MODOS DE COMPRENDER Y PENSAR DE ESTUDIANTES DE SECUNDARIA EN LA DISCUSIÓN DE TAREAS MATEMÁTICAS

Wilmer Ríos-Cuesta
Facultad de Educación y Pedagogía, Universidad del Valle
wilmer.rios@correounivalle.edu.co

Resumen

Los modos de comprender son un producto cognitivo de los actos mentales y los modos de pensar son una característica cognitiva de ellos. Una manera de identificarlos es mediante la actividad discursiva en el aula la cual incluye justificaciones, argumentaciones y explicaciones. Mediante los modos de comprender el profesor puede hacer inferencias sobre los modos de pensar de los estudiantes y dirigir sus intervenciones, lo cual lo sitúa en una perspectiva constructivista del aprendizaje. En este estudio se analizó la actividad discursiva en una clase de matemáticas de secundaria de una institución educativa pública en Colombia. La investigación se sitúa en el paradigma cualitativo mediante un estudio de casos exploratorio. Los resultados muestran que se puede mejorar el feedback en clase de acuerdo con las inferencias que el profesor hace de los modos de pensar.

Palabras clave: modos de comprender, modos de pensar, discusión de tareas, argumentación matemática, cultura de la argumentación.

Abstract

Ways of understanding are a cognitive product of mental acts and ways of thinking are a cognitive characteristic of them. One way to identify them is through discursive activity in the classroom which includes justifications, argumentations, and explanations. Through the ways of understanding, the teacher can make inferences about the students' ways of thinking and direct his interventions, which places him in a constructivist perspective of learning. This study analyzed the discursive activity in a high school mathematics class in a public educational institution in Colombia. The research is situated in the qualitative paradigm through an exploratory case study. The results show that feedback in class can be improved according to the inferences that the teacher makes from the ways of thinking.

***Key Words*:** ways of understanding, ways of thinking, discussion of tasks, mathematical argumentation, culture of argumentation.

Introducción

Dentro de la dinámica de clase, es importante que los profesores ayuden a los estudiantes a desarrollar pensamiento matemático. Para ello, es fundamental que su actuación permita que los estudiantes construyan los conceptos matemáticos y que los usen de manera eficaz frente a los problemas y tareas que se les propone en clase. Un asunto al cual se le ha prestado atención históricamente es la forma como los profesores gestionan el aula, en particular, la participación de los estudiantes en clase mediante justificaciones, argumentaciones y explicaciones como mecanismo para avanzar en la construcción y comprensión de los objetos matemáticos.

Los ambientes de aprendizaje y el clima escolar tienen cierta influencia en el éxito académico de los estudiantes, aunque se reconoce que son diversos los factores que inciden en esto (Arregui-Eaton *et al.*, 2018; Léon-Quinapallo *et al.*, 2021). Sandoval-Caraveo *et al.* (2017) afirman que hay evidencia empírica de la relación entre el clima escolar y el rendimiento académico, esto incluye la interacción en el aula y las prácticas de los profesores. Esto agrega cierta complejidad al significado de ambiente de aprendizaje. Sin embargo, al acotar el espacio de interacción y definir un objeto de aprendizaje y el aula como escenario, resulta más intuitiva la definición y nos referimos a la forma como los estudiantes interactúan para lograr sus aprendizajes y la forma como el profesor promueve dicha interacción.

De acuerdo con lo anterior, en las clases de matemática se requiere que los estudiantes hagan explícitos sus racionamientos y que los profesores promuevan situaciones de aprendizajes en la que se activen los conocimientos previos de los estudiantes y animarlos a participar. Sin embargo, diversos estudios reportan la dificultad de los estudiantes para argumentar sus producciones, evitar el conflicto cognitivo al discutir las tareas o apelar a la autoridad del profesor o el libro de texto como garantía de sus argumentos (Castellaro & Peralta, 2020; Goizueta, 2015; Ríos-Cuesta, 2021a; 2022). Algunos estudiantes se adhieren a las explicaciones de sus compañeros, sobre todo, cuando quien argumenta es un estudiante considerado como exitoso dentro de la clase. En el caso de los profesores, se reportan dificultades para promover ambientes de aprendizajes soportados en prácticas discursivas (Brown, 2014; Goizueta & Mariotti, 2015). Teniendo en cuenta lo anterior, el objetivo de este estudio fue analizar la actividad discursiva en una clase de matemáticas de secundaria en una institución educativa publica en Colombia para evidenciar la forma como el profesor dirige su acción mediadora identificando los modos de comprender y pensar y cómo la articulación con la mirada profesional del pensamiento matemático le brinda elementos para mejorar el feedback.

