Universitat d'Alacant
Universidad de Alicante

GIDIMAT-UA
GRUPO DE INVESTIGACIÓN
DE DIDÁCTICA DE LA MATEMÁTICA
UNIVERSIDAD DE ALICANTE

DESARROLLO DE LA COMPETENCIA MIRAR PROFESIONALMENTE EN LOS PROGRAMAS DE FORMACIÓN DE PROFESORES DE MATEMÁTICAS

Ceneida Fernández
Universidad de Alicante (España)
ceneida.fernandez@ua.es

coReflect@maths
Digital Support for Teachers' Collaborative Reflection on Mathematics Classroom Situations

GOBIERNO DE ESPAÑA
MINISTERIO DE ECONOMÍA Y COMPETITIVIDAD

GENERALITAT VALENCIANA
Conselleria d'Educació, Cultura i Esport

Contexto

Competencia docente mirar profesionalmente

Formadores de profesores

Diseñar programas de formación para desarrollar la competencia

Experimentos de enseñanza

Investigadores

Analizar cómo el estudiante para maestro desarrolla la competencia

Universitat d'Alacant
Universidad de Alicante

GIDIMAT-UA
GRUPO DE INVESTIGACIÓN DE DIDÁCTICA DE LA MATEMÁTICA
UNIVERSIDAD DE ALICANTE

Competencia mirar profesionalmente

Ser capaz de **usar el conocimiento** (de matemáticas y sobre la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas) **en la práctica de enseñar matemáticas**

Llinares (2013)

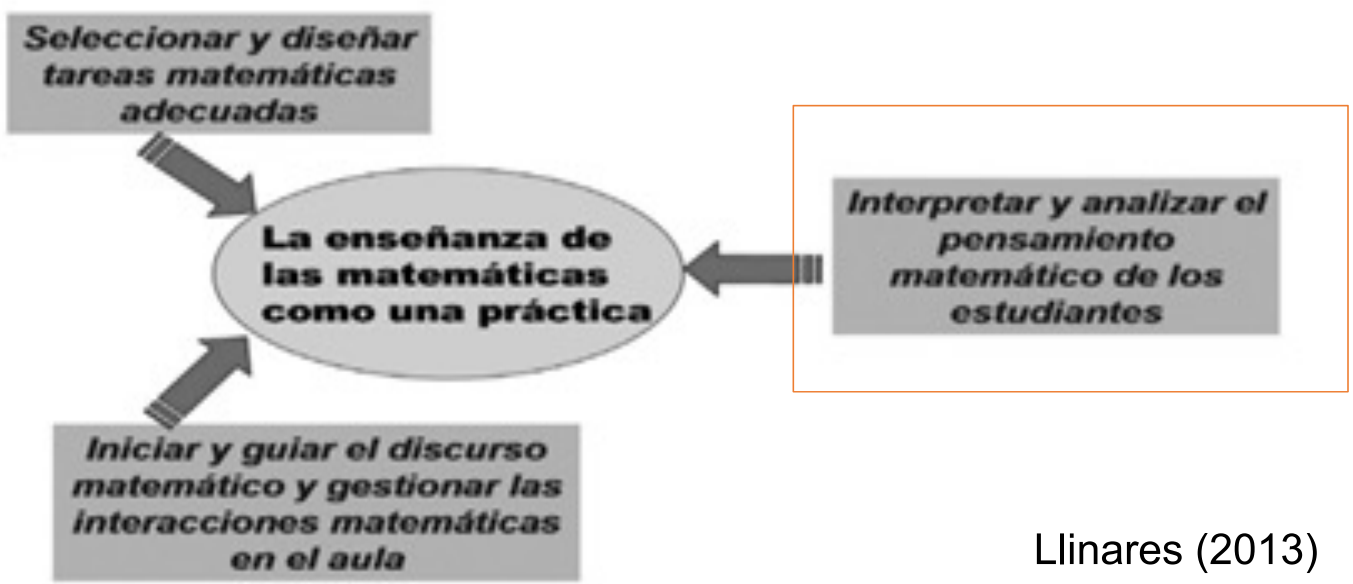
Resultados GIDIMAT-UA

- Información sobre las **características de los entornos de aprendizaje**, y en particular, de **las tareas profesionales** para favorecer el desarrollo de la competencia "mirar profesionalmente" **en los programas de formación**

- **Características (descriptores) del desarrollo de la competencia mirar profesionalmente** el pensamiento matemático de los estudiantes

Competencia mirar profesionalmente

Ser capaz de **usar el conocimiento** (de matemáticas y sobre la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas) **en la práctica de enseñar matemáticas**



Llinares (2013)

Mirar profesionalmente el pensamiento matemático de los estudiantes

- **Atender las estrategias: Identificar** elementos matemáticos en las respuestas de los estudiantes
- **Interpretar** la comprensión de los estudiantes desde los elementos matemáticos identificados
- **Decidir** cómo responder teniendo en cuenta la comprensión de los estudiantes

(Jacobs et al., 2010)

Mirar profesionalmente el pensamiento matemático de los estudiantes

¿Qué conocimiento?

Conocer características de los problemas, niveles de comprensión, errores, estrategias de resolución, modos de representación (resultados de las investigaciones en Educación Matemática)

Poseer referencias para identificar e interpretar el pensamiento matemático de los estudiantes

Variables de tarea, materiales didácticos, software, …

Tener medios para hacer o decidir en la práctica

(Llinares, 2004)

Mirar profesionalmente el pensamiento matemático de los estudiantes

A continuación puedes ver parejas de números. Para cada pareja, escribe un número que se encuentre entre esos dos números. Si crees que ese número no existe, escribe 'imposible':

2'5 y 2'7 2'6
2/7 y 6/7 4/7
8'9 y 8'15 8'80
3'49 y 3'50 imposible
1/3 y 2/3 imposible

- ¿Qué elementos (ideas) matemáticos están implicados en la respuesta del estudiante?

