Cañadas, M. C. y Pinto, E. (2021). Prácticas en el aula de educación primaria relacionadas con el pensamiento algebraico. *UNO. Revista de Didáctica de las Matemáticas, 94*, 19-27.

PRÁCTICAS EN EL AULA DE EDUCACIÓN PRIMARIA RELACIONADAS CON EL PENSAMIENTO ALGEBRAICO

María C. Cañadas
Universidad de Granada, España

Eder Pinto
Universidad del Desarrollo, Chile

Resumen:

Este artículo aborda el pensamiento algebraico en educación primaria. En concreto, nos centramos en el enfoque que propone el trabajo con cantidades que covarían (variables). Destacamos cuatro elementos que se involucran en el desarrollo del pensamiento algebraico: (a) generalización, (b) representación, (c) justificación y (d) razonamiento. En el contexto de nuestros proyectos de investigación, en los que trabajamos desde 2013 en España, presentamos ejemplos de estos elementos en aulas de diferentes cursos de primaria en distintos centros.

Palabras claves:

Generalización, justificación, pensamiento algebraico, razonamiento, representación

INTRODUCCIÓN

Desde el ámbito docente somos conscientes de que puede sorprender que se hable de "pensamiento algebraico" en educación primaria. Incluso podemos parecer atrevidos, pero para esto solo lo justo. Ciertamente, el álgebra no aparece (aún) en los documentos curriculares de educación primaria de España ni en los de otros muchos países como bloque de contenido. Sin embargo, sí existen elementos que podrían enriquecer el desarrollo de diferentes tipos de pensamiento algebraico en el aula.

Pero, ¿hay interés o necesidad de trabajar el pensamiento algebraico en las primeras edades? ¿Por qué? ¿Para qué? Diversos estudios en Didáctica de la Matemática, fuera y dentro de nuestras fronteras, llevan años trabajando en este ámbito. En general, el foco de estos trabajos está en fomentar que los niños pongan atención en las regularidades, las estructuras y las relaciones matemáticas generales, más que a cálculos y procedimientos aislados. Desde la perspectiva docente, uno de los objetivos de estas investigaciones es contribuir a mitigar las dificultades que presentan los niños de educación secundaria con el álgebra y de las que la literatura de investigación lleva alertando desde hace décadas.

En este trabajo hacemos una breve introducción a los diferentes enfoques que se pueden seguir para introducir el pensamiento algebraico en los primeros niveles y las prácticas que se pueden considerar para cada uno de esos enfoques.

Enfoques y Prácticas del Pensamiento Algebraico

El pensamiento algebraico en los primeros cursos tiene como elemento central la generalización de ideas matemáticas. Más concretamente, involucra cantidades variables y generales (no específicas), atender a las relaciones entre cantidades, reconocer estructuras, estudiar cambios, resolver problemas, modelizar, justificar, probar y predecir, entre otros (Kaput, 2008). Nos enmarcamos en el ámbito del *early algebra*, desde donde se busca fomentar el pensamiento algebraico a través de los temas existentes en las matemáticas de los primeros cursos, usando diferentes representaciones y problemas. No somos partidarios de usar términos en otros idiomas, pero en el caso del *early algebra*, consideramos que tiene unas connotaciones sutiles pero importantes en comparación con expresiones que se suelen usar en castellano como equivalentes: "álgebra temprana" o "pre-álgebra". Evitamos estas expresiones porque en ocasiones se interpreta que la intención es introducir el álgebra antes (de lo que se suele introducir), i.e., comenzar con algunos contenidos de los que se trabajan en secundaria en cursos anteriores. Como hemos aclarado anteriormente, no vamos en esa línea.

Aunque el simbolismo algebraico es el predominante en el álgebra de educación secundaria, en niveles educativos anteriores cobran relevancia otras representaciones, aunque se pueda usar también este simbolismo. Por ejemplo, las representaciones pictóricas, gráfica, manipulativa o verbal. Estas permiten a los niños expresar sus ideas, así como explicarlas o justificarlas. Destacamos el rol que adquiere el lenguaje natural en educación primaria, principalmente en los primeros cursos. Es habitual que los alumnos de estas edades expresen sus ideas de manera oral con mayor facilidad, en comparación a lo escrito, por ejemplo.

La literatura distingue tres enfoques principales al pensamiento algebraico que presentamos a continuación.

