

# SITUACIONES PROBLEMÁTICAS DE PRECÁLCULO. EL ESTUDIO DE FUNCIONES A TRAVÉS DE LA EXPLORACIÓN CON CALCULADORAS GRÁFICAS\*

Pedro Gómez, Vilma María Mesa, Cristina Carulla, Paola Valero, Cristina Gómez  
“una empresa docente”, Universidad de los Andes  
pgomez@uniandes.edu.co • vmesa@sage.coe.uga.edu

*El proyecto Calculadoras gráficas y precálculo se desarrolló partiendo de un diseño curricular previamente establecido y llegando a un nuevo diseño curricular como producto de la innovación que introducía las calculadoras gráficas. Este nuevo diseño curricular estaba centrado en la resolución de una serie de situaciones problemáticas que expresaban las nuevas visiones de los investigadores con respecto al saber a enseñar y a la forma como se cree que se debe aprender y enseñar ese conocimiento. Se diseñaron siete tipos de situaciones problemáticas: tablas, familias, construcción de objetos, diversas representaciones, de planteo, ensayos y proyectos de investigación. Se buscaba que estas situaciones problemáticas representaran, al menos parcialmente, algunas de las tendencias actuales con respecto a la enseñanza y el aprendizaje del precálculo.*

## PENSAMIENTO DE ALTO NIVEL

Una de las maneras más claras de caracterizar las matemáticas escolares tradicionales y de definir lo que debería ser la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas de acuerdo a las tendencias actuales de la comunidad de educación matemática es el llamado *pensamiento de alto nivel*. Resnick (1987, citado en Romberg, 1993) define este tipo de pensamiento de acuerdo a una serie de características que se encuentran en claro contraste con los criterios matemáticos tradicionales:

<b>Pensamiento de alto nivel</b>	<b>Esquemas tradicionales</b>
<i>No-algorítmico.</i> El camino para la acción <i>no</i> se encuentra completamente especificado con anterioridad.	<i>Algorítmico.</i> El camino para la acción se encuentra completamente especificado con anterioridad.
<i>Complejo.</i> El camino total no es “visible” (hablando mentalmente) desde un único punto de vista.	<i>Caminos visibles.</i> Se utilizan ejemplos estándar con caminos visibles.
<i>Soluciones múltiples.</i> El pensamiento de alto nivel da lugar frecuentemente a soluciones múltiples, cada una con costos y beneficios.	<i>Solución única.</i> Hay una única solución posible.
<i>Criterios múltiples.</i> El pensamiento de alto nivel involucra la aplicación de múltiples criterios que, en ocasiones, entran en conflicto entre ellos.	<i>Criterios sencillos.</i> Se requiere la utilización de criterios sencillos que se encuentran bien definidos.

Tabla N° 1. Pensamiento de alto nivel y esquemas tradicionales

\*. El trabajo que se reporta aquí recibió apoyo de COLCIENCIAS, Texas Instruments, el PLACEM y la Fundación para el Avance de Ciencia y Tecnología del Banco de la República.

<b>Pensamiento de alto nivel</b>	<b>Esquemas tradicionales</b>
<i>Incertidumbre.</i> El pensamiento de alto nivel involucra frecuentemente la incertidumbre. No se conoce todo lo que se requiere para desarrollar la tarea.	<i>Certeza.</i> Se tiene certeza: se ha dado toda la información que se requiere.
<i>Auto-regulación.</i> El pensamiento de alto nivel requiere la auto - regulación del proceso de pensamiento.	<i>Regulación externa.</i> En muchas ocasiones es un tercero quien determina lo que se debe hacer en cada momento.
<i>Asignación de significado.</i> El pensamiento de alto nivel requiere la asignación de significado, encontrando la estructura subyacente a un desorden aparente.	<i>Significado dado.</i> El significado está dado o se supone.
<i>Requiere esfuerzo.</i> El pensamiento de alto nivel requiere de esfuerzo. Se requiere gran cantidad de trabajo mental con el propósito de desarrollar las elaboraciones y los juicios involucrados.	<i>No requiere esfuerzo.</i> El trabajo normalmente involucra ejercicios estándar tan simplificados que requieren de muy poco esfuerzo.