Actividad: **densidad**

El alumno es capaz de encontrar otro número en "no pseudo-consecutivos" pero no es capaz de encontrar en "pseudo-consecutivos"

(Fernández, Gonzáez-Forte y Ivars, 2023)

Mirar profesionalmente el pensamiento matemático de los estudiantes

A continuación puedes ver parejas de números. Para cada pareja, escribe un número que se encuentre entre esos dos números. Si crees que ese número no existe, escribe 'imposible':

2'5 y 2'7 2'6

2/7 y 6/7 4/7

8'9 y 8'15 8'80

3'49 y 3'50 imposible

1/3 y 2/3 imposible

El conjunto de los números naturales es **discreto**	El conjunto de los números racionales es **denso**
… , 3, 4, 5, …	2.4, …, 2.5

Los estudiantes a menudo consideran que entre dos números racionales "pseudo-consecutivos" no hay números

Entre 3/5 y 4/5 no hay números

Y entre dos números racionales "no pseudo-consecutivos" hay un número finito de números.

Entre 1.67 y 1.69 solo está el número 1.68

(Moss & Case, 1999)

- ¿Qué parece estar comprendiendo el estudiante?

El estudiante **utiliza el conocimiento de los números naturales (conjunto discreto) en el conjunto de los números racionales**

(Fernández, González-Forte y Ivars, 2023)

A continuación puedes ver parejas de números. Para cada pareja, escribe un número que se encuentre entre esos dos números. Si crees que ese número no existe, escribe 'imposible':

2'5 y 2'7 2'6

2/7 y 6/7 4/7

8'9 y 8'15 8'80

3'49 y 3'50 imposible

1/3 y 2/3 imposible

- ¿Cómo el maestro puede ayudar a cada estudiante? ¿Qué actividad/tarea plantearíamos a continuación?

Uso de otros modos de representación: Recta numérica

(Fernández, González-Forte y Ivars, 2023)

Mirar profesionalmente el pensamiento matemático de los estudiantes

Universitat d'Alacant
Universidad de Alicante

Actividad. ¿Qué fracción es mayor 2/3 o 2/5?	**Respuesta estudiante 1.** El estudiante después de realizar los dibujos que se muestran indica: *"Son iguales"* 

- ¿Qué elementos (ideas) matemáticos están implicados en la respuesta del estudiante?

El estudiante representa gráficamente las fracciones, pero **no usa "todos" iguales** para comparar las fracciones

(Ivars, 2018)

GIDIMAT-UA
GRUPO DE INVESTIGACIÓN
DE DIDÁCTICA DE LA MATEMÁTICA
UNIVERSIDAD DE ALICANTE

Mirar profesionalmente el pensamiento matemático de los estudiantes

Universitat d'Alacant
Universidad de Alicante

Actividad. ¿Qué fracción es mayor 2/3 o 2/5?	**Respuesta estudiante 1.** El estudiante después de realizar los dibujos que se muestran indica: *"Son iguales"* 

- ¿Qué parece estar comprendiendo el estudiante?

Dificultades en la comparación al no mantener el mismo todo (nivel 1 en los niveles de progresión)

1	**Los niños/as no pueden identificar y representar fracciones** ➢ No reconocen que las partes en las que se divide el todo deben ser iguales en tamaño. ➢ No usan el mismo todo cuando comparan fracciones.	**Del significado intuitivo de dividir en partes iguales en tamaño a la idea de fracción como relación parte-todo y el reconocimiento de diferentes representaciones**
2	**Los niños/as pueden identificar y representar fracciones propias** ➢ Reconocen que las partes en las que se divide el todo deben ser iguales en tamaño, aunque no tengan la misma forma. ➢ Usan una fracción unitaria como una unidad iterativa para construir fracciones propias. ➢ No reconocen que una parte puede estar dividida en otras partes. ➢ Comparan fracciones usando el mismo todo.	
3	**Los niños/as pueden identificar y representar fracciones propias e impropias** ➢ Reconocen que una parte puede estar dividida en otras partes. ➢ Usan cualquier fracción como unidad iterativa para construir fracciones propias e impropias. ➢ Reconocen que el tamaño de la parte disminuye cuando el número de partes aumenta.	

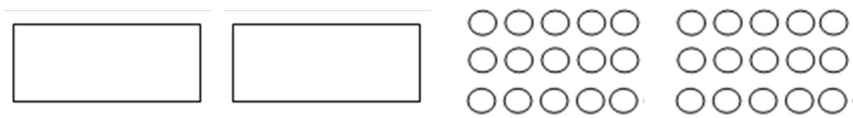
Niveles de progresión (Ivars, 2018) basados en Battista (2012)

GIDIMAT-UA
GRUPO DE INVESTIGACIÓN DE DIDÁCTICA DE LA MATEMÁTICA
UNIVERSIDAD DE ALICANTE

Actividad. ¿Qué fracción es mayor 2/3 o 2/5?	**Respuesta estudiante 1.** El estudiante después de realizar los dibujos que se muestran indica: *"Son iguales"* 

- ¿Cómo el maestro puede ayudar a cada estudiante? ¿Qué actividad/tarea plantearíamos a continuación?

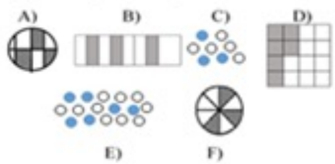
Actividad. ¿Qué fracción es mayor 2/3 o 2/5?



