

INNOVACIÓN CURRICULAR EN PRECÁLCULO CON CALCULADORAS GRÁFICAS*

Pedro Gómez, Vilma María Mesa, Cristina Carulla, Paola Valero, Cristina Gómez
“una empresa docente”, Universidad de los Andes
pgomez@uniandes.edu.co • vmesa@sage.coe.uga.edu

La utilización de las calculadoras gráficas en la enseñanza y el aprendizaje del precálculo puede mirarse, no solamente desde el punto de vista de sus efectos en aspectos particulares del currículo, sino también desde la perspectiva de la complejidad y la dinámica del sistema curricular en el que se introduce, de tal manera que sea posible explorar la forma como sus elementos se relacionan y evolucionan en el tiempo. Con base en esta perspectiva, se estudiaron los efectos de la introducción de las calculadoras gráficas en un curso de precálculo de nivel universitario. Utilizando un esquema cuasi-experimental en el que se recogió información de un grupo de estudiantes que siguió el currículo tradicional y de otros grupos que utilizaron la calculadora, se estudiaron múltiples aspectos curriculares de la innovación. La utilización de la tecnología influyó en las visiones que la institución encargada del diseño curricular, la profesora y los alumnos tenían acerca de las matemáticas, de su enseñanza y de su aprendizaje. Este efecto en las visiones, junto con otros factores (como, por ejemplo, el cambio en la percepción de la autoridad por parte del estudiante) influyeron en el comportamiento de cada uno de los actores: la institución reformuló el diseño curricular y el tipo de actividades que propuso para ser realizadas como parte del proceso de enseñanza y aprendizaje y la profesora y los alumnos cambiaron su comportamiento y sus actitudes dentro del salón de clase. Estos cambios en los comportamientos y los resultados de los mismos (i.e., nuevas actividades) influyeron en la forma como profesora y estudiantes interactuaron dentro del proceso de construcción del conocimiento matemático y los cambios en esta interacción tuvieron consecuencias en el rendimiento y las actitudes de los estudiantes.

TECNOLOGÍA Y EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Para que la introducción de la tecnología tenga sentido, se necesita que el diseño curricular propuesto por la institución educativa (como plan de trabajo que determina qué conocimiento matemático deben aprender los estudiantes y de qué manera debe ser enseñado) se articule teniendo en cuenta la presencia de la tecnología. El diseño curricular es, en general, producto de las visiones que la institución tiene acerca del profesor y del proceso de enseñanza que él propone, del estudiante y del proceso de aprendizaje que él realiza y de la naturaleza del conocimiento matemático a enseñar. Este diseño curricular puede afectar inicialmente las decisiones que toma el profesor en el salón de clase, generando nuevos comportamientos en su interacción con el estudiante en el proceso de construcción del conocimiento matemático. El comportamiento del estudiante puede verse afectado tanto por el comportamiento del profesor y la cultura del salón de clase, como también por el tipo de medios en los que puede realizar su trabajo privado. Estos nuevos comportamientos del profesor y del estu-

*. El trabajo que se reporta aquí recibió apoyo de COLCIENCIAS, Texas Instruments, el PLACEM y la Fundación para el Avance de Ciencia y Tecnología del Banco de la República.

La integración de las calculadoras gráficas al currículo pasó por tres etapas (Gómez, 1997). Una etapa de *introducción* en la que la calculadora gráfica era un elemento complementario pero independiente de los otros elementos del sistema curricular. Una segunda etapa de *adaptación* en la que se buscó que los alumnos utilizaran las calculadoras gráficas en la realización de las tareas que se les daban, pero estas tareas no estaban específicamente diseñadas para este efecto y los estudiantes no podían utilizar las calculadoras gráficas en las evaluaciones. Finalmente, una etapa de *articulación* en la que la que los estudiantes tuvieron las calculadoras gráficas a su disposición todo el tiempo, podían utilizarlas en las evaluaciones y las tareas estaban diseñadas teniendo en cuenta la presencia de la tecnología.

Algunos proyectos (como los de actitudes y rendimiento de los estudiantes) recogieron información al final de la etapa de articulación. Esta información provino de un nuevo grupo de estudiantes que vieron el curso con un miembro del equipo de investigación diferente de la profesora que dictó los cursos para los grupos de control y experimental.

PROYECTOS

Con base en el modelo propuesto en la figura N° 1, se diseñaron cinco proyectos. Cada uno de estos proyectos buscó explorar un aspecto curricular particular. Los aspectos considerados fueron los siguientes: diseño curricular, creencias del profesor, desarrollo curricular, actitudes de los estudiantes, comprensión y rendimiento de los estudiantes. A continuación se describe el diseño y los resultados obtenidos en cada uno de estos estudios.