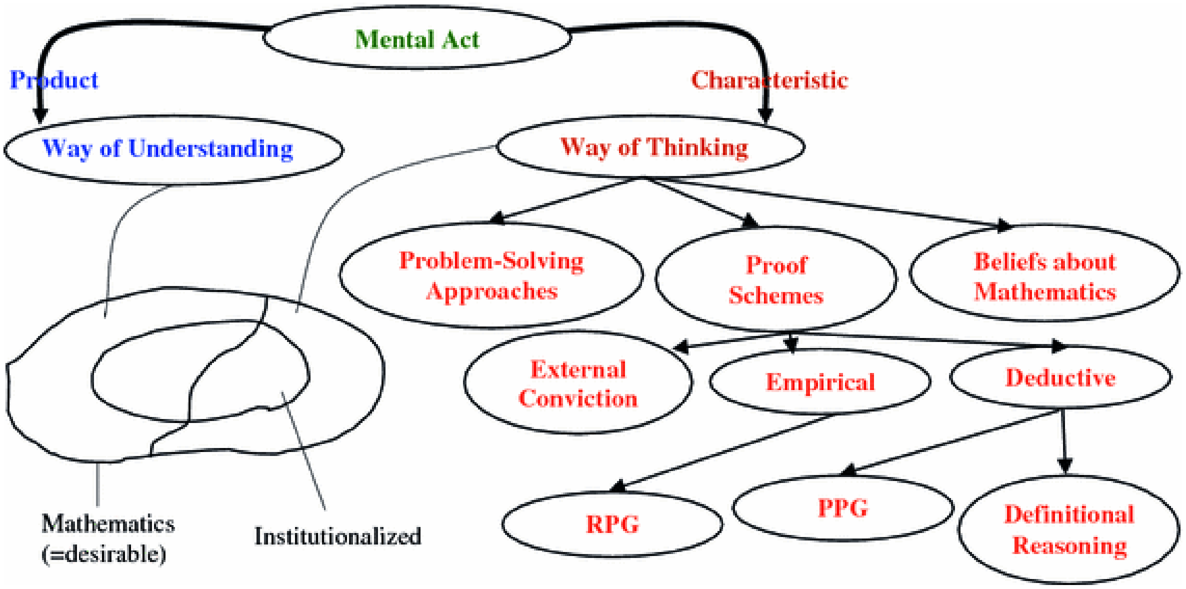
Modos de comprender y pensar

Harel (2008a; 2017; 2021) define los modos de comprender como un producto cognitivo de los actos mentales los cuales hacen parte del razonamiento de las personas, por ejemplo, conjeturar, inferir, explicar, entre otros, y son importantes en los procesos de aprendizaje pues son elementos fundamentales dentro de la cognición humana. El estudio de los actos mentales se sustenta en la observación y análisis de las declaraciones. Observaciones repetidas de los modos de comprender revelan una característica cognitiva de los actos mentales que los originan y configuran los modos de pensar. Estas definiciones permiten inferir el conocimiento de los estudiantes el cual puede ser o no correcto, así que el profesor tiene la tarea de ayudarlos a desarrollar modos de comprender y pensar compatibles con las matemáticas institucionalizadas.

Si bien estos conceptos podrían aplicarse a cualquier área del conocimiento en entornos escolares, en el caso particular de las matemáticas, la definición de los modos de comprender y de pensar conducen a una distinción entre las matemáticas deseables y las matemáticas institucionalizadas (figura 1). Las primeras hacen relación a los objetivos cognitivos que el profesor se propone alcanzar con estudiantes pero que son un insumo para avanzar hacia las matemáticas institucionalizadas (Harel, 2008b). Los estudiantes se enfrentan a las tareas que se proponen en clase usando sus modos de pensar, lo cual condiciona la forma en que entienden los conceptos (Harel, 2017; Watson & Harel, 2013). En ese sentido, el profesor debe identificar los actos mentales de interés, identificar los productos de dichos actos (modos de comprender) e inferir las características cognitivas producto de los actos mentales (modos de pensar) para dirigir su actividad mediadora (figura 1); esto incluye la negociación de significados, el manejo del discurso y las formas socialmente compartidas para validar los conceptos (Meister, 2017).