1	**Los niños/as no pueden identificar y representar fracciones** ➢ No reconocen que las partes en las que se divide el todo deben ser iguales en tamaño. ➢ No usan el mismo todo cuando comparan fracciones.	
2	**Los niños/as pueden identificar y representar fracciones propias** ➢ Reconocen que las partes en las que se divide el todo deben ser iguales en tamaño, aunque no tengan la misma forma. ➢ Usan una fracción unitaria como una unidad iterativa para construir fracciones propias. ➢ No reconocen que una parte puede estar dividida en otras partes. ➢ Comparan fracciones usando el mismo todo.	**Del significado intuitivo de dividir en partes iguales en tamaño a la idea de fracción como relación parte-todo y el reconocimiento de diferentes representaciones**
3	**Los niños/as pueden identificar y representar fracciones propias e impropias** ➢ Reconocen que una parte puede estar dividida en otras partes. ➢ Usan cualquier fracción como unidad iterativa para construir fracciones propias e impropias. ➢ Reconocen que el tamaño de la parte disminuye cuando el número de partes aumenta.	

Niveles de progresión (Ivars, 2018) basados en Battista (2012)

1. ¿Qué figuras representan 3/8?

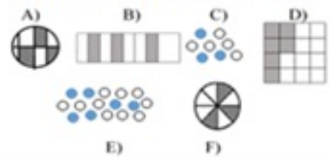


2. Esta figura representa 5/3 del todo. Representa la unidad

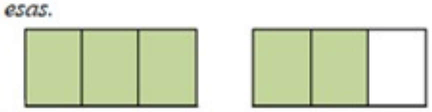
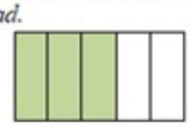
1	**Los niños/as no pueden identificar y representar fracciones** ➢ No reconocen que las partes en las que se divide el todo deben ser iguales en tamaño. ➢ No usan el mismo todo cuando comparan fracciones.	
2	**Los niños/as pueden identificar y representar fracciones propias** ➢ Reconocen que las partes en las que se divide el todo deben ser iguales en tamaño, aunque no tengan la misma forma. ➢ Usan una fracción unitaria como una unidad iterativa para construir fracciones propias. ➢ No reconocen que una parte puede estar dividida en otras partes. ➢ Comparan fracciones usando el mismo todo.	**Del significado intuitivo de dividir en partes iguales en tamaño a la idea de fracción como relación parte-todo y el reconocimiento de diferentes representaciones**
3	**Los niños/as pueden identificar y representar fracciones propias e impropias** ➢ Reconocen que una parte puede estar dividida en otras partes. ➢ Usan cualquier fracción como unidad iterativa para construir fracciones propias e impropias. ➢ Reconocen que el tamaño de la parte disminuye cuando el número de partes aumenta.	

Niveles de progresión (Ivars, 2018) basados en Battista (2012)

Mirar profesionalmente el pensamiento matemático de los estudiantes

1. ¿Qué figuras representan 3/8? 	2. Esta figura representa 5/3 del todo. Representa la unidad

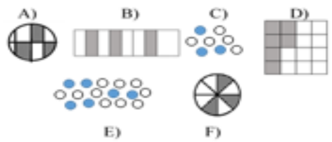
Algunas respuestas de su alumnado fueron

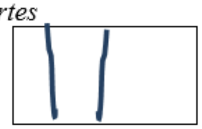
	Problema 1	Problema 2
Estudiante 1	*Las figuras que representan 3/8 son A), B) y F) porque hay tres partes de 8 pintadas*	*Esto son 3 partes* 
Estudiante 2	*F) representa 3/8. A) y B) no son 3/8 porque las partes no son congruentes. C) son 3 puntos pintados y E) son 6 puntos pintados. D) son 6/16*	*Divido lo que me han dado en 3 partes congruentes y luego cojo cinco partes como esas.* 
Estudiante 3	*A) y B) no tienen las partes congruentes y no son 3/8. C), D), E) y F) representan 3/8.*	*Si la figura que nos muestra son 5/3 primero divido la figura en cinco partes que representan los cinco tercios. Después sombreo 3 partes que representan 3/3, es decir la unidad.* 

Identifica las **características de la comprensión** de los niños**. Justifica** tu respuesta mediante fragmentos de las respuestas de los niños e indica los **elementos matemáticos** que están implícitos

(Ivars, 2018)

Universitat d'Alacant
Universidad de Alicante

1. ¿Qué figuras representan 3/8?	2. Esta figura representa 5/3 del todo. Representa la unidad
	

	Problema 1	Problema 2
Estudiante 1	*Las figuras que representan 3/8 son A), B) y F) porque hay tres partes de 8 pintadas*	*Esto son 3 partes* 

Identifica las **características de la comprensión** de los niños**. Justifica** tu respuesta mediante fragmentos de las respuestas de los niños e indica los **elementos matemáticos** que están implícitos

Actividad 1:

El hecho identificar A) y B) como 3/8 nos muestra que **NO tiene en cuenta que las partes en que se divide el todo han de ser iguales en tamaño**
Como no considera las figuras D y E como 3/8 entendemos que **NO considera la idea de que una parte puede estar dividida en otras partes**

Actividad 2:

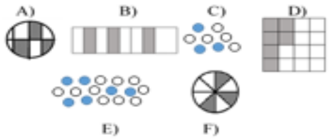
Divide la representación dada en 3 partes no iguales en tamaño por lo que **NO tiene en cuenta que las partes en las que se divide el todo deben ser iguales en tamaño**. Presenta dificultades para representar fracciones impropias **al NO identificar ni usar la fracción unitaria como una unidad iterativa**

1	**Los niños/as no pueden identificar y representar fracciones** ➢ No reconocen que las partes en las que se divide el todo deben ser iguales en tamaño. ➢ No usan el mismo todo cuando comparan fracciones.	**Del significado intuitivo de dividir en partes iguales en tamaño a la idea de fracción como relación parte-todo y el reconocimiento de diferentes representaciones**
2	**Los niños/as pueden identificar y representar fracciones propias** ➢ Reconocen que las partes en las que se divide el todo deben ser iguales en tamaño, aunque no tengan la misma forma. ➢ Usan una fracción unitaria como una unidad iterativa para construir fracciones propias. ➢ No reconocen que una parte puede estar dividida en otras partes. ➢ Comparan fracciones usando el mismo todo.	
3	**Los niños/as pueden identificar y representar fracciones propias e impropias** ➢ Reconocen que una parte puede estar dividida en otras partes. ➢ Usan cualquier fracción como unidad iterativa para construir fracciones propias e impropias. ➢ Reconocen que el tamaño de la parte disminuye cuando el número de partes aumenta.	