Tabla N° 1. *Pensamiento de alto nivel y esquemas tradicionales*

Una de las consecuencias del programa de investigación *Calculadoras gráficas y precálculo* fue la producción de un nuevo diseño curricular para el curso en el que se trabajó. Cuando analizamos este nuevo diseño, percibimos que seguía en muchos aspectos los lineamientos del pensamiento de alto nivel. En lo que sigue describimos brevemente el programa de investigación, presentamos los efectos del programa en el diseño curricular y describimos las principales características de este diseño.

## **PROGRAMA DE INVESTIGACIÓN *CALCULADORAS GRÁFICAS Y PRECÁLCULO***

### **Descripción general**

El programa de investigación *Calculadoras gráficas y precálculo* se realizó en el curso de precálculo de la Universidad de los Andes. Este curso lo toman estudiantes de primer semestre de las carreras de ingeniería, administración, economía y ciencias biológicas. El programa de investigación recibió apoyo de COLCIENCIAS, Texas Instruments, el PLACEM y la Fundación para el Avance de Ciencia y Tecnología del Banco de la República. El propósito del proyecto fue el de explorar los siguientes aspectos del sistema curricular con motivo de la utilización de la calculadora gráfica: la interacción social y el discurso matemático dentro del salón de clase, las actitudes, la comprensión y el rendimiento de los estudiantes, las creencias del profesor y el diseño curricular.

Los resultados más importantes se obtuvieron en el aspecto de diseño y desarrollo curricular. Los investigadores, que también actuaron como profesores, experimentaron un proceso de cambio en sus visiones acerca de las matemáticas, de su enseñanza, de su aprendizaje y de la utilización de recursos en el salón de clase, cambios que implicaron modificaciones sustanciales en el diseño curricular.

## Efectos en el diseño curricular

Las diferencias que surgieron en el diseño curricular del curso están relacionadas con un cambio en las visiones del grupo de investigadores con respecto al saber a enseñar y a la forma como se cree que se debe aprender y enseñar ese conocimiento. El grupo construyó, a lo largo de dos años de trabajo, una visión del conocimiento a enseñar en la que se percibe una mayor complejidad y profundidad del contenido matemático. El estudio de las funciones se hizo más coherente gracias a la introducción del concepto de familias de funciones, concepto que permite identificar las diferencias y similitudes entre cada una de las familias (lineales, cuadráticas, etcétera). Por otra parte, el grupo se hizo más consciente de la complejidad de los objetos matemáticos estudiados, complejidad que se expresa en dos dimensiones, principalmente: la riqueza de cada concepto matemático en cuanto a su expresión en múltiples sistemas de representación (simbólico, gráfico, tabular, verbal); y la complejidad de cada concepto en cuanto a su estatus, ya sea operacional y dinámico, ya sea estructural y estático (Sfard, 1991, 1992).

Por otra parte, el grupo logró expresar en la práctica, y de manera explícita, su posición ideológica con respecto al aprendizaje: una interpretación del constructivismo social. La expresión práctica de esta visión (el individuo construye su conocimiento matemático dentro de un entorno social que simula el funcionamiento de las comunidades científicas) llevó al grupo a centrar buena parte de su atención en el diseño y utilización de situaciones problemáticas que, expresando las nuevas visiones del contenido a enseñar, indujeran a los estudiantes a construir su conocimiento matemático dentro de un contexto de interacción social (Ernest, 1991).