- Aritmética generalizada. Las operaciones aritméticas que se suelen trabajar en educación primaria se usan como contenido para desarrollar pensamiento algebraico, focalizándose en sus propiedades fundamentales.
- Equivalencia, expresiones, ecuaciones e inecuaciones. En este enfoque se incluye la comprensión relacional del signo igual y se promueve que el trabajo con expresiones, ecuaciones e inecuaciones esté más centrado en observar las expresiones como objetos, más allá de cálculos aislados.
- Pensamiento funcional. El contenido matemático central son las funciones —lineales y, a lo sumo, cuadráticas, por los cursos a los que nos referimos. El interés se centra en las relaciones entre las variables, en la covariación. Se suelen plantear con una metodología basada en la resolución de problemas en diferentes contextos y representaciones.

Los enfoques anteriores no están aislados y en ocasiones se dan combinados. Hay elementos transversales a los diferentes enfoques al pensamiento algebraico: la generalización, la representación, la justificación y el razonamiento. Es a lo que diferentes autores llaman las prácticas del pensamiento algebraico. Estas prácticas se basan en el trabajo de Kaput (2008) y deben estar presentes al trabajar con los diferentes enfoques del pensamiento algebraico (ver figura 1).

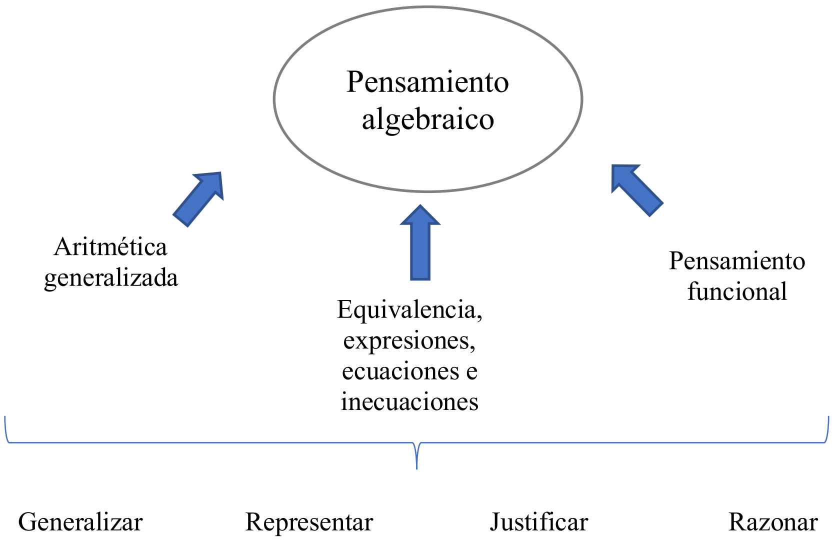

Figura 1. Enfoques y prácticas del pensamiento algebraico

Las cuatro prácticas no son compartimentos estancos. En este trabajo ilustraremos, con ejemplos de nuestras investigaciones, cómo potenciarlas desde uno de los enfoques: el pensamiento funcional.

Contexto de investigación

Desde el año 2013, y como parte de nuestro trabajo de investigación en el ámbito de dos proyectos I+D, hemos diseñado e implementado junto a un valioso grupo de colegas, diferentes tareas que buscan recoger evidencias de pensamiento funcional de niños de 5 a 12 años. El trabajo empírico lo hemos desarrollado en varios centros de la provincia de Granada (España). La tipología de los centros es variada en cuanto a nivel socioeconómico y cultura. La metodología usada en el aula fue diversa: trabajo en gran grupo (una clase completa), trabajo en pequeños grupos (de 5-6 niños), entrevistas grupales (5-6 niños) o entrevistas individuales.

A continuación, presentamos ejemplos de cómo se desarrolla cada una de las prácticas del pensamiento funcional con niños de diferentes cursos de educación primaria. En concreto, los ejemplos que proporcionamos corresponden a respuestas de niños al trabajar con diferentes problemas de generalización que involucran funciones.