(Ivars, 2018)

GIDIMAT-UA
GRUPO DE INVESTIGACIÓN DE DIDÁCTICA DE LA MATEMÁTICA
UNIVERSIDAD DE ALICANTE

Universitat d'Alacant
Universidad de Alicante

1. ¿Qué figuras representan 3/8?	2. Esta figura representa 5/3 del todo. Representa la unidad
	

Estudiante 2	*F) representa 3/8. A) y B) no son 3/8 porque las partes no son congruentes. C) son 3 puntos pintados y E) son 6 puntos pintados. D) son 6/16*	*Divido lo que me han dado en 3 partes congruentes y luego cojo cinco partes como esas.* 

C1. Identifica las **características de la comprensión** de los niños. **Justifica** tu respuesta mediante fragmentos de las respuestas de los niños e indica los **elementos matemáticos** que están implícitos

Actividad 1

Este estudiante usa adecuadamente la idea de que **las partes deben ser iguales en tamaño** (considera que las representaciones A y B no son 3/8 y la F sí lo es)
Como no considera las figuras D y E como 3/8 entendemos que **NO considera la idea de que una parte puede estar dividida en otras partes.**

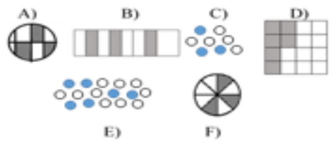
Actividad 2

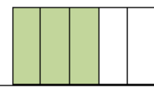
Este estudiante tiene en cuenta que las partes en las que se divide el todo deben ser iguales pero NO identifica de manera correcta la fracción unitaria que le permita representar 5/3

1	**Los niños/as no pueden identificar y representar fracciones** ➢ No reconocen que las partes en las que se divide el todo deben ser iguales en tamaño. ➢ No usan el mismo todo cuando comparan fracciones.	
2	**Los niños/as pueden identificar y representar fracciones propias** ➢ Reconocen que las partes en las que se divide el todo deben ser iguales en tamaño, aunque no tengan la misma forma. ➢ Usan una fracción unitaria como una unidad iterativa para construir fracciones propias. ➢ No reconocen que una parte puede estar dividida en otras partes. ➢ Comparan fracciones usando el mismo todo.	**Del significado intuitivo de dividir en partes iguales en tamaño a la idea de fracción como relación parte-todo y el reconocimiento de diferentes representaciones**
3	**Los niños/as pueden identificar y representar fracciones propias e impropias** ➢ Reconocen que una parte puede estar dividida en otras partes. ➢ Usan cualquier fracción como unidad iterativa para construir fracciones propias e impropias. ➢ Reconocen que el tamaño de la parte disminuye cuando el número de partes aumenta.	

(Ivars, 2018)

GIDIMAT-UA
GRUPO DE INVESTIGACIÓN DE DIDÁCTICA DE LA MATEMÁTICA
UNIVERSIDAD DE ALICANTE

1. ¿Qué figuras representan 3/8?	2. Esta figura representa 5/3 del todo. Representa la unidad
	

Estudiante 3	*A) y B) no tienen las partes congruentes y no son 3/8. C), D), E) y F) representan 3/8.*	*Si la figura que nos muestra son 5/3 primero divido la figura en cinco partes que representan los cinco tercios. Después sombreo 3 partes que representan 3/3, es decir la unidad.* 

Universitat d'Alacant
Universidad de Alicante

C1. Identifica las **características de la comprensión** de los niños. **Justifica** tu respuesta mediante fragmentos de las respuestas de los niños e indica los **elementos matemáticos** que están implícitos

Actividad 1

Este estudiante utiliza **la idea de que las partes deben ser iguales,** por eso no consideran como representación de 3/8 las figuras A y B y sí la figura F.
Al considerar las representaciones D, y E, como 3/8 nos indica que **considera que una parte puede estar dividida en otras partes**

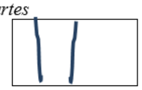
Actividad 2:

Este estudiante divide la figura en 5 partes congruentes utilizando la idea de que **las partes deben ser iguales** para encontrar la fracción unitaria (1/3) (5/3 como 5 veces 1/3). Posteriormente **utiliza la fracción unitaria como unidad iterativa para representar 5/3** (iterando 5 veces 1/3) lo que le lleva a ser capaz de reconstruir la unidad.

1	**Los niños/as no pueden identificar y representar fracciones** ➢ No reconocen que las partes en las que se divide el todo deben ser iguales en tamaño. ➢ No usan el mismo todo cuando comparan fracciones.	**Del significado intuitivo de dividir en partes iguales en tamaño a la idea de fracción como relación parte-todo y el reconocimiento de diferentes representaciones**
2	**Los niños/as pueden identificar y representar fracciones propias** ➢ Reconocen que las partes en las que se divide el todo deben ser iguales en tamaño, aunque no tengan la misma forma. ➢ Usan una fracción unitaria como una unidad iterativa para construir fracciones propias. ➢ No reconocen que una parte puede estar dividida en otras partes. ➢ Comparan fracciones usando el mismo todo.	
3	**Los niños/as pueden identificar y representar fracciones propias e impropias** ➢ Reconocen que una parte puede estar dividida en otras partes. ➢ Usan cualquier fracción como unidad iterativa para construir fracciones propias e impropias. ➢ Reconocen que el tamaño de la parte disminuye cuando el número de partes aumenta.	