Diseño curricular

Este proyecto buscó explorar los cambios en el diseño curricular del curso con motivo de la utilización de las calculadoras gráficas. El proyecto partió de una visión de currículo como el plan de trabajo que determina qué conocimiento matemático deben aprender los estudiantes y de qué manera y dentro de qué contexto éste debe ser enseñado.

Se analizaron diversos documentos relativos al curso, tanto para el semestre anterior a la introducción de las calculadoras (primero de 1993), como para el primer semestre de 1995, tres semestres después de que éstas fueron introducidas. Para obtener información sobre el diseño curricular que existía antes de la introducción de las calculadoras se analizaron los documentos que describían el curso (“una empresa docente” y Departamento de Matemáticas, 1992), el libro de texto que se estaba utilizando (Echeverri et al., 1991) y algunos talleres y pruebas de evaluación. El diseño curricular producto de la introducción de las calculadoras gráficas se dedujo a partir de los documentos de trabajo del programa de investigación, de las actas de las reuniones que durante tres semestres se realizaron con motivo de este programa y de un libro de situaciones problemáticas que se produjo y se utilizó posteriormente en el curso (Gómez y Mesa, 1996).

Se identificaron diferencias importantes en las visiones sobre las cuales se basan los diseños curriculares propuestos por el Departamento de Matemáticas y por “una empresa docente”, antes y después de la introducción de las calculadoras gráficas. Antes de la introducción de la tecnología, la primera institución percibe las matemáticas como un cuerpo de conocimientos con un propósito práctico (la resolución de ejercicios) en el que los diversos temas y aspectos de este conocimiento aparecen desconectados. Desde el punto de vista del aprendizaje, se espera que el estudiante sea capaz de resolver ejercicios en los que se enfatizan las características de los ob-

jetos matemáticos, construya su conocimiento de manera individual y desarrolle una visión de las matemáticas como un conocimiento verdadero a priori. El programa del curso define un espacio restringido de actuación del profesor en el que, a través de un seguimiento del libro de texto, se presenta y discute la teoría, y, a continuación, se resuelven ejemplos y ejercicios en los que se enfatiza la validez de las respuestas dadas a ellos. La evaluación tiene como principal propósito la clasificación de los estudiantes.

Después de la introducción de las calculadoras gráficas la visión de la institución (“una empresa docente”) es diferente a la anterior (Carulla y Gómez, 1996). El conocimiento matemático se ve ahora como un conocimiento en evolución, construido socialmente y abierto a la experimentación y a la formulación y contrastación de conjeturas. Los objetos matemáticos que hacen parte del conocimiento a enseñar se presentan y trabajan dentro de una mayor complejidad que involucra múltiples dimensiones y en la que se busca integrar los sistemas de representación y los tipos de conocimiento, tomando el concepto de familia de funciones como un elemento integrador. Desde el punto de vista del aprendizaje, se espera que el estudiante construya socialmente un conocimiento matemático con aplicaciones prácticas, en el que sea posible percibir la globalidad de los objetos matemáticos dentro de sus múltiples dimensiones y que le permita resolver problemas complejos asociados con el pensamiento de alto nivel (Resnick, 1987). El nuevo programa genera un espacio más amplio en el que el profesor debe asumir mayores responsabilidades. La interacción entre el profesor y los estudiantes gira alrededor de la resolución de situaciones problemáticas, el libro de texto se utiliza como referencia y la evaluación se transforma en un medio de comunicación entre el profesor y los estudiantes.

El análisis, a nivel micro, del nuevo diseño curricular también revela cambios importantes como consecuencia de la introducción de las calculadoras gráficas. En el nuevo diseño curricular se espera que el estudiante construya un conocimiento matemático que sea coherente, holístico y rico en conexiones. Se espera que el estudiante se sienta cómodo al enfrentarse a situaciones desconocidas, reconozca la importancia de la experimentación, la discusión, la investigación y la formulación y la contrastación de conjeturas en la construcción del conocimiento matemático y desarrolle una visión de las matemáticas como un conocimiento con utilidad práctica que se construye socialmente. Este nuevo diseño curricular estuvo basado en la resolución de situaciones problemáticas que fueron enfrentadas en la mayoría de los casos por grupos de estudiantes y en las cuales el profesor participó como guía y facilitador de las discusiones de los estudiantes. El profesor tuvo mayor libertad y responsabilidad para decidir acerca del diseño y realización de estas actividades en el salón de clase. Las situaciones problemáticas utilizadas dentro del nuevo diseño curricular se caracterizan por buscar el desarrollo del pensamiento de alto nivel presentando un tratamiento más profundo de los conceptos matemáticos (ver nuestro artículo *Situaciones problemáticas de precálculo. El estudio de funciones a través de la exploración con calculadoras gráficas* en este volumen). La evaluación dejó de ser exclusivamente una herramienta para clasificar a los estudiantes y pasó también a asumir un papel de medio de comunicación entre el profesor y los estudiantes a través del cual el primero informaba a los segundos acerca de la importancia relativa de algunos aspectos del curso y los estudiantes informaban al profesor acerca de sus intereses y sus dificultades.