Figura 1

Triada de los actos mentales, modos de comprender y pensar



Fuente: Harel (2008b, p. 493)

Una condición necesaria para que el profesor dirija su actividad mediadora, apoyándose en la triada: actos mentales, modos de comprender y pensar, es la actividad discursiva en el aula. Las explicaciones, justificaciones y argumentaciones sirven de insumo para que el profesor pueda observar los actos mentales, sus productos y características. A pesar de esto, se requiere que los profesores tengan cierta experiencia en este tipo de prácticas y que orienten la clase desde una perspectiva epistemológica socioconstructivista, y así evitar dar respuestas a los estudiantes, en cambio debe procurar construir Zonas de Desarrollo Próximo (Vygotsky, 1979) para ayudarlos a avanzar en la comprensión e interiorización de los objetos matemáticos. Las declaraciones del profesor y los estudiantes en clase serán traducidas por cada estudiante en un modo de comprender que depende él y de su experiencia previa. Aquí el profesor debe buscar que los diferentes modos de comprender que se generan sean compatibles entre sí. Para esto es fundamental que se promueva en clase la discusión y el debate.

Mirada profesional del pensamiento matemático

A pesar de la complejidad de la actuación en el aula, los profesores deben desarrollar la competencia *mirar profesionalmente* el pensamiento matemático de sus estudiantes para ofrecer un feedback efectivo que apoye el aprendizaje de sus estudiantes. Es necesario identificar los elementos matemáticos de las producciones de los alumnos, inferir la comprensión que lo sustenta y decidir cómo responder con base a los elementos anteriores (Jacobs *et al*., 2010). Ivars, Fernández-Verdú y Buforn (2016) afirman que esta competencia permite que los profesores migren de la emisión de juicios evaluativos de los aciertos o desaciertos de los estudiantes a retroalimentaciones soportadas en el análisis de los elementos observables de la actividad matemática en clase.

Ivars, Fernández y Llinares (2016) generan tres descriptores del desarrollo de esta competencia. Como primero, el profesor debe reconocer e identificar en las producciones de los estudiantes los elementos matemáticos propios de la tarea que desarrollan. Segundo, identificar el nivel de comprensión de los estudiantes y la forma como usan los conocimientos matemáticos para resolver las tareas propuestas. En tercer lugar, sustentar las decisiones en los momentos de enseñanza en la interpretación de las comprensiones de las estudiantes identificadas previamente.

De acuerdo con lo anterior, las decisiones del profesor inciden en el aprendizaje de los estudiantes en la medida en que afectan las tareas que se proponen en clase, así como la gestión que se hace de ellas, pues la selección de las tareas ayuda a desarrollar la comprensión de los estudiantes (Buforn *et al*., 2016; Zapatera & Callejo de la Vega, 2018). Esta competencia se puede desarrollar desde los procesos de formación inicial de los profesores mediante el estudio de clases o el análisis de las videograbaciones pues permite reflexionar sobre los aspectos relevantes de su práctica docente (Llinares, 2013; Ruiz *et al*., 2018; Seago *et al*., 2019; Sherin & Dyer, 2017). Se trata entonces de que los profesores logren identificar los elementos matemáticos usados por los estudiantes cuando resuelven problemas. Garzón (2017) alude al termino momento de enseñanza para referirse a las situaciones escolares donde emergen oportunidades pedagógicas que pueden ser usadas por el profesor para apoyar el pensamiento matemático de los estudiantes. Para ello, es importante que el profesor orqueste discusiones en clase pues son un insumo necesario que soporta esta competencia.