(Ivars, 2018)

Universitat d'Alacant
Universidad de Alicante

	Problema 1	Problema 2
Estudiante 1	*Las figuras que representan 3/8 son A), B) y F) porque hay tres partes de 8 pintadas*	*Esto son 3 partes* 
Estudiante 2	*F) representa 3/8. A) y B) no son 3/8 porque las partes no son congruentes. C) son 3 puntos pintados y E) son 6 puntos pintados. D) son 6/16*	*Divido lo que me han dado en 3 partes congruentes y luego cojo cinco partes como esas.* 
Estudiante 3	*A) y B) no tienen las partes congruentes y no son 3/8. C), D), E) y F) representan 3/8.*	*Si la figura que nos muestra son 5/3 primero divido la figura en cinco partes que representan los cinco tercios. Después sombreo 3 partes que representan 3/3, es decir la unidad.*

1	**Los niños/as no pueden identificar y representar fracciones** ➢ No reconocen que las partes en las que se divide el todo deben ser iguales en tamaño. ➢ No usan el mismo todo cuando comparan fracciones.	**Del significado intuitivo de dividir en partes iguales en tamaño a la idea de fracción como relación parte-todo y el reconocimiento de diferentes representaciones**
2	**Los niños/as pueden identificar y representar fracciones propias** ➢ Reconocen que las partes en las que se divide el todo deben ser iguales en tamaño, aunque no tengan la misma forma. ➢ Usan una fracción unitaria como una unidad iterativa para construir fracciones propias. ➢ No reconocen que una parte puede estar dividida en otras partes. ➢ Comparan fracciones usando el mismo todo.	
3	**Los niños/as pueden identificar y representar fracciones propias e impropias** ➢ Reconocen que una parte puede estar dividida en otras partes. ➢ Usan cualquier fracción como unidad iterativa para construir fracciones propias e impropias. ➢ Reconocen que el tamaño de la parte disminuye cuando el número de partes aumenta.	

Según las características de la comprensión identificadas en la cuestión 1, ¿en qué **nivel de comprensión** situarías a cada niño? Justifica tu respuesta

	Estudiantes	**E1**		**E2**		**E3**	
Elementos matemáticos	**Problemas**	**1**	**2**	**1**	**2**	**1**	**2**
Reconocen que las partes en las que se divide el todo deben ser iguales en tamaño		No	No	Sí	Sí	Sí	Sí
Una parte puede estar dividida en otras partes / considerar un grupo de partes como una parte		No		No		Sí	
Identifican y usan una parte (fracción unitaria) como una unidad iterativa, de manera que permita reconstruir la unidad			No		No		Sí

Nivel 1 | Nivel 2 | Nivel 3

(Ivars, 2018)

GIDIMAT-UA
GRUPO DE INVESTIGACIÓN DE DIDÁCTICA DE LA MATEMÁTICA
UNIVERSIDAD DE ALICANTE

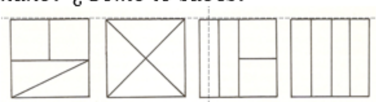
Universitat d'Alacant
Universidad de Alicante

Suponiendo que tú eres uno/a de los maestros/as de estos niños, define **un objetivo de aprendizaje y** propón **una tarea** para cada niño que les permita seguir avanzando en su comprensión de las fracciones

	Estudiantes	E1		E2		E3	
Elementos matemáticos	**Problemas**	**1**	**2**	**1**	**2**	**1**	**2**
Reconocen que las partes en las que se divide el todo deben ser iguales en tamaño		No	No	Sí	Sí	Sí	Sí
Una parte puede estar dividida en otras partes / considerar un grupo de partes como una parte		No		No		Sí	
Identifican y usan una parte (fracción unitaria) como una unidad iterativa, de manera que permita reconstruir la unidad			No		No		Sí

Actividad 2. Representar fracciones
Curso: 2º-3º
Objetivo: Reconocer que las partes en las que se divide el todo deben ser iguales en tamaño, pero no necesariamente tener la misma forma.
Material: hojas de periódico
Actividad 2A: *Hacer mitades (1/2) de forma diferente en una hoja de periódico*
Actividad 2B: Repetir la misma tarea, pero con otras fracciones unitarias: 1/3; 1/4; 1/5; 1/6; 1/8.
Actividad 2C: Modificar la tarea usando fracciones no unitarias: 2/3; ¾; 2/5; …

Actividad 3. Identificar fracciones
Curso: 2º-3º
Objetivo: Reconocer que las partes en las que se divide el todo deben ser iguales en tamaño, pero no necesariamente tener la misma forma.
Actividad: *Identifica 3/4 en las siguientes figuras ¿Las figuras que has dibujado como ¾ son todas del mismo tamaño? ¿Cómo lo sabes?*



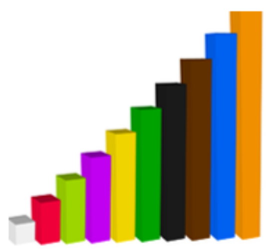
(Ivars, 2018)

GIDIMAT-UA
GRUPO DE INVESTIGACIÓN DE DIDÁCTICA DE LA MATEMÁTICA
UNIVERSIDAD DE ALICANTE

Suponiendo que tú eres uno/a de los maestros/as de estos niños, define **un objetivo de aprendizaje y** propón **una tarea** para cada niño que les permita seguir avanzando en su comprensión de las fracciones