Estas nuevas visiones acerca del conocimiento a enseñar, del aprendizaje y de las matemáticas, se complementó con nuevas visiones del estudiante (como alguien mucho más capaz de enfrentar y resolver tareas complejas) y del profesor (como alguien capaz y deseoso de aprovechar apropiadamente una mayor libertad en el desarrollo del currículo) (Ver nuestro artículo *Calculadoras gráficas y precálculo. Las actitudes de los estudiantes* en este volumen y Valero y Gómez, 1996).

El nuevo diseño curricular pretende que el conocimiento construido por el estudiante sea coherente y holístico (en contraposición con un conocimiento desagrupado de herramientas específicas); sea rico en sus aspectos procedimental y conceptual (buscando ir más allá de los hechos y los algoritmos, hacia las estructuras conceptuales y procedimentales); y sea rico en las conexiones entre sistemas de representación (buscando que un mismo concepto pueda ser visto desde diversas perspectivas y que éstas se encuentren conectadas).

Se busca además que el estudiante perciba que los problemas en matemáticas no tienen necesariamente una única respuesta, ni una única estrategia de resolución; que vea la utilidad práctica del conocimiento que construye (como medio para modelar la realidad); que desarrolle sus capacidades de comunicación y argumentación matemática; que reconozca que el conocimiento se construye socialmente; que desarrolle la capacidad para enfrentarse a lo desconocido (tareas que son diferentes de las que él ya conoce); que desarrolle su capacidad para investigar en matemáticas; y, en general, que desarrolle su capacidad para resolver problemas.

Aunque desde un punto de vista superficial, el contenido sufrió solamente cambios leves, un análisis más detallado de los temas tratados y de las tareas propuestas a los estudiantes resulta en un tratamiento del contenido que expresa las visiones que se acaban de describir con respecto al conocimiento a enseñar: tratamiento de familias de funciones, riqueza en los sistemas de representación y profundidad en las dimensiones operacional y estructural de los conceptos.

El manejo de la interacción entre el profesor y el estudiante dentro del salón de clase en la construcción del conocimiento matemático también sufrió cambios importantes, al pasar de una situación en la que se seguía de cerca el libro texto dentro de un esquema de exposición del profesor y resolución individual de ejercicios típicos por parte de los estudiantes, a una situación de interacción en grupos de tres o cuatro estudiantes, que giró principalmente alrededor de la resolución de situaciones problemáticas complejas y diferentes, seguida de discusiones de todo el grupo de estudiantes en las que se enfatizaba la argumentación y el consenso global para aceptar la validez de las afirmaciones propuestas.

Finalmente, la evaluación dejó de ser exclusivamente una herramienta para clasificar a los estudiantes y se convirtió en un medio a través del cual estudiantes y profesores se comunicaban en su proceso de interacción en la búsqueda de la construcción del conocimiento y en el que se reconocieron y enfatizaron las capacidades de comunicación y argumentación, la coherencia del discurso, la diversidad de estrategias posibles, la experimentación y la formulación y verificación de conjeturas. Se introdujeron nuevos esquemas de trabajo tales como ensayos escritos, portafolios y proyectos de investigación.

## **DISEÑO CURRICULAR**

Los cambios en el diseño y desarrollo curricular generaron una nueva situación en la que se estaba experimentando con esquemas y estrategias diferentes que se expresaron en una serie de situaciones problemáticas con base en las cuales se desarrolló el currículo (Gómez et al., 1996).

El curso en el que se desarrolló el proyecto consideró el estudio de diversos tipos de funciones –temas longitudinales– según diversos aspectos –temas transversales. Así, cada uno de los temas longitudinales, se estudia teniendo como referencia cada uno de los temas transversales

<b>Temas longitudinales</b>	<b>Temas transversales</b>
Funciones lineales	Trabajo dentro de la representación gráfica
Funciones cuadráticas	Trabajo dentro de la representación simbólica
Funciones cúbicas	Relación entre manipulaciones
Funciones polinómicas	Características de la función
Funciones racionales	Características de la familia de funciones
Funciones con radicales	Sistemas de ecuaciones
	Desigualdades
	Aplicaciones

Los estudiantes debían estudiar con anterioridad a la clase la teoría y los problemas que se iban a tratar. Existían actividades que podían desarrollarse sin haber profundizado mucho en un tema; otras en las que se buscaba consolidar o recoger el trabajo adelantado alrededor de un cierto tema; y otras en las que se pretendía profundizar en un tema específico o avanzar en la construcción de conocimiento. Se diseñaron siete tipos de situaciones problemáticas: tablas, familias, construcción de objetos, diversas representaciones, de planteo, ensayos y proyectos de investigación.