Generalización

La generalización constituye el núcleo del pensamiento algebraico (Mason, 1996). En el ámbito funcional, la generalización se refiere al reconocimiento de la relación de covariación. En el trabajo con los niños de educación primaria, algunos autores señalan que hay generalización bien cuando expresan esa relación de un modo que afecta a cualquier valor concreto, o bien porque lo hacen para varios casos particulares (e.g., Pinto y Cañadas, 2021). Por ejemplo, uno de los problemas presentados a niños de 3º (8-9 años) y 5º (10-11 años) de primaria fue el de las baldosas. Este problema involucra una función que relaciona el número de baldosas grises con el número de baldosas blancas, tal como lo mostramos en la figura 2.

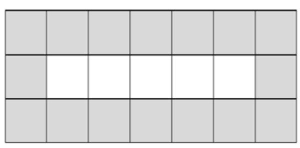

Figura 2. Imagen del problema de las baldosas

Los niños respondieron a diferentes preguntas sobre la cantidad de baldosas grises dado un número de baldosas blancas. La figura 3 muestra respuestas escritas de un niño de 3º (8-9 años) al responder a diferentes preguntas de este problema.

1. ¿Cuántas baldosas grises necesitan para el suelo de un pasillo en el que colocan 5 baldosas blancas? 16 Porque 7+7+2=16
2. ¿Cuántas baldosas grises necesitan para el suelo de un pasillo en el que colocan 8 baldosas blancas? 22 Porque 10+10+2=22
3. ¿Cuántas baldosas grises necesitan para el suelo de un pasillo en el que colocan 10 baldosas blancas? 26 Porque 12+12+2=26
4. ¿Cuántas baldosas grises necesitan para el suelo de un pasillo en el que colocan 100 baldosas blancas? 206 Porque 102+102+2=206

Figura 3. Generalización a través de casos particulares por un niño de tercero

Este niño no expresó la función involucrada en el problema de las baldosas de forma explícita —$2x+6$ u otra expresión equivalente. Sin embargo, su trabajo pone de manifiesto que identificó la relación funcional —vista como $x+x+6$— y la aplicó para calcular el número de baldosas grises dados varios números de baldosas blancas.

Otro ejemplo de generalización es la respuesta de un niño de 5º (11-12 años) al mismo problema de las baldosas. La figura 4 muestra la respuesta del niño a una pregunta que busca conocer la relación general entre un número cualquiera de baldosas blancas y el número de baldosas grises correspondiente.

Multiplicando el número de baldosas blancas por 2 y después sumándole 6.

Figura 4. Generalización a través de casos particulares por un niño de quinto

La respuesta de este niño evidencia una relación general para cualquier número de baldosas de forma explícita (ver figura 4). Esta relación puede ser aplicada para obtener el número de baldosas grises para cualquier número de baldosas blancas.

REPRESENTACIÓN

Expresar ideas matemáticas generales es clave en el pensamiento algebraico. Como adelantábamos, esas representaciones van más allá del simbolismo algebraico y son representaciones válidas, particularmente en educación primaria. Cada representación (verbal, numérica, pictórica, entre otras) permite resaltar algún aspecto de las regularidades involucradas en un problema. Es posible que los niños usen más de una representación para expresas sus ideas: aparece así la idea de representaciones múltiples.

En la figura 3 se puede observar cómo los niños trabajan con casos particulares e incluso identifican y aplican la función involucrada mediante la representación numérica. En la figura 4 mostramos el empleo del lenguaje natural para expresar una regla general.

Una tabla donde se representan diferentes valores para las dos variables de la función involucrada permite observar las relaciones entre dichos valores. A un grupo de 1º de educación primaria (6-7 años), le propusimos un problema en un contexto de un cumpleaños, en el que había una tabla en la que debían ir representando la información que se iba trabajando y que tenía que ver con número de niños (x) y número de piruletas (y). Les dimos una hoja con una tabla que representaba valores correspondientes a la función $y = 3x$ (a cada niño le corresponden tres piruletas). Ante el gran grupo-clase se hizo explícita la relación 2 niños-6 paletas (piruletas) y se les preguntó por los siguientes casos particulares: 3, 4, 5, 8, 10 y 20 niños y como explicarían a la madre la compra de piruletas si tuvieran 100 invitados en la fiesta. La figura 5 muestra el inicio de la tarea 2

niños	piruletas
1 ☺	3
2 ☺☺	

Figura 5. Tabla inicial en el enunciado del problema del cumpleaños

Los niños evidenciaron diferentes representaciones incluso habiéndoles dado el formato tabla en el enunciado. Destacamos la representación pictórica que usaron cuatro niños en sus respuestas de la figura 6, al preguntarles por el número de piruletas que necesitarían para un determinado número de niños en el cumpleaños.

