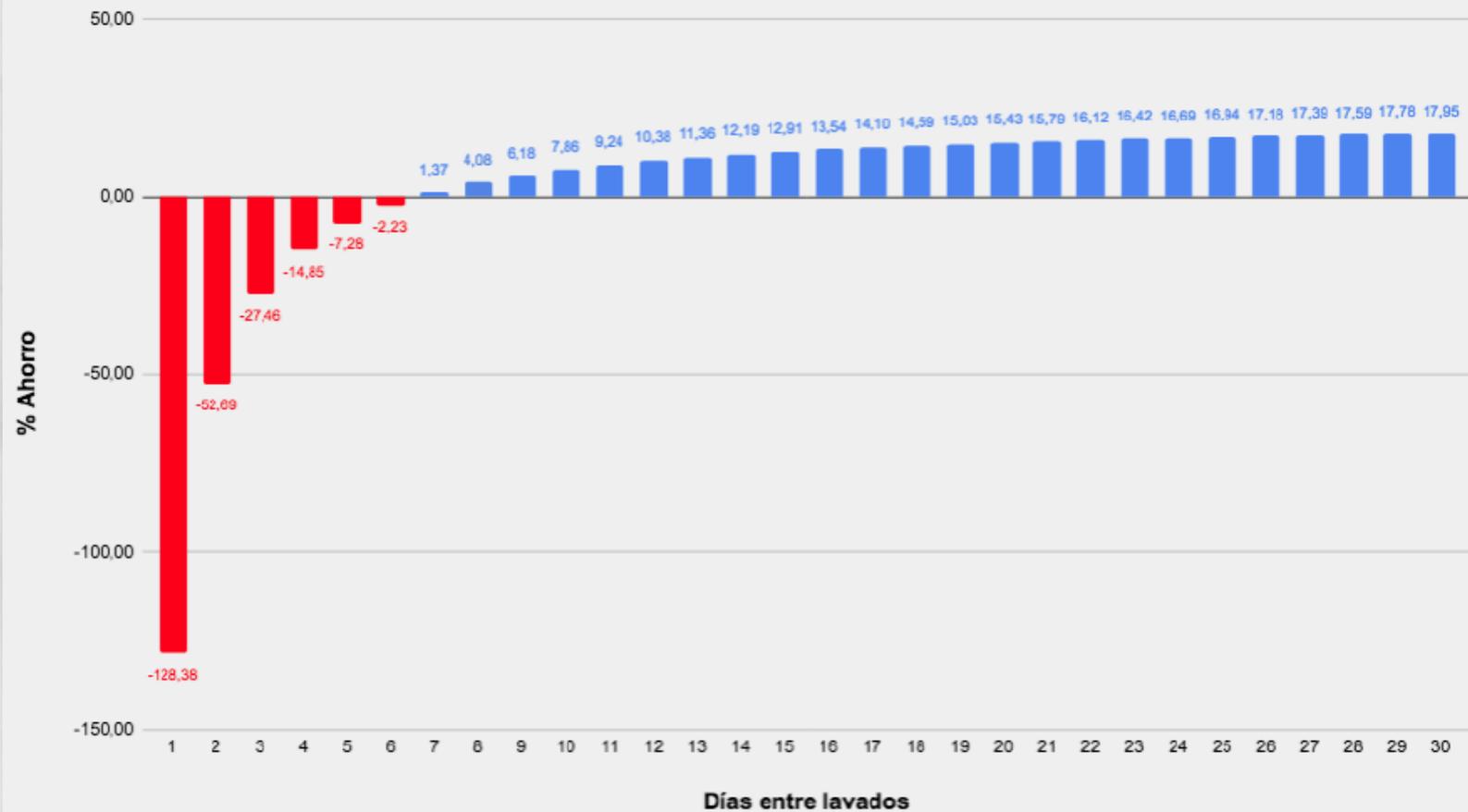
$$H = Cv * 23 / 860$$

$$A = 23 - H$$

A +++

Días entre lavados (d)	Nº lavados por año (La)	Nº lavados en vida útil (Lv)	Consumo anual (Ca)	Consumo Vida Útil (Cv)	% en Huella Hídrica (H)	% Ahorro (A)
1	365,00	1.095,00	1.886,77	5.660,31	151,38	-128,38
2	182,50	547,50	943,38	2.830,15	75,69	-52,69
3	121,67	365,00	628,92	1.886,77	50,46	-27,46
4	91,25	273,75	471,69	1.415,08	37,85	-14,85
5	73,00	219,00	377,35	1.132,06	30,28	-7,28
6	60,83	182,50	314,46	943,38	25,23	-2,23
7	52,14	156,43	269,54	808,62	21,63	1,37
8	45,63	136,88	235,85	707,54	18,92	4,08
9	40,56	121,67	209,64	628,92	16,82	6,18
10	36,50	109,50	188,68	566,03	15,14	7,86