Creencias del profesor

Dado el amplio reconocimiento que la comunidad de investigadores en educación matemática ha dado a la importancia de estudiar las creencias del profesor como

consecuencia de la conexión fuerte que existe entre el conjunto de visiones que el profesor profesa sobre los elementos que hacen parte de su ejercicio profesional y su práctica docente propiamente dicha (Thompson, 1992), este estudio se propuso explorar la influencia del uso de la calculadora gráfica, como elemento articulador del currículo del curso de Precálculo, sobre el sistema de creencias del profesor.

Con base en la tipología de Paul Ernest (1991) para las diversas ideologías sociales de la educación matemática, se definieron cinco tipos de profesores (entrenador, tecnólogo, humanista, progresista y crítico) y se describió, para cada uno de ellos, sus posiciones correspondientes a las visiones de las matemáticas, de los objetivos de la educación matemática, de la enseñanza y aprendizaje de las mismas y del papel de los recursos instruccionales en este proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.

El proyecto tuvo un diseño cuasi-experimental con dos etapas: una previa al cambio curricular que introducía las calculadoras y otra durante el cambio en el currículo. En ambas etapas se identificó el sistema de creencias del profesor y posteriormente se compararon cada una de las descripciones para así poder concluir algo acerca de las posibles influencias del uso de las calculadoras gráficas en las creencias del profesor sobre los diversos aspectos que intervienen en el proceso de enseñanza - aprendizaje. Se utilizó una triangulación metodológica que consistió en la aplicación de varias técnicas de investigación. Tales técnicas fueron la observación de video grabaciones de clases, un instrumento de creencias (Ibrahim, 1990) —una prueba escrita que, por medio de una escala de Likert, indagaba sobre las visiones de las matemáticas— y las entrevistas guiadas sobre la observación de clases y sobre el instrumento de creencias. Esta diversidad de técnicas e instrumentos permitió abordar de manera eficiente la manifestación de las creencias en lo que el profesor “hace”, “dice” y “piensa” y comparar estas tres dimensiones para tener una mejor descripción del estado del sistema antes y después de la implantación del nuevo diseño curricular.

Se encontró que, durante la etapa sin calculadoras, la profesora participante en el proyecto compartía la posición del profesor entrenador, lo cual significa creer que las matemáticas son un conjunto de verdades y reglas que el profesor transmite dado su rol de autoridad; el objetivo de enseñar matemáticas se centra en la mecanización de destrezas básicas; la enseñanza consiste en una transmisión de habilidades y el aprendizaje se logra a través de la repetición y mecanización de ejercicios; y los recursos instruccionales válidos son el papel y el lápiz esencialmente. Si bien no se encontraron cambios significativos en el sistema de creencias durante el periodo de introducción de la innovación curricular, sí se observó una alteración del sistema de creencias. Esta desestabilización se manifestó en el hecho de que, a pesar de seguirse conservando una posición de entrenador con respecto a la visión de las matemáticas, los comportamientos del profesor en clase mostraban alteraciones en sus posiciones con respecto a los objetivos de la educación matemática, la enseñanza, el aprendizaje y los recursos.

Estos resultados mostraron que más que un cambio real en las creencias del profesor con motivo del nuevo currículo y de la introducción de la calculadora gráfica, se propició un proceso de cuestionamiento con respecto a lo que el profesor hace dentro del salón de clase. Este cuestionamiento, en el corto plazo, se manifestó en comportamientos diferentes y en expresiones de asombro frente a lo que estaba sucediendo en la clase; pero en el largo plazo ha significado el inicio de un cambio más estable en el sistema de creencias y, por lo tanto, en el ejercicio docente de la profesora participante en el proyecto.

Desarrollo curricular

Este proyecto buscó estudiar los efectos de la presencia de la calculadora gráfica en la “cultura del salón de clase” (Nickson, 1992) desde dos perspectivas: la interacción social entre el profesor y los alumnos y el discurso matemático de profesor y alumnos (Gómez y Rico, 1995; Gómez, 1995).

Con base en el concepto de segmento como “bloque de tiempo durante una clase que tiene un propósito, un foco y un patrón de actividad preciso” (Burns & Lash, 1987, p. 395), se analizaron las grabaciones de video correspondientes a las clases de funciones cuadráticas en el grupo de control y en el grupo experimental. Cada segmento se caracteriza por la construcción de un discurso matemático, basado en la interacción social entre profesor y alumnos, alrededor de la realización de una tarea matemática. Se realizó también un análisis microetnográfico (Voigt, 1985, 1989) de un segmento específico para cada uno de los dos grupos.