	Estudiantes	E1		E2		E3	
Elementos matemáticos	**Problemas**	**1**	**2**	**1**	**2**	**1**	**2**
Reconocen que las partes en las que se divide el todo deben ser iguales en tamaño		No	No	Sí	Sí	Sí	Sí
Una parte puede estar dividida en otras partes / considerar un grupo de partes como una parte		No		No		Sí	
Identifican y usan una parte (fracción unitaria) como una unidad iterativa, de manera que permita reconstruir la unidad			No		No		Sí

Actividad 2. Identificar/representar fracciones
Curso 4º-5º
Objetivo: Usar una parte (la fracción unitaria) como una unidad iterativa para construir el todo u otras fracciones
Material: Números en color



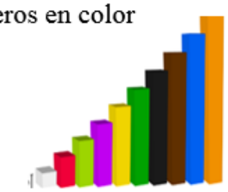
Actividad 2A. *Si la regleta **Roja** es **1/3** de la unidad ¿Qué regleta es la unidad?*
Actividad 2B. Ídem que en la anterior cambiando la regleta y su valor.
Actividad 2C. *Si la regleta **Roja** es **1/3** de la unidad. ¿Qué fracción representa la regleta lila? ¿y la marrón?*

(Ivars, 2018)

Suponiendo que tú eres uno/a de los maestros/as de estos niños, define **un objetivo de aprendizaje y** propón **una tarea** para cada niño que les permita seguir avanzando en su comprensión de las fracciones

	Estudiantes	**E1**		**E2**		**E3**	
Elementos matemáticos	**Problemas**	**1**	**2**	**1**	**2**	**1**	**2**
Reconocen que las partes en las que se divide el todo deben ser iguales en tamaño		No	No	Sí	Sí	Sí	Sí
Una parte puede estar dividida en otras partes / considerar un grupo de partes como una parte		No		No		Sí	
Identifican y usan una parte (fracción unitaria) como una unidad iterativa, de manera que permita reconstruir la unidad			No		No		Sí

Actividad 1. Identificar/representar fracciones
Curso: 4º-5º
Objetivo: Usar una parte (no necesariamente la fracción unitaria) como una unidad iterativa para representar otras fracciones.
Material: Números en color



Actividad. *Si la regleta verde clara es **2/3** de la unidad. ¿Qué regleta representa **2** unidades? ¿Qué fracción representa el "tren" formado por la naranja y la roja?*
Nota. Variar las tareas modificando las fracciones y los números

(Ivars, 2018)

Mirar profesionalmente el pensamiento matemático de los estudiantes

Pedro y Tomás están cargando cajas en un camión. Cargan a la misma velocidad pero Pedro empezó más tarde. Cuando Pedro ha cargado 40 cajas, Tomas, ha cargado 100 cajas. Si Pedro ha cargado 60 cajas ¿cuántas cajas ha cargado Tomás?

Raquel y Juan están plantando flores. Plantan a la misma velocidad pero Juan empezó antes. Cuando Raquel ha plantado 4 flores, Juan ha plantado 12 flores. Si Raquel ha plantado 20 flores, ¿cuántas ha plantado Juan?

Ana y David están fabricando muñecas. Empezaron al mismo tiempo pero Ana es más lenta. Cuando Ana ha fabricado 12 muñecas, David ha fabricado 24 muñecas. Si Ana ha fabricado 48 muñecas, ¿cuántas muñecas ha fabricado David?

Laura y Luís están pegando sellos en postales. Empezaron al mismo tiempo pero Laura es más lenta. Cuando Laura ha pegado 80 sellos, Luís ha pegado 280 sellos. Si Laura ha pegado 120 sellas ¿cuántos sellos ha pegado Luís?

Situación proporcional $f(x) = ax, a \neq 0$	**Situación aditiva (no proporcional)** $f(x) = x + b, b \neq 0$
La función pasa por el origen "Empiezan al mismo tiempo"	La función no pasa por el origen "Empiezan antes o después"
El valor de la pendientes es distinto (cambia) "es más rápido o más lento"	El valor de la pendientes es constante "la misma velocidad"
"las razones externas son constantes y las razones internas son invariantes"	"la diferencia entre cantidades permanece constante"

(Fernández, Valls y Llinares, 2013)

Mirar profesionalmente el pensamiento matemático de los estudiantes

Universitat d'Alacant
Universidad de Alicante

Problema 1

Pedro y Tomás están cargando cajas en un camión. Cargan a la misma velocidad pero Pedro empezó más tarde. Cuando Pedro ha cargado 40 cajas, Tomás ha cargado 100 cajas. Si Pedro ha cargado 60 cajas ¿cuántas cajas ha cargado Tomás?

Estudiante 1	Estudiante 2	Estudiante 3
Tomás ha cargado 120 cajas.	Tomás ha cargado 100 cajas.	Tomás ha cargado 120 cajas

Estudiante 4	Estudiante 5	Estudiante 6
Tomás ha cargado 120 cajas.	Tomás ha cargado 150 cajas.	Tomás ha cargado 20 cajas.

Problema 2

Raquel y Juan están plantando flores. Plantan a la misma velocidad pero Juan empezó antes. Cuando Raquel ha plantado 4 flores, Juan ha plantado 12 flores. Si Raquel ha plantado 20 flores, ¿cuántas ha plantado Juan?

Estudiante 1	Estudiante 2	Estudiante 3
Juan ha plantado 60 flores.	Juan ha plantado 24 flores.	Juan ha plantado 28 flores.

Estudiante 4	Estudiante 5	Estudiante 6
Juan ha plantado 28 flores.	Juan ha plantado 60 flores.	Juan ha plantado 80 flores.

Problema 3

Ana y David están fabricando muñecas. Empezaron al mismo tiempo pero Ana es más lenta. Cuando Ana ha fabricado 12 muñecas, David ha fabricado 24 muñecas. Si Ana ha fabricado 48 muñecas, ¿cuántas muñecas ha fabricado David?