Porcentaje de ahorro en funcion de la frecuencia de lavado (A+++)



Eficiencia del lavarropas	Valor de frecuencia buscada (días)
B	26
A +	9
A +++	7

$l = 52$
 40 130

$c = 6000$
 5000 7000

$g(x) = \text{If}\left(1 \leq x \leq 30, 23 \left(1 - \frac{l}{c} \cdot \frac{43800}{43} \cdot \frac{1}{x}\right)\right)$
 $\rightarrow 23 \left(1 - \frac{52}{6000} \cdot \frac{43800}{43} \cdot \frac{1}{x}\right), (1 \leq x \leq 30)$

Frecuencia de lavado (días)

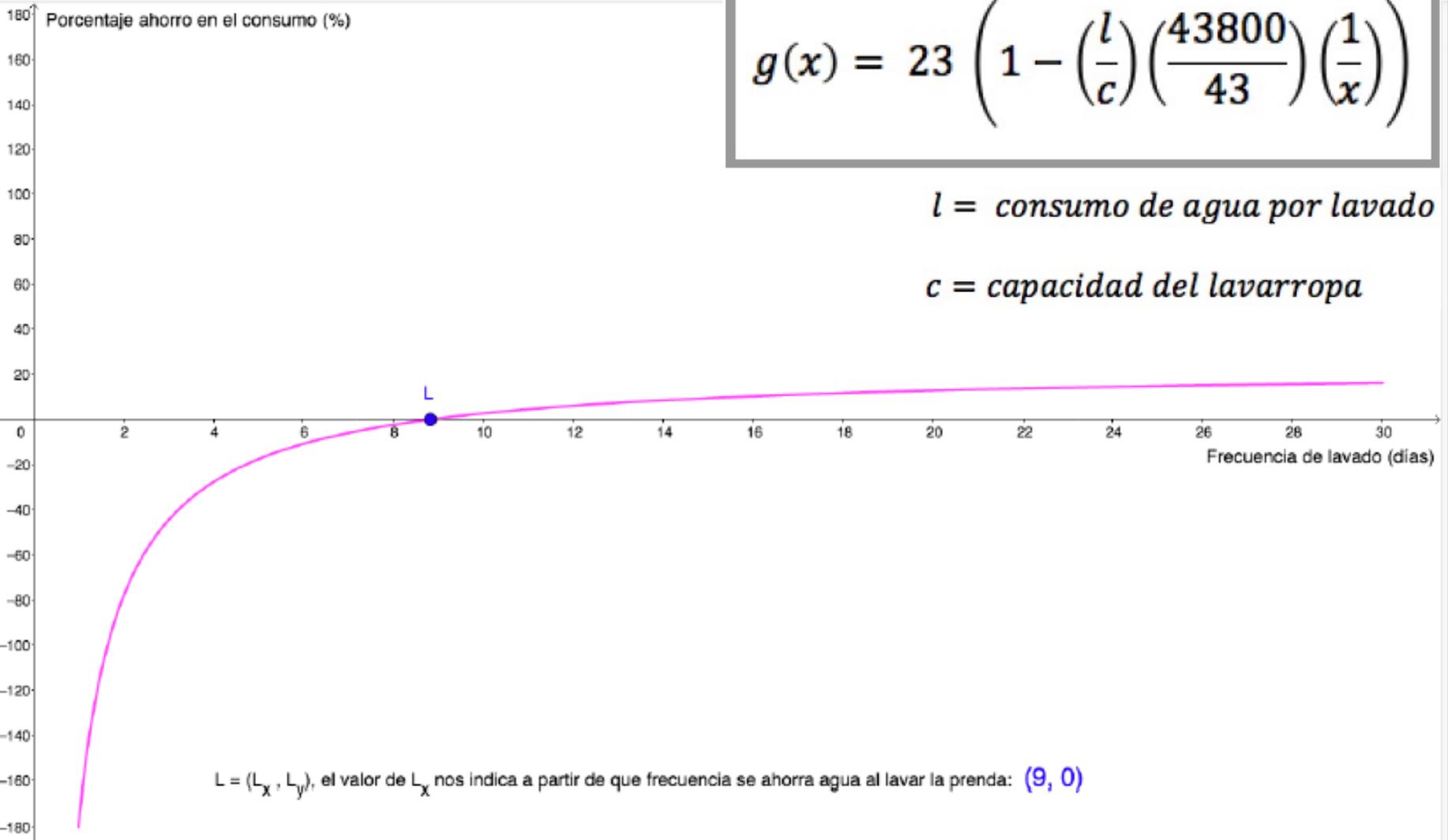
Porcentaje ahorro en el consumo (%)