Se apreció un cambio entre el grupo de control y el grupo experimental en los roles que profesora y alumnos asumieron en la interacción. Por una parte, en el grupo experimental, los alumnos participaron activamente en la determinación de las tareas que se realizaron en el salón de clase, situación que fue inexistente en el grupo de control. Por otra parte, la profesora pasó de una situación en la que hacía presentaciones literales del contenido, corregía inmediatamente los errores de los alumnos, no inducía a los estudiantes a presentar, desarrollar y justificar sus iniciativas e imponía su propia autoridad ante los alumnos a otra en la que generó situaciones problemáticas con propósitos didácticos, dio oportunidad a que el estudiante corrigiera sus errores, permitió que estos existieran durante un tiempo e indujo a los alumnos a que desarrollaran y justificaran sus iniciativas. Desde el punto de vista de los estudiantes, se pasó de una situación en la que ellos esperaban las instrucciones o el desarrollo literal del tópico por parte de la profesora, requerían de la autoridad de ella y no exponían iniciativas propias a otra en la que cuestionaron la autoridad de la profesora y presentaron iniciativas propias. Finalmente, la interacción entre los alumnos también presentó diferencias relevantes. En este caso, se pasó de una situación en la que hay muy poca interacción entre los alumnos a otra en la que se da discusión entre los alumnos y éstos justifican y explican sus discursos.

El discurso en el grupo de control y en el grupo experimental fue similar en la mayoría de sus dimensiones. Las únicas diferencias relevantes se aprecian en las variables de aporte de cada uno de los actores. En esta dimensión, se aprecia una participación menos intensa de la profesora en la construcción del discurso y el correspondiente aumento de la participación de los alumnos en este proceso. Esta situación parece ser consistente con el comportamiento de las variables de interacción social. Finalmente, es importante resaltar que la calculadora gráfica fue muy poco utilizada en los discursos de los tres actores.

Comprensión

El propósito de este estudio fue el de explorar algunos de los aspectos relacionados con el proceso de comprensión del concepto de función y del papel de la calculadora gráfica en ese proceso (Mesa y Gómez, 1996). La exploración se organizó con base en dos aspectos: el manejo de los sistemas de representación y la dualidad operacional–estructural de los conceptos matemático. Se diseñó y aplicó una prueba al comienzo y al final del curso tanto a los estudiantes del grupo de control, como a los del grupo experimental. Partiendo de la propuesta de Ruthven (1990), el test se diseñó teniendo en cuenta los dos aspectos mencionados anteriormente.

Se observaron diferencias en cuanto al uso de estrategias en cada grupo. Las respuestas de los cuestionarios del comienzo del semestre evidenciaron estrategias que

no se observaron en las respuestas del final del semestre. Sin embargo, ambos grupos utilizaron las mismas estrategias al finalizar el semestre. Las estrategias utilizadas fueron aquellas que se aprendieron durante el curso. No hubo estrategias diferentes, pero hubo variaciones en cuanto al tratamiento de los pasos de las estrategias.

El grupo experimental utilizó estrategias que, en el segundo análisis, mostraron una tendencia a tener pasos que se clasificaron en la casilla Operacional – Gráfico y una combinación de pasos que se clasificaron en las casillas Operacional – Gráfico y Estructural – Simbólico. En el grupo de control predominaron los pasos clasificados en las casillas Operacional – Gráfico y Operacional – Simbólico.

El trabajo exploratorio desarrollado corroboró resultados obtenidos en otros estudios en el sentido de que los ambientes de aprendizaje apoyados en tecnología por sí solos no ayudan a los estudiantes a decidir qué rasgos de los conceptos matemático son los relevantes y no les facilitan la descripción de sus observaciones y conclusiones. La tecnología, junto con el currículo y el profesor, son los que pueden determinar diferencias importantes con respecto a la evolución de las visiones de los conceptos desde una perspectiva operacional hacia una estructural y los que pueden ayudar a desarrollar la capacidad de manejar diversos sistemas de representación de manera espontánea (Kieran, 1992). El hecho de que el grupo experimental no pudo utilizar la calculadora durante las evaluaciones evidenció mucho más lo anterior. Aunque los estudiantes utilizaron bastante el recurso durante y fuera de las clases, las situaciones problemáticas en las que trabajaron repetían el modelo estándar de evaluación y la calculadora pasó a ser un elemento de verificación de procedimientos y no un recurso de apoyo en la exploración, formulación de conjeturas, predicción, entre otros, usos que se han observado en grupos de estudiantes que pueden utilizar la tecnología en todo momento, incluidas las evaluaciones.