El papel de la argumentación

En la actividad discursiva en el aula, la argumentación cumple un papel importante en la media en que permite hacer inferencia de los razonamientos que la originan. Algunos autores se refieren a la actividad discursiva como parte de la cultura matemática del aula (Cediel *et al*., 2019; Goizueta & Solar, 2019; Olave-Arias, 2018). En el caso particular de Colombia, se debe instaurar la cultura de la argumentación en las aulas de educación primaria y secundaria. Si bien en el currículo prescrito por el Ministerio de Educación Nacional (2006) se propone el desarrollo de competencias, en la prueba Saber realizada por el Icfes para evaluar las competencias de los estudiantes que terminan el ciclo de educación secundaria, no se promueven problemas que requieren habilidades cognitivas complejas, así como tampoco en los libros de textos diseñados por el Ministerio de Educación Nacional (Palacios, 2021).

A pesar de lo anterior, el tránsito en la educación matemática del aprendizaje de contenidos hacia el aprendizaje por competencias sigue en desarrollo. Hay evidencia de que tanto profesores como estudiantes presentan dificultades para argumentar (Goizueta, 2015; Goizueta & Planas, 2013; Ríos-Cuesta, 2021a), y, en el caso particular de los profesores, para promover oportunidades de aprendizaje usando la argumentación (Goizueta & Mariotti, 2015; Solar *et al*., 2016). Goizueta y Solar (2019) advierten que esta situación es originada por los sistemas educativos que centran la actividad en el aula en el desarrollo de contenidos.

La competencia argumentativa se considera clave dentro del desarrollo del pensamiento matemático (Ríos-Cuesta, 2020), de hecho, el Consejo Nacional de Maestros de Matemáticas -NCTM, por sus siglas en inglés- (2000), señaló que un objetivo de la Educación Matemática es ayudar a los estudiantes a argumentar matemáticamente sus producciones como una oportunidad para aprender matemáticas. En ese sentido, la argumentación permite la comunicación de ideas, la construcción de conocimientos y el desarrollo de una visión crítica y reflexiva frente al aprendizaje (Ríos-Cuesta, 2021b), además, es un insumo importante para que los profesores puedan identificar modos de comprender y pensar y aplicar los elementos de la mirada profesional del pensamiento matemático.

Metodología

Esta investigación se inscribe en el paradigma cualitativo (Cohen *et al*., 2017), nos valemos de una grabación de una sesión de clase de secundaria, en Colombia, que duró 45 minutos. Los participantes eran estudiantes de noveno grado ($n = 30$) y un profesor de una institución educativa pública. Los estudiantes son enumerados como E1, E2, …, E# para preservar su identidad. En la clase los estudiantes y el profesor discutían tareas relacionadas con el planteamiento de ecuaciones lineales, trabajo que requería que los estudiantes modelaran una situación hipotética. La observación fue no participante. El profesor cuenta con una maestría en didáctica de las matemáticas y 10 años de experiencia docente.

Resultados

Presentamos el análisis de la trascripción de un episodio de clase en la discusión de tareas sobre planteamiento de ecuaciones lineales. Inicialmente el profesor plantea modelar un problema donde se solicita conseguir tres números consecutivos que den un resultado en particular, para resolver este problema, los estudiantes deben reconocer la forma como se construye la serie de números enteros.

[16] Prof.: La idea es encontrar tres números enteros consecutivos cuya suma de 54. ¿Cuáles son estos números?

[17] Prof.: ¿Se entiende la idea de consecutivos?

[18] E5: Podemos dividir 54 entre 3

[19] E15: consecutivos es que son números seguidos

[20] Prof.: por ejemplo, cuando contamos 1, 2, 3, …

[21] E12: profe, pero ¿cómo planteamos la ecuación?

[22] Prof.: ¿conocemos el valor desconocido?