$L = \text{Intersect}(B1, x\text{Axis}, (9, 0))$
 $\rightarrow (9, 0)$

$L = (L_x, L_y)$, el valor de L_x nos indica a partir de que frecuencia se ahorra agua al lavar la prenda:

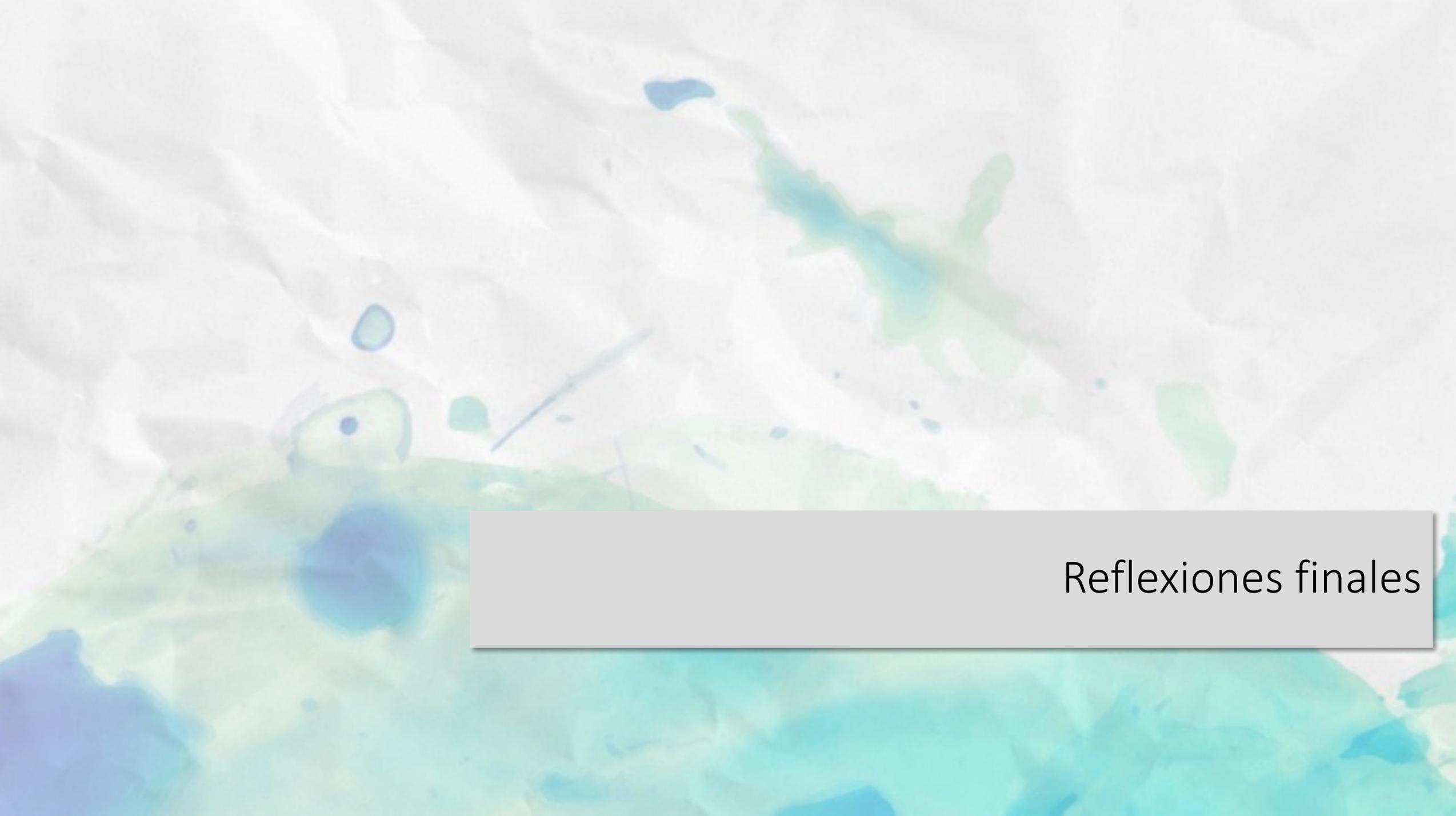
$\text{text4}="" + L + ""$

Input...



$$g(x) = 23 \left(1 - \left(\frac{l}{c} \right) \left(\frac{43800}{43} \right) \left(\frac{1}{x} \right) \right)$$

$l = \text{consumo de agua por lavado}$
 $c = \text{capacidad del lavarropa}$



Reflexiones finales

- ❑ Necesidad de proporcionar a futuros/as profesores/as oportunidades de experimentar el proceso de modelización durante su formación inicial.

- ❑ Las tecnologías pueden ampliar y mejorar las experiencias de los futuros/as profesores/as con los procesos de modelización.

- ❑ Los proyectos de modelización llevados a cabo por futuros/as profesores/as y sus reflexiones proporcionan evidencias de:
 - variedad de temas tratados y su relación con la situación de pandemia y problemáticas socio-ambientales.
 - diversos usos de las tecnologías,
 - logros de aprendizaje,
 - dificultades y limitaciones,
 - la potencialidad del uso de videos para comunicar ideas matemáticas, reflexiones, conclusiones o concientizar sobre ciertas problemáticas.

□ A pesar de las dificultades y basándonos en la evidencia positiva que obtuvimos a lo largo de estos años, argumentamos que la implementación de diversas tareas de modelización y el uso de tecnologías resulta relevante y fundamental durante la formación docente inicial, por muchas razones (además de las demandas curriculares):

- Pueden **potenciar** el aprendizaje de los/as estudiantes.
- Pueden contribuir a una educación **inclusiva**.