Rendimiento

Este estudio exploró los efectos de la utilización de las calculadoras gráficas en el rendimiento con base en los resultados de los estudiantes en el curso de cálculo al cual acceden una vez han aprobado el curso de precálculo correspondiente. Los estudiantes no pueden utilizar la tecnología en este curso (Gómez y Fernández, 1997). Se analizaron las calificaciones finales en el curso de cálculo del primer semestre de 1995 de aquellos estudiantes que vieron el curso de precálculo en el segundo semestre de 1994, con y sin calculadoras. Se realizaron pruebas de hipótesis sobre el promedio de la calificación para estos dos grupos y sobre el porcentaje de retención (proporción de estudiantes que aprueban el curso con respecto al número de estudiantes inicialmente inscritos en él) en el curso de precálculo y en el curso de cálculo.

Los resultados muestran que no hay diferencias significativas entre los dos grupos (con y sin calculadoras) en el promedio de calificación y en el porcentaje de retención en el curso de cálculo. Por otra parte, se encuentran diferencias significativas en el porcentaje de retención en el curso de precálculo, diferencias que favorecen al grupo de estudiantes que vio el curso con la presencia de las calculadoras gráficas.

Estos resultados sugieren que la utilización de las calculadoras gráficas no afecta la formación matemática del estudiante en aquellas habilidades matemáticas que pueden ser reemplazadas por la tecnología; le da la oportunidad a más estudiantes de continuar su ciclo académico en matemáticas con las mismas probabilidades de éxito; y permite, para un mismo nivel de formación matemática, que un mayor número de estudiantes aprueben el curso de precálculo.

Actitudes de los estudiantes

Este estudio buscaba explorar los efectos de la introducción de las calculadoras gráficas en las actitudes de los estudiantes hacia las matemáticas (ver el artículo *Calculadoras gráficas y precálculo. Las actitudes de los estudiantes* en este volumen). Para ello, se utilizaron tres instrumentos de recolección y análisis de la información: la prueba de actitudes de Fennema y Sherman (Fennema y Sherman, 1976), entrevistas clínicas y un ensayo escrito por los estudiantes. Con los dos primeros se realizó un diseño cuasi-experimental en el que se recogió información al comienzo y al final del semestre tanto del primer grupo (control), como del segundo grupo (experimental). Los estudiantes pertenecientes a un grupo que cursó la asignatura un año más tarde y con un profesor diferente escribieron un ensayo sobre la asignatura que acaban de cursar.

Aunque no se perciben diferencias relevantes en los aspectos considerados por la prueba de actitudes, las entrevistas y los ensayos sí permiten sugerir que la utilización de las calculadoras gráficas afectan significativamente las actitudes de los estudiantes. Se observó que la visión de los estudiantes con respecto a su competencia en matemáticas se relaciona directamente con el esfuerzo que ellos deben invertir en su trabajo. Los estudiantes presentan una percepción de las matemáticas como algo que se encuentra en todas partes y que tiene una utilidad práctica, aunque los estudiantes no resaltan el carácter personal e inmediato de esta utilidad. Aunque las entrevistas y los ensayos no muestran cambios importantes en el gusto de los estudiantes al hacer matemáticas, es evidente que los estudiantes que cursaron el curso con calculadoras gráficas perciben los problemas matemáticos como un reto que pueden afrontar con tranquilidad y seguridad.

Los resultados obtenidos con las entrevistas permiten concluir que la asignatura en cuestión, independientemente de la presencia de las calculadoras gráficas, afecta algunos aspectos de las visiones de los estudiantes. Al final del semestre, su percepción de las matemáticas es diferente de la que construyeron durante su experiencia escolar. Ellos se sienten menos preocupados y más seguros, reconocen la importancia del esfuerzo personal en el éxito en el curso y de la comprensión de la teoría para desarrollar una capacidad de “análisis” en contraposición con la actitud memorística y los procedimientos mecánicos que desarrollaron en el colegio. No obstante, los estudiantes que utilizaron las calculadoras gráficas enfatizan la importancia de la representación gráfica en su visión de las matemáticas, ven las matemáticas como un discurso acerca de un conjunto de objetos que es necesario “ver” y reconocen el trabajo en grupo como medio en el proceso de aprendizaje.

Los ensayos confirman y profundizan algunos de los resultados obtenidos en las entrevistas. Por una parte, el auto-concepto de los estudiantes se centra en la importancia del trabajo individual para el curso. Su visión de las matemáticas y del aprendizaje está en clara contraposición con las creencias típicas de los estudiantes. En este caso, los estudiantes perciben las matemáticas como un discurso y no como un conjunto de fórmulas; reconocen que los problemas pueden tener más de una respuesta y que pueden haber diversas estrategias para resolverlos; y son conscientes de las aplicaciones prácticas de las matemáticas. Por otra parte, los estudiantes enfatizan la importancia de comprender los temas en contraposición con memorizar procedimientos y reconocen que aprender matemáticas significa ser capaz de establecer relaciones entre los conceptos matemáticos, poder percibir estas relaciones dentro de una globalidad y ser capaz de comunicarse con los demás dentro de un ambiente de interacción social.