…

[26] E1: hay que asignarle una incógnita

En la línea 18 se identifica un acto mental que permite inferir un modo de comprender al dividir la suma por la cantidad de sumandos pues el estudiante cree que el problema tiene la forma $3x = 54$. Este tipo de acto mental sugiere que el estudiante no ha comprendido el problema y que probablemente no usó los elementos de la pregunta que hace el profesor en la línea 17. La intervención de E15 sirve para aclarar las ideas y avanzar en la comprensión del problema planteado. A pesar de que los estudiantes aún desconocen cómo plantear la ecuación, la pregunta que hace el profesor en la línea 22 es fundamental pues orienta el proceso sin dar una respuesta. El siguiente fragmento se continúa con la discusión originada por la tarea propuesta:

> [27] Prof.: ¡ok! ¿y cómo se forman los números enteros? Por ejemplo, si partimos de cero ¿cómo calculamos el número siguiente?
>
> [28] E19: ¡es uno!
>
> [29] Prof.: Sí, pero ¿cómo lo calculamos?
>
> [30] Prof.: ¿Qué operación hacemos para calcular el [número] que sigue?
>
> [31] E2: ¿una suma?
>
> [32] E18: Sí, sumamos uno
>
> …
>
> [38] E7: ¿Entonces para plantear la ecuación el primer número es x y el que sigue $x + 1$?
>
> [39] E1: ¿la ecuación es $x + x + 1 + x + 1 = 54$?
>
> [40] Prof.: ¿Qué piensan de lo que dice [E1]?
>
> [41] E4: yo creo que no nos da porque si por ejemplo la x vale 1 entonces al buscar el siguiente número se nos repite el 2
>
> [42] E7: Pero hay que sumarle 1 para hallar el siguiente
>
> [43] E15: oigan y ¿siempre hay que sumarle 1?
>
> [44] E5: Pero hay que sumarlos al anterior, por ejemplo 1+1=2, 2+1=3, yo creo que es así
>
> [45] E1: ¡ah si! Entonces es $x + x + 1 + x + 1 + 1 = 54$
>
> [46] Prof.: Muy bien, y si agrupamos esta expresión de modo que se observe la forma de tres números, es decir, que se vean que son tres números los que estamos sumando.

[47] E1: esta misma expresión $x + (x + 1) + (x + 1 + 1) = 54$

[48] Prof.: Bueno, ¿y si dentro del segundo paréntesis reducimos los términos semejantes?

[49] E7: ¡ah ya sé! Queda $x + (x + 1) + (x + 2) = 54$

[50] Prof.: ¡Muy bien!

Las preguntas que hace el profesor en las líneas 27 y 30 dejan ver su mirada sobre del pensamiento de sus estudiantes lo cual explicaría su actuación. Las oportunidades pedagógicas y las acciones del profesor aluden a la construcción del concepto por parte de los estudiantes y quedan en evidencia en las líneas 27, 30 y 40. En la línea 39 el estudiante E1 propone una ecuación la cual es aprovechada por el profesor (línea 40) para alentar el debate situación que se observa de las líneas 41 hasta la 45. Las líneas posteriores permiten ver cómo por medio del diálogo de los estudiantes se logró la institucionalización. Se nota la intensión del profesor por hacer que los estudiantes comprendan la forma de escribir la ecuación, sin embargo, no muestra la simplificación de la expresión final.

Las matemáticas de los estudiantes se van refinando con las intervenciones del profesor. En la línea 39, 45 y 47 se observa la evolución del estudiante E1 el cual parte de un planteamiento ingenuo, pero es orientado por el profesor y logra avanzar en el refinamiento propio de la escritura matemática. El profesor trata de introducir el algoritmo en la línea 29 y 30, las decisiones de enseñanza buscan la progresión del aprendizaje, las cuales, analizadas desde la perspectiva de la mirada profesional, permiten comprender la actuación del profesor y el propósito de sus intervenciones. Coincidimos con Wilson *et al*. (2013) en que el profesor no debe señalar las respuestas correctas o incorrectas sino más bien usarlas para para dirigir el aprendizaje de los estudiantes.

Discusión y conclusiones

Identificar los actos de pensamiento que se expresan en los modos de comprender son una alternativa para que los profesores puedan mediar en la actividad cognitiva de los estudiantes y ayudarles a construir modos de pensar compatibles entre sí para que desarrollen pensamiento matemático. Lo anterior es posible siempre y cuando se promuevan situaciones de debate y confrontación donde el profesor no dé respuestas, sino que genere conflictos cognitivos y los gestione adecuadamente.