Por lo general las tablas se utilizaron en las clases de introducción de tema, mientras que las de construcción de objetos, las de planteo y los ensayos, se usaron en las clases de consolidación de conocimientos. Las situaciones de familias, las de diversas representaciones, los ensayos y los proyectos de investigación se utilizaron para avanzar y profundizar en un tema.

A continuación se da una breve descripción de los diferentes tipos de situaciones problemáticas que se utilizaron en el curso.

*Tablas.* En las tablas los estudiantes rellenan las casillas vacías; se suele dar información en algunas de ellas para que los estudiantes puedan encontrar patrones de comportamiento que les permitan formular alguna hipótesis, que luego se validará con la información de otras casillas. Las tablas dan una visión general y permiten evidenciar relaciones entre representaciones o conceptos.

*Familias.* Los ejercicios de este tipo se apoyan en una representación parametrizada de una función. Se busca que el estudiante hable de la familia, según una relación que se da entre los parámetros. En general, esta relación se muestra gráficamente. En los casos más complejos, se pide hablar, en general, de la familia, con base en el papel que representan los parámetros en la expresión.

*Construcción de objetos.* En estos ejercicios se busca que el estudiante dé la descripción más completa posible de un objeto matemático, que puede ser una función, una desigualdad o una ecuación. Para eso, se da información parcial pero complementaria en sus representaciones verbal, tabular, gráfica y simbólica.

*Diversas representaciones.* En estas actividades se busca que el estudiante trabaje en las diversas representaciones simbólicas de un objeto con el fin de profundizar en el significado de los parámetros de esas representaciones.

*Planteo.* Estos ejercicios son los que se presentan utilizando lenguaje natural. En ellos, usualmente, se describen situaciones de la vida real. Se busca que el estudiante haga un proceso de modelaje de la situación.

*Ensayos.* En estos ejercicios se pide al estudiante que hable acerca de un objeto matemático. Se pide que integre todas las representaciones y características posibles del objeto en un texto que podría ser leído por otras personas.

*Proyectos de investigación.* Se busca que los estudiantes, en grupo, trabajen fuera de clase en un problema que requiere hacer un trabajo de investigación que involucra situaciones de manipulación concretas, formulación de hipótesis y modelaje. Los estudiantes deben producir un reporte y presentar al resto de la clase sus resultados. El trabajo se desarrolla durante más de dos semanas.

La mayoría de los problemas propuestos podían ser resueltos sin la ayuda de la calculadora gráfica. Sin embargo, los problemas se diseñaron de tal forma que, si se utilizaba esta tecnología, el estudiante tenía la oportunidad de experimentar nuevos esquemas de trabajo con los que él podía construir un conocimiento matemático que fuera coherente, holístico y rico en relaciones tanto desde el punto de vista de las conexiones entre los sistemas de representación, como en sus aspectos estructurales y operacionales. Hubo, sin embargo, algunas situaciones problemáticas que exigían explícitamente el uso de la calculadora para su desarrollo.

## EJEMPLO DE UNA SITUACIÓN PROBLEMÁTICA

No tenemos suficiente espacio en este artículo para presentar un ejemplo de cada uno de los diferentes tipos de situaciones problemáticas que se acaban de describir. Por lo tanto, preferimos presentar un único ejemplo, junto con el tipo de problema correspondiente a ese tema que se utilizaba en el diseño curricular previo a la innovación que involucró las calculadoras gráficas. Se trata entonces de dos problemas pertenecientes a exámenes finales del curso. El primero es uno de los puntos de un examen hecho antes de la introducción de las calculadoras gráficas. El segundo es la totalidad de un examen realizado después de la introducción de la tecnología.