EFFECTOS EN EL SISTEMA CURRICULAR

Este estudio buscó tener una visión global de la problemática al partir de un modelo del sistema curricular (Figura N° 1) y al estudiar los efectos de la utilización de las calculadoras gráficas en varios de los elementos de ese modelo. Aunque la descripción de estos efectos para cada uno de los elementos por separado no permite sacar conclusiones acerca de la dinámica dentro de la cual estos elementos interactuaron entre ellos, los resultados obtenidos y la experiencia vivida por parte del grupo de investigadores sí permite formular algunas conjeturas acerca de la dinámica de este proceso y de las razones por las cuales tuvieron lugar los cambios y las interacciones que han sido descritos anteriormente. A continuación, y con base en los resultados de cada uno de los proyectos descritos anteriormente, se hace una reflexión sobre los efectos de la utilización de las calculadoras gráficas en el sistema curricular. Se busca identificar aquellos elementos y relaciones del sistema que se vieron afectados por la innovación y conjeturar sobre la forma como los cambios en cada uno de estos elementos influyó en el resto del sistema.

La mayor parte de los proyectos que hicieron parte de este estudio recogieron su información en dos momentos del proceso: antes de la introducción de la tecnología y durante la segunda etapa. Los proyectos de diseño curricular y actitudes recogieron y analizaron información proveniente de la tercera etapa. La descripción del proceso, en sus diferentes etapas, hace evidente el papel del diseño curricular, y por consiguiente de las visiones de la institución, en los cambios dentro del sistema curricular. Sin embargo, se hace necesario analizar el proceso desde dos perspectivas: lo que sucedió durante la etapa de adaptación y lo que sucedió durante la etapa de articulación.

Etapa de adaptación

En esta etapa, la profesora, de cuyo curso se recogió información, recibió una instrucción básica acerca del manejo de la calculadora y unas recomendaciones generales sobre el manejo del curso. Adicionalmente, ella participó en las reuniones periódicas durante las cuales se discutió acerca de los cambios en el diseño curricular, de las actividades que se realizaban en clase y del transcurso general del curso. Se esperaba que ella siguiera el currículo oficial existente y que interpretara y adaptara la información que recibía por parte del grupo de investigadores que se encontraba iniciando el proceso de innovación curricular.

Los resultados del proyecto de creencias muestran que estos factores, junto con el hecho de que cada uno de sus estudiantes tuvieron a su disposición una calculadora que podían utilizar dentro y fuera del salón de clase, tuvieron una influencia clara en su comportamiento en el salón de clase e influyeron en sus opiniones acerca de diversos aspectos relacionados con sus creencias. Estos cambios en su comportamiento en el salón de clase y en las entrevistas no son necesariamente consecuencia de un cambio profundo en sus creencias en el corto plazo.

Los cambios en el comportamiento de la profesora dentro del salón de clase resultaron evidentes en el proyecto de desarrollo curricular. Los estudiantes también cambiaron su comportamiento y esto tuvo como consecuencia la aparición de esquemas de interacción social dentro del salón de clase que fueron claramente diferentes de aquellos que fueron identificados en el grupo de control. Es evidente que los comportamientos de la profesora y de los alumnos se influyeron mutuamente y que cada actor se adaptó al comportamiento y a la actitud del otro. Es posible pensar que una actitud y un comportamiento diferente de la profesora habría podido evitar que aparecieran nuevos comportamientos por parte de los estudiantes y que, por consiguiente, la profesora propició los cambios al permitir la existencia de un espacio dentro

del cual estos tuvieran lugar. También resulta claro que el comportamiento de los estudiantes influyó en el comportamiento de la profesora y en los patrones de interacción resultantes. En este punto, el proyecto de desarrollo curricular insinúa que la utilización de las calculadoras por parte de los estudiantes generó cambios importantes en la visión que los estudiantes tenían de las matemáticas, de su enseñanza y de su aprendizaje, cambios que fueron reportados en el proyecto de actitudes. Estas nuevas visiones acerca de sí mismo, de su relación con el conocimiento matemático y con los aspectos didácticos del curso, influyeron en el comportamiento del estudiante dentro del salón de clase.

Los cambios en la interacción entre el profesor y los estudiantes en la construcción del conocimiento matemático y en la relación entre el estudiante y este conocimiento matemático tuvieron consecuencias en el aprendizaje y en el rendimiento de los estudiantes. De la misma forma, y como ya se mencionó, los cambios en el sistema curricular también influyeron en las actitudes de los estudiantes y éstas, a su vez, tuvieron influencia en otros elementos del sistema.