Los momentos de enseñanza en los cuales los estudiantes demandaban avanzar en la comprensión del problema quedaron en evidencia, la gestión de la clase se enfocó en la búsqueda del refinamiento de la escritura matemática aportando elementos para que los estudiantes avancen en ese proceso. Sin embargo. La participación de los estudiantes fue poca lo cual se evidencia en los turnos de participación. Si bien se observó el intento del profesor por construir un discurso colectivo, la gran mayoría de los estudiantes asentían con la cabeza y tal como lo reportan Castellaro y Peralta (2020), evadieron el conflicto cognitivo.

Por otro lado, las dos aproximaciones teóricas muestran la importancia de la pregunta la cual hace parte de la gestión de la clase. La solicitud de puntos de vista frente a la afirmación hecha por un estudiante es una forma de alentar el debate y se convierte en una oportunidad pedagógica que puede ser aprovechada para introducir nuevas ideas o aportar elementos para ampliar la comprensión de la actividad matemática. En efecto, solicitar explicaciones permite que los estudiantes hagan explícitos sus razonamientos y es aquí cuando el profesor crea la oportunidad pedagógica para inferir los modos de pensar y dirigir sus acciones.

Agradecimientos

Al Ministerio de Ciencia, Tecnología e Innovación de Colombia por la Beca de Excelencia Doctoral del Bicentenario otorgada al autor de este estudio. Este trabajo ha sido realizado en el marco del Doctorado Interinstitucional en Educación de la Universidad del Valle y se deriva de la tesis Implicaciones de la interactividad en la argumentación en clase de matemáticas.

Referencias

Arregui-Eaton, I. G., Chaparro-Caso-López, A. A., & Díaz-López, C. D. (2018). Cuestionario para valorar las prácticas de enseñanza en secundaria desde la percepción de los estudiantes. *REOP - Revista Española de Orientación y Psicopedagogía*, *29*(2), 55–70. https://doi.org/10.5944/reop.vol.29.num.2.2018.23153

Brown, S. A. (2014). On skepticism and its role in the development of proof in the classroom. *Educational Studies in Mathematics, 86*(3), 311–335. https://doi.org/10.1007/s10649-014-9544-4

Buforn, À., Fernández, C., & Ivars, P. (2016). Desarrollo de una mirada profesional en un módulo sobre la enseñanza y aprendizaje del razonamiento proporcional. In M. T. Tortosa-Ybáñez, S. Grau-Company, & J. D. Álvarez-Teruel (Eds.), *XIV Jornadas de Redes de Investigación en Docencia Universitaria. Investigación, innovación y enseñanza universitaria: enfoques pluridisciplinares* (pp. 680–691). Universitat d'Alacant.

Castellaro, M., & Peralta, N. S. (2020). Pensar el conocimiento escolar desde el socioconstructivismo: interacción, construcción y contexto. *Perfiles Educativos*, *42*(168), 140–156. https://doi.org/10.22201/iisue.24486167e.2020.168.59439

Cediel, Y. K., Olave, G., & Cisneros, M. (2019). Argumentación para la paz. Avances y desafíos para su enseñanza, como parte de los acuerdos sobre participación política entre el Estado colombiano y las Farc-Ep. *Análisis Político*, *32*(95), 23–41. https://doi.org/10.15446/anpol.v32n95.80827

Cohen, L., Manion, L., & Morrison, K. (2017). *Research Methods in Education (8th ed)*. Routledge. https://doi.org/10.4324/9781315456539

Garzón, D. (2017). Análisis de las decisiones del profesor de matemáticas en su gestión de aula. *Revista Educación Matemática*, *29*(3), 131–160. https://doi.org/10.24844/EM2903.05

Goizueta, M. (2015). *Aspectos epistemológicos de la argumentación en el aula de matemáticas* [Tesis doctoral, Universidad Autónoma de Barcelona]. Repositorio Institucional UAB. https://www.tdx.cat/handle/10803/299192

Goizueta, M., & Mariotti, M. A. (2015). Constructing validity in classroom conversations. In K. Krainer & N. Vondrová (Eds.), *Proceedings of the 9th Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 128–134). Charles University in Prague.