### Primera prueba

- Trace la gráfica de  $y = 2|x - 3| - 1$  usando traslaciones y dilataciones. Muestre sus pasos claramente.
- Resuelva gráficamente la desigualdad  $2|x - 3| - 1 < [x]$  (puede usar la gráfica de a.)
- Resuelva algebraicamente  $|3x + 2| \geq 1$ .

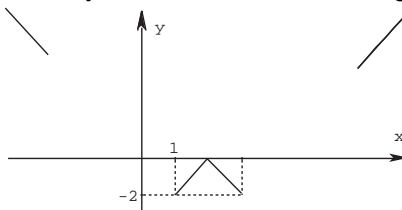
### Segunda prueba

De la función  $f$  se sabe que:

- Es de la forma  $f(x) = ||a(x - b)| - c| - d$ , con  $a, b, c$  y  $d$  reales
- Su expresión como **función a trozos** es de la forma

$$f(x) = \begin{cases} \dots & \text{si } x \leq 1 \\ \dots & \text{si } 1 < x \leq 2 \\ \dots & \text{si } 2 < x \leq e \\ a(x - 4) & \text{si } e < x \end{cases}, \text{ siendo } e \text{ un número real.}$$

- $f(3) = -2$
- El conjunto solución de  $f(x) < 2$  es  $(-1, 5)$
- Una porción de la gráfica de  $y = f(x)$  se muestra en la figura:



Halle la función  $f$ . Para ello, usted debe:

- Hacer la gráfica completa.
- Hallar la expresión de  $f$  como función a trozos (forma b.).
- Hallar la expresión simbólica de  $f$  en la forma a.

4. Verificar que la afirmación d. es verdadera.

## DISCUSIÓN

Un análisis detallado de estas dos pruebas y de su significado como expresión de los dos diseños curriculares sería demasiado extenso para este artículo. No obstante, vale la pena resaltar algunas de sus principales características teniendo en cuenta los elementos conceptuales que se presentaron anteriormente.

La primera prueba insinúa la existencia de procedimientos (de transformaciones sintácticas (Kaput, 1992)) que están bien establecidos en el curso (graficación por pasos con base en traslaciones y dilataciones, resolución gráfica y resolución simbólica de desigualdades). La prueba le da instrucciones al estudiante para que utilice estos procedimientos y solamente estos. Aparentemente, quien conozca los procedimientos, podrá realizar la tarea de manera algorítmica, con un camino visible, con la utilización de criterios sencillos, sin mucho esfuerzo y dentro de un marco en el que el significado está dado (criterios de las matemáticas escolares tradicionales de la descripción de Resnick). Se hace una distinción clara entre lo que se insinúa allí como método gráfico y método simbólico. Las tareas tienen entonces una única forma de realizarse. Las primeras dos tareas tienen una relación aparente (utilización de la primera gráfica en la resolución de la segunda desigualdad), pero son independientes entre sí.

La segunda prueba involucra la construcción de un objeto con base en información parcial proveniente de múltiples dimensiones en las cuales este objeto está involucrado. La tarea no tiene una única forma de ser resuelta y el camino para la acción no se encuentra completamente especificado con anterioridad. Aunque se busca determinar un único objeto, la tarea da lugar a soluciones múltiples en las que se pueden aplicar diversos criterios dentro de un espacio en el que es necesario asignar significado a la información, buscando la estructura subyacente dentro de un desorden aparente. La tarea requiere una buena cantidad de trabajo mental para desarrollar las elaboraciones y los juicios involucrados (criterios del pensamiento de alto nivel). Tanto los diversos sistemas de representación (gráfico, simbólico, tabular), como los tipos de conocimiento (conceptual y procedimental) y las situaciones (desigualdades, representación como función a trozos y con valor absoluto) se encuentran imbricados en una sola problemática.