En resumen, los resultados obtenidos hacen evidente la complejidad del sistema curricular y la forma dinámica como la introducción de las calculadoras gráficas puede influir en los diferentes elementos y relaciones del mismo. La complejidad y la dinámica del sistema no permiten comprender el funcionamiento detallado de la innovación curricular dentro del sistema. No obstante, resulta evidente que la tecnología influye, o puede influir (de diversas formas), en la institución encargada del diseño curricular, en el profesor y en el alumno. Esta influencia pareció tener, en el caso de este programa, un primera consecuencia a nivel de las visiones que cada uno de estos actores tienen acerca de las matemáticas, de su enseñanza y de su aprendizaje. Este efecto en las visiones, junto con otros factores coyunturales (como, por ejemplo, el cambio en la percepción de la autoridad por parte del estudiante) influyeron en el comportamiento de cada uno de los actores: la institución comenzó a reformular el diseño curricular y el tipo de actividades que propuso para ser realizadas por estudiantes y profesora, la profesora cambió su comportamiento y sus actitudes dentro del salón de clase y el estudiante también expresó cambios en su comportamiento. Estos cambios en los comportamientos y los resultados de los mismos (i.e., nuevas actividades) influyeron en la forma como profesora y estudiantes interactuaron dentro del proceso de construcción del conocimiento matemático y los cambios en esta interacción pudieron tener consecuencias en la comprensión y las actitudes de los estudiantes.

Etapa de articulación

El paso de la etapa de adaptación a la etapa de articulación estuvo caracterizado por dos factores metodológicos. Por una parte, se permitió la utilización de las calculadoras en todas las pruebas de evaluación. Por la otra, todos los estudiantes de todas las secciones del curso que participaban en la innovación tuvieron a su disposición una calculadora en todo momento, dentro y fuera de clase.

La posibilidad de que los estudiantes pudieran utilizar las calculadoras gráficas durante las evaluaciones representó un momento clave del proyecto de innovación curricular. La utilización de la tecnología en las evaluaciones impone nuevas condiciones sobre el conocimiento a enseñar, los objetivos, la metodología y la evaluación que no se dan de manera tan explícita e intensa cuando la tecnología está presente pero los estudiantes no la pueden utilizar en las pruebas.

Dadas las posibilidades que la calculadora ofrece al estudiante desde el punto de vista de las estrategias que él puede utilizar para realizar una tarea, los diseñadores del currículo y el profesor tienden a diseñar y utilizar tareas más adaptadas a estas

circunstancias. Las tareas de naturaleza algorítmica, de carácter puramente simbólico en las que se conoce con anterioridad el procedimiento para obtener una única respuesta, pierden sentido, al menos desde el punto de vista del profesor. Se hace necesario que las nuevas tareas profundicen en el conocimiento a enseñar (complejidad de los objetos y los procesos matemáticos involucrados) y tengan en cuenta y potencien la multiplicidad de estrategias que el estudiante tiene ahora a su disposición.

Estas nuevas condiciones sobre el sistema curricular indujeron a los diseñadores del currículo a cuestionar sus visiones acerca de las matemáticas, su aprendizaje, su enseñanza y el papel de la tecnología en el proceso de enseñanza y aprendizaje. Los cambios en el diseño curricular (nuevas situaciones problemáticas) son producto de este cuestionamiento y de la evolución en estas visiones.

Una de las características más importantes de la tercera etapa reside en que tuvo lugar una articulación coherente de la tecnología y el currículo. Esta articulación giró alrededor del diseño y puesta en práctica de situaciones problemáticas que, siendo expresión de un cambio de visiones por parte de la institución encargada de la innovación, tuvieron en cuenta las potencialidades y funcionalidades de la calculadora como medio “amplificador” del trabajo de los estudiantes (Dreyfus, 1994). Esta capacidad amplificadora de la calculadora se expresa en la riqueza y variedad de estrategias y actividades matemáticas que son favorecidas y potenciadas de manera específica por el acceso al medio tecnológico.