Goizueta, M., & Planas, N. (2013). Temas emergentes del análisis de interpretaciones del profesorado sobre la argumentación en clase de matemáticas. *Enseñanza de Las Ciencias. Revista de Investigación y Experiencias Didácticas*, *31*(1), 61–78. https://doi.org/10.5565/rev/ec/v31n1.835

Goizueta, M., & Solar, H. (2019). Relaciones entre la argumentación en el aula de matemáticas y la mirada profesional del profesor. In R. Olfos, E. Ramos, & D. Zakaryan (Eds.), *Formación docente: Aportes a la práctica docente desde la didáctica de la matemática* (pp. 241–280). Graó.

Harel, G. (2008a). DNR perspective on mathematics curriculum and instruction, Part I: Focus on proving. *ZDM - International Journal on Mathematics Education*, *40*(3), 487–500. https://doi.org/10.1007/s11858-008-0104-1

Harel, G. (2008b). What is Mathematics? A Pedagogical Answer to a Philosophical Question. In B. Gold & R. A. Simons (Eds.), *Proof and Other Dilemmas Mathematics and Philosophy* (pp. 265–290). https://doi.org/https://doi.org/10.5948/UPO9781614445050.018

Harel, G. (2017). The learning and teaching of linear algebra: Observations and generalizations. *Journal of Mathematical Behavior*, *46*, 69–95. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2017.02.007

Harel, G. (2021). The learning and teaching of multivariable calculus: a DNR perspective. *ZDM - Mathematics Education*, *53*(3), 709–721. https://doi.org/10.1007/s11858-021-01223-8

Ivars, P., Fernández, C., & Llinares, S. (2016). Descriptores del desarrollo de una mirada profesional sobre la enseñanza de las matemáticas en estudiantes para maestro. In J. A. Macías, A. Jiménez, J. L. González, M. T. Sánchez, P. Hernández, C. Fernández, … A. Berciano (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XX* (pp. 305–314). SEIEM.

Ivars, P., Fernández-Verdú, C., & Buforn, À. (2016). Mirar profesionalmente el pensamiento matemático sobre fracciones a través de una trayectoria de aprendizaje. In M. T. Tortosa-Ybáñez, S. Grau-Company, & J. D. Álvarez-Teruel (Eds.), *XIV Jornadas de Redes de Investigación en Docencia Universitaria. Investigación, innovación y enseñanza universitaria: enfoques pluridisciplinares* (pp. 602–613). Universitat d'Alacant.

Jacobs, V. R., Lamb, L. C., & Philipp, R. A. (2010). Professional noticing of children's mathematical thinking. *Journal for Research in Mathematics Education*, *41*(2), 169–202. https://doi.org/https://doi.org/10.5951/jresematheduc.41.2.0169

León-Quinapallo, X. P., Mendoza-Yépez, M. M., & Gilar-Corbi, R. (2021). Clima de aula y rendimiento académico: apuntes en torno al contexto universitario [Número Especial]. *Revista Venezolana de Gerencia*, *26*(5), 140–156. https://doi.org/10.52080/rvgluz.26.e5.10

Llinares, S. (2013). Professional noticing: a component of the mathematics teacher's professional practice. *Sisyphus-Journal of Educatio*, *1*(3), 76–93. https://doi.org/http://dx.doi.org/10.25749/sis.3707

Maina, M., & Cacciavillani, C. (2015). Selección de textos y consignas de manuales escolares para la enseñanza de la argumentación: análisis crítico de la ideología en la lengua. *Cuadernos de Educación*, *13*(5), 1–12.

Meister, L. (2017). Threshold concepts and ways of thinking and practising: the potential of a framework for understanding in translation didactics. *The Interpreter and Translator Trainer*, *11*(1), 20–37. https://doi.org/10.1080/1750399X.2016.1198181

Ministerio de Educación Nacional. (2006). *Estándares Básicos de Competencias en Lenguaje, Matemáticas, Ciencias y Ciudadanas: Guía sobre lo que los estudiantes deben saber y saber hacer con lo que aprenden*. Ministerio de Educación Nacional.

National Council of Teachers of Mathematics. (2000). *Principles and Standards for School Mathematics*. Autor.