## NUEVO CURRÍCULO

En esta sección se describen los elementos más distintivos a nivel micro del diseño curricular que fue el resultado de la innovación curricular que involucró la utilización de las calculadoras gráficas. En cambio de hacer una comparación entre los dos diseños curriculares, se presentan aquí las características que diferencian al diseño curricular producto de la introducción de las calculadoras gráficas, del diseño curricular existente antes de la introducción de la tecnología.

### Objetivos

El nuevo diseño curricular resalta algunos aspectos de las metas que se espera que el estudiante logre al final del curso. Se espera que el estudiante construya un conocimiento matemático que sea coherente y holístico en cuanto al reconocimiento de las características comunes de los objetos y las familias estudiados y su capacidad para transferir este conocimiento a otros contextos. Se espera que este conocimiento sea rico en conexiones, tanto desde el punto de vista de los sistemas de

representación interna, como desde el punto de vista del status operacional y estructural de los conceptos matemáticos.

Por otra parte, se busca que el estudiante pueda desarrollar un pensamiento de alto nivel con el que se sienta cómodo al enfrentarse a situaciones desconocidas y con el que reconozca la importancia y la utilidad de la investigación en la construcción del conocimiento matemático.

Finalmente, se espera que el estudiante desarrolle una nueva visión de las matemáticas como un conocimiento, con utilidad práctica, compuesto de problemas y soluciones, que se construye socialmente y en el que son necesarias las capacidades de comunicación, discusión, experimentación y formulación y contrastación de conjeturas.

### **Metodología**

El nuevo currículo introdujo un nuevo programa para el curso. Este programa reemplazó los ejercicios (principalmente repetitivos) por problemas complejos para los que los estudiantes no tienen necesariamente una estrategia de solución pre-establecida. El nuevo programa presenta una mayor flexibilidad al no imponer el tratamiento de contenidos día a día, sino a lo largo de períodos de varios días.

Los cambios en el programa y las instrucciones impartidas y compartidas por los profesores presentan una visión y actitud diferente hacia el papel que debe jugar el profesor en la construcción del conocimiento matemático del estudiante. El profesor tiene mayor libertad y responsabilidad para decidir acerca del diseño y realización de las actividades dentro del salón de clase. Estas actividades se centran ahora en la resolución de situaciones problemáticas que son enfrentadas en la mayoría de los casos por grupos de estudiantes y en las cuales el profesor participa como guía y facilitador de las discusiones entre los estudiantes.

El diseño y la utilización de estas nuevas situaciones problemáticas es una de las características que más resaltan en el nuevo diseño curricular. Estas situaciones problemáticas, que siguen los lineamientos del pensamiento de alto nivel, buscan que sean los estudiantes quienes construyan socialmente su conocimiento matemático dentro de un contexto que simula la comunidad científica en la que se enfatiza la comunicación y la justificación.

### **Contenido**

La secuenciación del contenido del conocimiento a enseñar no presenta diferencias importantes. Sin embargo, el análisis de las situaciones problemáticas utilizadas en el curso evidencia la búsqueda de una mayor profundidad en el tratamiento de los conceptos matemáticos y la intención de presentar este contenido de una manera coherente y conectada que resalte la relación entre los diferentes conceptos y procedimientos involucrados. Aunque se mantiene la misma secuenciación de temas, el programa del curso elimina la resolución de ejercicios e introduce la resolución de situaciones problemáticas como parte de las actividades matemáticas en el salón de clase. Los temas pre-requisito se tratan ahora al comienzo del curso, en cambio de considerarse a lo largo del mismo.