Al poner rápida y “automáticamente” a disposición del estudiante la representación gráfica de los objetos matemáticos que se encuentran involucrados en la tarea a realizar, la calculadora gráfica influye en el tipo de estrategias que él puede seguir para realizar la tarea. El estudiante tiene a su disposición el tiempo de trabajo que habría utilizado produciendo la gráfica por otros medios. El estudiante “ve” el problema, en el sentido de que la solución a éste deja de ser exclusivamente una situación en la que es necesario efectuar una sucesión de procedimientos que transforman unas expresiones simbólicas en otras. Cuando se efectúan manipulaciones simbólicas, éstas tienen sentido, al menos en cuanto a su relación con la representación gráfica (Carulla y Gómez, 1997). El estudiante puede y tiende a experimentar y a formular conjeturas, dado que la calculadora le permite rápidamente conocer los resultados de estos experimentos (“¿cómo es la gráfica de ...?”) y contrastar estas conjeturas (“¿qué pasa si...?”). El estudiante tiende, de manera natural, a verificar el resultado de su trabajo; a identificar cuándo el resultado no es válido; a reconocer que ha cometido errores; a buscar e identificar estos errores; a reconocer las causas que los produjeron; y a corregirlas. Finalmente, las características físicas (e.g., tamaño) de este nuevo medio de trabajo matemático inducen al estudiante a compartir y justificar sus realizaciones, a criticar el trabajo de sus compañeros y, en general, a generar un espacio más fértil de interacción social.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Carulla, C., Gómez, P. (1996). Graphic calculators and precalculus. Effects on curriculum design. En Puig, L., Gutiérrez, A. (Eds.). *Proceedings of the 20th PME Conference*. Valencia: Universidad de Valencia, pp. 1-161.
- Carulla, C., Gómez, P. (1997). Graphic calculators and problem solving. Do they help?. En Pehkonen, E. (Ed.). *Proceedings of the PME 21 Conference*. Lahti: University of Helsinki, pp. 1.224.
- Dreyfus, T. (1994). The role of cognitive tools in mathematics education. En Biehler, R., et al. (Eds.). *Didactics of Mathematics as a Scientific Discipline*. Dordrecht: Kluwer, pp. 201-211.

- Echeverri, H., et al. (1991). *Precálculo*. Bogotá: Universidad de los Andes.
- Ernest, P. (1991). *The Philosophy of Mathematics Education. Studies in Mathematics Education*. London: The Falmer Press.
- Fennema, E., Sherman, J.A. (1976). Fennema–Sherman Mathematics attitudes scales. *JSAS Catalog of Selected Documents in Psychology*. 6(31).
- Gómez, P. (1995). *Interacción social, discurso matemático y calculadora gráfica en el salón de clase. Una aproximación experimental*. Granada: Universidad de Granada y una empresa docente.
- Gómez, P. (1998). Graphics calculators integration into curriculum. En Addison Wesley (Ed.) *Proceedings of the tenth International Conference of Technology and Collegiate Mathematics*. Reading, MA: Addison Wesley.
- Gómez, P., Fernández, F. (1997). Graphics calculators use in Precalculus and achievement in Calculus. En Pehkonen, E. (Ed.). *Proceedings of the 21th PME Conference*. Lahti: University of Helsinki, pp. 3.1-3.8.
- Gómez, P., Mesa, V.M., Carulla, C., Gómez, C., Valero, P. (Eds.) (1996). *Situaciones problemáticas de precálculo. El estudio de funciones a través de la exploración con calculadoras gráficas*. México: una empresa docente y Grupo Editorial Iberoamérica.
- Gómez, P., Rico, L. (1995). Social interaction and mathematical discourse in the classroom. En Meira, L., Carraher, D. (Eds.). *Proceedings of the 19th PME Conference*. Recife: Universidade Federal de Pernambuco, pp. I-205.
- Ibrahim, H. (1990). A multidimensional mathematics belief instrument with content and construct validity and its application to elementary and secondary preservice teachers. *Documento no publicado*.: The Pennsylvania State University.
- Kieran, C. (1992). The learning and teaching of school algebra. En Grouws, D.A. (Ed.). *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*. New York: Macmillan.
- Mesa, V.M., Gómez, P. (1996). Graphing calculators and Precalculus: an exploration of some aspects of students' understanding. En Puig, L., Gutiérrez, A. (Eds.). *Proceedings of the 20th PME Conference*. Valencia: Universidad de Valencia, pp. 3.391-3.399.
- Nickson, M. (1992). The culture of the mathematics classroom: An unknown quantity?. En Grouws, D.A. (Ed.). *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*. New York: Macmillan.
- Resnick, L.B. (1987). *Education and learning to think*. Washington: National Academy.
- Ruthven, K. (1990). The influence of graphic calculators use on translation from graphic to symbolic forms. *Educational Studies en Mathematics*. 21, pp. 431-450.
- Thompson, A.G. (1992). Teacher's Beliefs and Conceptions: A Synthesis of the Research. En Grouws, D.A. (Ed.) *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*. New York: Macmillan, pp. 127-146.
- Voigt, J. (1985). Patterns and routines in classroom interaction. *Recherches en Didactique des Mathématiques*. 6(1), pp. 69-118.
- Voigt, J. (1989). The social constitution of the Mathematics province — A microethnographical study in classroom interaction. *The Quaterly Newsletter of the Laboratory of Comparative Human Cognition*. 11(1 & 2), pp. 27-34.