Olave-Arias, G. (2018). La argumentación a enseñar en la política curricular colombiana: convivir sin convencer. In L. A. Ramírez-Peña, R. D. Vallejo-Molina, & M. Cisneros-Estupiñán (Eds.), *Didáctica del lenguaje y la literatura, retrospectivas y perspectivas* (pp. 75–102). Ediciones de la U.

Palacios, N. (2021). The Development of Historical Thinking in Colombian Students: A Review of the Official Curriculum and the Saber 11 Test. *International Journal of Instruction*, *14*(1), 121–142. https://doi.org/10.29333/IJI.2021.1418A

Ríos-Cuesta, W. (2020). Competencias de argumentación y modelización en estudiantes de secundaria: la necesidad de un cambio de paradigma en la Educación Matemática del Chocó, Colombia. *Pesquisa e Ensino*, *1*, e202020. https://doi.org/10.37853/pqe.e202020

Ríos-Cuesta, W. (2021a). Dificultades para argumentar el uso de registros semióticos en problemas de variación cuadrática. *Mendive. Revista de Educación*, *19*(2), 446–457.

Ríos-Cuesta, W. (2021b). Argumentación en estudiantes de secundaria: de la Interacción a la Interactividad. In A. Rosas (Ed.), *Avances en Matemática Educativa. El alumno en acción* (pp. 21–34). Editorial Lectorum. http://funes.uniandes.edu.co/23860/

Ríos-Cuesta, W. (2022). Garantías de los argumentos en clase de matemáticas mediados por el uso de software vs lápiz y papel. In N. Sgreccia (Ed.), *Memorias de las Segundas Jornadas de Práctica Profesional Docente en Profesorados Universitarios en Matemática* (pp. 249–262). Editorial Asociación de Profesores de la Facultad de Ciencias Exactas e Ingeniería de la Universidad Nacional de Rosario.

Ruiz-Ortega, F. J., Márquez, C., Badillo, E., & Rodas Rodríguez, J. M. (2018). Desarrollo de la mirada profesional sobre la argumentación científica en el aula de secundaria. *Revista Complutense de Educación*, *29*(2), 559–576. https://doi.org/10.5209/RCED.53452

Sandoval-Caraveo, M. D. C., Surdez-Pérez, E. G., & Pérez-Sandoval, A. G. (2017). Clima escolar del campus de ingeniería y arquitectura de una universidad pública mexicana desde la perspectiva de sus estudiantes. *Revista Electrónica Educare*, *21*(2), 1–21. https://doi.org/10.15359/ree.21-2.8

Seago, N., Koellner, K., & Jacobs, J. (2019). The impact of a content focused video-based pd on teacher knowledge, instructional practice, and student achievement. In M. Graven, H. Venkat, A. Essien, & P. Vale (Eds.), *Proceedings of the 43rd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol 3, pp. 305–311). PME.

Sherin, M. G., & Dyer, E. B. (2017). Mathematics teachers' self-captured video and opportunities for learning. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *20*(5), 477–495. https://doi.org/10.1007/S10857-017-9383-1

Solar, H., Ortiz, A., & Ulloa, R. (2016). MED: Modelo de formación continua para profesores de matemática, basada en la experiencia. *Estudios Pedagógicos (Valdivia)*, *42*(4), 281–298. https://doi.org/10.4067/S0718-07052016000500016

Vygotsky, L. S. (1979). *El desarrollo de los procesos psíquicos superiores*. Grijalbo.

Watson, A., & Harel, G. (2013). The Role of Teachers' Knowledge of Functions in Their Teaching: A Conceptual Approach with Illustrations from Two Cases. *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education*, *13*(2), 154–168. https://doi.org/10.1080/14926156.2013.784826

Wilson, P. H., Mojica, G. F., & Confrey, J. (2013). Learning trajectories in teacher education: Supporting teachers' understandings of students' mathematical thinking. *The Journal of Mathematical Behavior*, *32*(2), 103–121. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2012.12.003

Zapatera, A., & Callejo de la Vega, M. L. (2018). El conocimiento matemático y la mirada profesional de estudiantes para maestro en el contexto de la generalización de patrones. Caracterización de perfiles. *Revista Complutense de Educación*, *29*(4), 1217–1235. https://doi.org/10.5209/rced.55070