### **Evaluación**

La evaluación jugó un papel trascendental en los cambios que se produjeron en el diseño curricular. Por una parte, desde el momento en que los estudiantes pudieron utilizar las calculadoras gráficas en todas las pruebas se comenzó a producir un cambio en las visiones que los diseñadores del currículo tenían acerca de las matemáticas, su enseñanza y su aprendizaje. Por otra parte, la evaluación dejó de ser exclusivamente una herramienta para clasificar a los estudiantes y pasó también a



asumir un papel de medio de comunicación entre el profesor y los estudiantes a través del cual el primero informa a los segundos acerca de la importancia relativa de algunos aspectos del curso y los estudiantes informan al profesor acerca de sus intereses y sus dificultades. Además de esquemas tradicionales como las tareas, quices y exámenes parciales, se introdujeron nuevos esquemas de trabajo como las situaciones problemáticas ya mencionadas, los proyectos de investigación, los ensayos escritos, los portafolios y las exposiciones orales.

## CONCLUSIONES

Aunque los diseñadores de currículo no eran conscientes de que estaban diseñando tareas que podían tener las características del pensamiento de alto nivel, una proporción importante de las situaciones problemáticas diseñadas tienen estas características. Pensamos que esto es producto de los efectos de la integración de la tecnología en el currículo (Gómez, 1998). En el momento en que esta integración llegó a su etapa de articulación, los diseñadores del currículo se vieron obligados a cambiar sus visiones de las matemáticas, su enseñanza, su aprendizaje, y el papel de la tecnología en estos procesos. De esta forma, las situaciones que diseñaron comenzaron a tener las características que se han descrito en este artículo.

Por lo tanto, no es posible afirmar que toda utilización de tecnología en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas pueda llegar a tener las consecuencias que se han descrito en el diseño curricular. Resulta evidente que para que se logren estos resultados hay unas condiciones necesarias (no sabemos si son suficientes). Por un lado, los efectos se obtendrán únicamente en el momento en que se logre llegar a la etapa de articulación de la tecnología al currículo. Segundo, estos cambios se harán efectivos solamente si los diseñadores de currículo y los profesores encargados de implantarlo en el salón de clase comparten un cierto tipo de visiones acerca de las matemáticas, su enseñanza y su aprendizaje. Por consiguiente, no es evidente cuál puede ser el efecto de la utilización de un currículo de este tipo (que parte de un conjunto de visiones particulares) por parte de profesores que compartan unas visiones diferentes.

## REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Gómez, P. (1998). Graphics calculators integration into curriculum. En Addison Wesley (Ed.). *Proceedings of the tenth International Conference of Technology and Collegiate Mathematics*. Reading, MA: Addison Wesley.
- Gómez, P., Mesa, V.M., Carulla, C., Gómez, C., Valero, P. (Eds.) (1996). *Situaciones problemáticas de precálculo. El estudio de funciones a través de la exploración con calculadoras gráficas*. México: una empresa docente y Grupo Editorial Iberoamérica.
- Kaput, J.J. (1992). Technology and Mathematics Education. En Grouws, D.A. (Ed.). *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*. New York: Macmillan, pp. 515-556.
- Resnick, L.B. (1987). *Education and learning to think*. Washington: National Academy.
- Romberg, T.A. (1993). How one comes to know: Models and theories of the learning of mathematics. En Niss, M. (Ed.). *Investigations into assessment in mathematics education*. Dordrecht: Kluwer.

- Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics*. 22, pp. 1-36.
- Sfard, A. (1992). Operational origins of mathematical objects and the quandary of reification — the case of function. En Dubinsky, E., Harel, G. (Eds.). *The concept of function. Aspects of epistemology and pedagogy (Notes, Volume 25)*. Washington: Mathematical Association of America.
- Valero, P., Gómez, C. (1996). Precalculus and Graphic Calculators: The Influence on Teachers' Beliefs. En Puig, L., Gutiérrez, A. (Eds.). *Proceedings of the 20th PME Conference*. Valencia: Universidad de Valencia, pp. 4.363-4.370.