Estudiante 1	Estudiante 2	Estudiante 3
David ha fabricado 96 muñecas.	David ha fabricado 72 muñecas.	David ha fabricado 96 muñecas

Estudiante 4	Estudiante 5	Estudiante 6
David ha fabricado 60 muñecas.	David ha fabricado 96 muñecas.	David ha fabricado 576 muñecas.

Problema 4

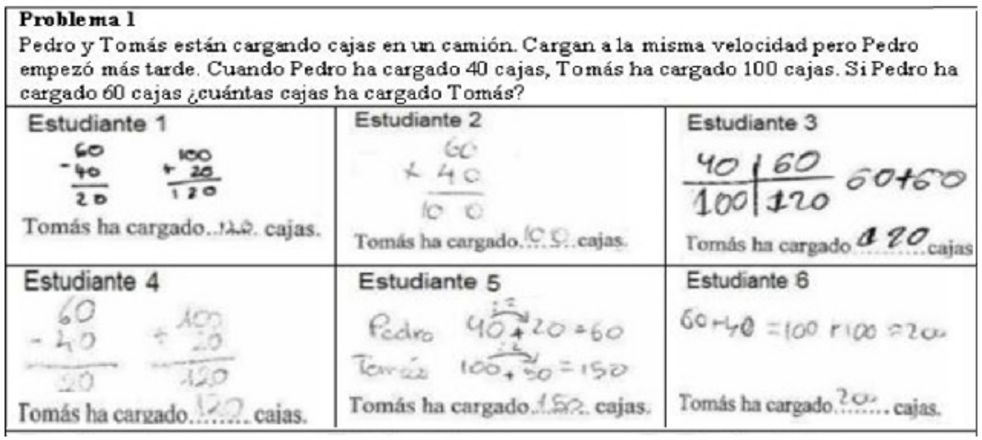
Laura y Luís están pegando sellos en postales. Empezaron al mismo tiempo pero Laura es más lenta. Cuando Laura ha pegado 80 sellos, Luis ha pegado 280 sellos. Si laura ha pegado 120 sellos, ¿cuántos sellos ha pegado Luis?

Estudiante 1	Estudiante 2	Estudiante 3
Luís ha pegado 320 sellos.	Luís ha pegado 560 sellos.	Luís ha pegado 420 sellos.

Estudiante 4	Estudiante 5	Estudiante 6
Luís ha pegado 320 sellos.	Luís ha pegado 420 sellos.	Luís ha pegado 33.600 sellos.

(Fernández, Valls y Llinares, 2013)

- ¿Qué elementos (ideas) matemáticos están implicados en la respuesta del estudiante?


Problema 1
Pedro y Tomás están cargando cajas en un camión. Cargan a la misma velocidad pero Pedro empezó más tarde. Cuando Pedro ha cargado 40 cajas, Tomás ha cargado 100 cajas. Si Pedro ha cargado 60 cajas ¿cuántas cajas ha cargado Tomás?

Estudiante 1 60 − 40 = 20; 100 + 20 = 120 Tomás ha cargado ..120.. cajas.	Estudiante 2 Tomás ha cargado ..100.. cajas.	Estudiante 3 40 | 60; 100 | 120; 60+60 Tomás ha cargado 120 cajas
Estudiante 4 60 − 40 = 20; 100 + 20 = 120 Tomás ha cargado ..120.. cajas.	Estudiante 5 Pedro 40 + 20 = 60 Tomás 100 + 50 = 150 Tomás ha cargado ..150.. cajas.	Estudiante 6 Tomás ha cargado ..... cajas.

Situación proporcional	Situación aditiva
Enfoque escalar Enfoque funcional Constructiva Reducción a la unidad Regla de tres	Aditiva

(Fernández y Llinares, 2010)

- ¿Qué parece estar comprendiendo cada estudiante?

Nivel 0. Razonamiento no proporcional	**Razonamiento ilógico**	- **Usa números y hace cuentas sin sentido**
	No diferencia	• Usa estrategias aditivas de manera sistemática (en problemas proporcionales y no proporcionales) • Usa estrategias proporcionales de manera sistemática
Nivel 1. Razonamiento informal sobre las situaciones proporcionales		• Usa dibujos o manipulativos para dotar de sentido a las situaciones • Realiza comparaciones cualitativas
Nivel 2. Razonamiento pre-proporcional		• Uso de estrategias constructivas
Nivel 3. Razonamiento cuantitativo		• Identifica y usa la razón funcional cuando las razones son enteras • Identifica y usa la razón escalar cuando las razones son enteras
Nivel 4. Razonamiento proporcional		• Identifica y usa la razón funcional cuando las razones NO son enteras • Identifica y usa las razones escalares cuando las razones NO son enteras

(Fernández y Llinares, 2010)

Universitat d'Alacant
Universidad de Alicante

Problema 1
Pedro y Tomás están cargando cajas en un camión. Cargan a la misma velocidad pero Pedro empezó más tarde. Cuando Pedro ha cargado 40 cajas, Tomás ha cargado 100 cajas. Si Pedro ha cargado 60 cajas ¿cuántas cajas ha cargado Tomás?

Estudiante 1 60 − 40 = 20; 100 + 20 = 120 Tomás ha cargado 120 cajas.	Estudiante 2 60 × 40 Tomás ha cargado 100 cajas.	Estudiante 3 40 | 60; 100 | 120; 60+60 Tomás ha cargado 120 cajas
Estudiante 4 60 − 40 = 20; 100 + 20 = 120 Tomás ha cargado 120 cajas.	Estudiante 5 Pedro 40 + 20 = 60 Tomás 100 + 50 = 150 Tomás ha cargado 150 cajas.	Estudiante 6 60 − 40 = 100 + 100 = 20 Tomás ha cargado 20 cajas.