- Pueden contribuir a que la matemática se considere una herramienta útil para **describir** y **analizar** problemas reales, **tomar decisiones** fundamentadas y **criticar** con argumentos sólidos.
- Pueden hacer que los futuros/as profesores/as sean **sensibles** a las diferentes maneras de dar sentido a la matemática.

¡MUCHAS GRACIAS!



monica.ester.villarreal@unc.edu.ar



ResearchGate



Referencias

BASSANEZI, R. (2012). *Temas e modelos*. Campinas, Brasil: UFABC.

BARBOSA, J. C. (2006). Mathematical modelling in classroom: A critical and discursive perspective. *ZDM. Mathematics Education*, 38(3), 293–301.

BLOMHOJ, M. (2004). Mathematical modelling - A theory for practice. En B. Clarke, D. Clarke, G. Emanuelsson, B. Johnansson, D. Lambdin, F. Lester, A. Walby & K. Walby (Eds.), *International Perspectives on Learning and Teaching Mathematics*, (pp. 145-159). Suecia: National Center for Mathematics Education. Existe traducción de este artículo en *Revista de Educación Matemática*, 23(2), 20-35. Córdoba.

BORBA, M. & VILLARREAL, M. (2005). *Humans-with-media and the reorganization of mathematical thinking: Information and communication technologies, modelling, experimentation and visualization*. 1. ed. New York, USA: Springer.

JULIE, C., & MUDALY, V. (2007). Mathematical modelling of social issues in school mathematics in South Africa. In W. BLUM, P. GALBRAITH, H. HENN, & M. NISS (Eds.), *Modelling and applications in mathematics education—The 14th ICMI Study* (pp. 503–510). New York: Springer.

MULLER, E.; BURKHARDT, H. Applications and modelling for mathematics. In: BLUM, W.; GALBRAITH, P; HENN, H.; NISS, M. (Ed.). *Modelling and applications in mathematics education - The 14th ICMI Study*. New York, USA: Springer, 2007. p. 267-274.

SKOVSMOSE, O. (2000). Escenarios de investigación. *Revista EMA*, 6(1), 3-26.