Problema 2
Raquel y Juan están plantando flores. Plantan a la misma velocidad pero Juan empezó antes. Cuando Raquel ha plantado 4 flores, Juan ha plantado 12 flores. Si Raquel ha plantado 20 flores, ¿cuántas ha plantado Juan?

Estudiante 1 4 × 5 = 20; 12 × 5 = 60 Juan ha plantado 60 flores.	Estudiante 2 12 + 12 = 24 Juan ha plantado 24 flores.	Estudiante 3 4 | 20; 12 | 28 12 − 4 = 8 + 20 = 28 Juan ha plantado 28 flores.
Estudiante 4 12 − 4 = 08; 20 + 8 = 28 Juan ha plantado 28 flores.	Estudiante 5 Raquel 4 → 20 Juan 12 → 60 12 × 5 = 60 Juan ha plantado 60 flores.	Estudiante 6 20 · 4 = 80 Juan ha plantado 80 flores.

Problema 3
Ana y David están fabricando muñecas. Empezaron al mismo tiempo pero Ana es más lenta. Cuando Ana ha fabricado 12 muñecas, David ha fabricado 24 muñecas. Si Ana ha fabricado 48 muñecas, ¿cuántas muñecas ha fabricado David?

Estudiante 1 48 × 2 = 96 David ha fabricado 96 muñecas.	Estudiante 2 48 + 24 = 72 David ha fabricado 72 muñecas.	Estudiante 3 12 | 48; 24 | x 48 × 2 = 96 David ha fabricado 96 muñecas
Estudiante 4 24 − 12 = 12; 48 + 12 = 60 David ha fabricado 60 muñecas.	Estudiante 5 Ana 12 | 48 David 24 | 96 24 × 4 = 96 David ha fabricado 96 muñecas	Estudiante 6 24 − 12 = 12 · 48 = 576 David ha fabricado 576 muñecas.

Problema 4
Laura y Luís están pegando sellos en postales. Empezaron al mismo tiempo pero Laura es más lenta. Cuando Laura ha pegado 80 sellos, Luís ha pegado 280 sellos. Si laura ha pegado 120 sellos, ¿cuántos sellos ha pegado Luís?

Estudiante 1 120 − 80 = 040; 280 + 40 = 320 Luís ha pegado 320 sellos.	Estudiante 2 280 × 2 = 560 Luís ha pegado 560 sellos.	Estudiante 3 Laura 80 | 120; Luís 280 | x Luís ha pegado 420 sellos.
Estudiante 4 280 − 80 = 200; 120 + 200 = 320 Luís ha pegado 320 sellos.	Estudiante 5 Laura 80 | 40 | 120 Luís 280 | 140 | 420 Luís ha pegado 420 sellos.	Estudiante 6 120 · 280 = 33.600 Luís ha pegado 33.600 sellos.

(Fernández, Valls y Llinares, 2013)

GIDIMAT-UA
GRUPO DE INVESTIGACIÓN DE DIDÁCTICA DE LA MATEMÁTICA
UNIVERSIDAD DE ALICANTE

Universitat d'Alacant
Universidad de Alicante

- ¿Cómo el maestro puede ayudar a cada estudiante? ¿Qué actividad/tarea plantearíamos a continuación?

  - Razona proporcionalmente o aditivamente sistemáticamente: **Actividades con foco en las relaciones entre las magnitudes** (si son proporcionales o no): se pueden incluir actividades cualitativas o cuantitativas sin que se tengan que calcular

  - Razona proporcionalmente en situaciones con razones/relaciones enteras y aditivamente en situaciones con razones/relaciones no enteras: **Un mismo problema donde se cambien los números:** versión con razones enteras y versión con razones no enteras

  - Razona correctamente: Uso de otros problemas como los de **comparación numérica**

Competencia mirar profesionalmente

Ser capaz de **usar el conocimiento** (de matemáticas y sobre la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas) **en la práctica de enseñar matemáticas**

Llinares (2013)

Universitat d'Alacant
Universidad de Alicante

Referencias

Battista, M. (2012). *Cognition-Based Assessment & Teaching of Fractions. Building on Students' Reasoning*. Heinemann: Porstmouth, NH.

Fernández, C., González-Forte, J.M. y Ivars, P. (2022). La competencia mirar profesionalmente de futuros profesores de matemáticas: uso de representaciones de la práctica. *Reviem, Revista Venezolana de Investigación en Educación Matemática, 2*(3), 1-19, e202211.

Fernández, C. y Llinares, S. (2012). Características del desarrollo del razonamiento proporcional en la Educación Primaria y Secundaria. *Enseñanza de las Ciencias, 30*(1), 129-142.

Fernández, C., Llinares, S. y Valls, J. (2013). Primary school teachers' noticing of students' mathematical thinking in problem solving. *The Mathematics Enthusiast, 10*(1-2), 441-468.

Ivars, P. (2028). Aprendizaje de los estudiantes para maestro sobre trayectorias de aprendizaje de las fracciones. Tesis doctoral.

Referencias

Jacobs, V. R., Lamb, L. L. y Philipp, R. A. (2010). Professional noticing of children's mathematical thinking. *Journal for Research in Mathematics Education, 41*(2), 169-202

Llinares, S. (2004). La generación y uso de instrumentos para la práctica de enseñar matemáticas en Educación Primaria. *UNO, Revista de Didáctica de la Matemática, 36*, 93-115.

Llinares, S. (2013). Professional noticing: A component of the mathematics teacher's professional practice. *Sisyphus-Journal of Education, 1*(3), 76-93.

DESARROLLO DE LA COMPETENCIA MIRAR PROFESIONALMENTE EN LOS PROGRAMAS DE FORMACIÓN DE PROFESORES DE MATEMÁTICAS

Ceneida Fernández
Universidad de Alicante (España)
ceneida.fernandez@ua.es

https://web.ua.es/es/gidimat/grupo-de-investigacion-de-didactica-de-la-matematica.html