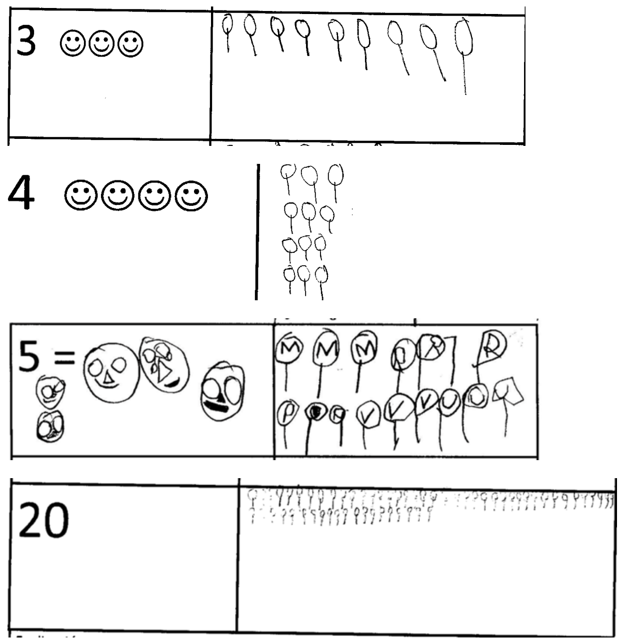

Figura 6. Respuestas en la representación tabular de niños de 7-8 años

En las respuestas de la figura 6 observamos que los niños respondieron correctamente usando únicamente la representación pictórica. Para el primer y último caso mostrados en la figura (3 y 20 niños, respectivamente) no hay evidencia de que establecieran alguna conexión entre ambas variables involucradas. En cambio, para cuatro niños, observamos que dibujan las piruletas organizadas en cuatro filas, de forma que asignan tres piruletas por cada fila (tres piruletas por niño). Para cinco niños, se ve que el niño ha dibujado las piruletas y les ha asignado una sigla diferente a tres piruletas. En estos dos casos hay evidencia de relación entre los valores de ambas variables a través de la representación pictórica incluida en una tabla.

Razonamiento

El pensamiento funcional implica que los niños razonen con base en el análisis de casos particulares y avancen hacia la generalización. Este proceso se corresponde con el razonamiento inductivo, también llamado inducción por Pólya (1967). Comenzar con el trabajo de casos particulares hace que sea adecuado para su tratamiento en las aulas de educación primaria, dado que permite que niños atiendan a ciertas particularidades de cantidades específicas hasta captar lo general.

Una de los problemas que presentamos a niños de 4º de primaria (9-10 años) es el del tren. Este problema involucra la función $y=3x+1$ y lo presentamos en la figura 7.

Elsa quiere llevar a todos los amigos que tiene en el mundo a Arendelle para que estén con ella cuando sea nombrada reina. Para eso ha decidido conducir un tren que salga

desde Granada y que pare en todos los pueblos en los que Elsa tiene amigos. El tren es conducido por Elsa. En cada pueblo que para el tren, ella recoge a 3 amigos.

Figura 7. Problema del tren

En este problema planteamos preguntas que involucraban casos particulares. Por ejemplo, preguntamos si la tercera parada está en Málaga, ¿cuántos pasajeros irán en el tren al salir de la estación de Málaga? Y también por la relación general: “Elsa ha parado en un pueblo y no recuerda qué número de parada es la de ese pueblo, pero al llegar a la estación, ve en qué número de parada está. ¿Cómo puedes saber cuántas personas hay en el tren?”. En la figura 8 mostramos respuestas de una niña a diferentes preguntas de este problema.

(a) Cuando el tren salga de la parada 2 / 5 / 10, ¿cuántas personas van?	(b) Si el tren lleva 100 paradas, ¿cuántas personas van?	(c) Si *Z* es cualquier número de paradas. ¿Cómo podrías explicar tú, en general, cómo calcular el número de personas?
3-10 4-13 5-16 6-19 7-22 8-25 9-28 10-31	3x100=301	ZZZ1

Figura 8. Respuestas al problema del tren por una niña de cuarto

En el apartado (a) (parte izquierda de la figura 8), la niña razona sobre las relaciones numéricas implicadas en los casos particulares (dado un número de paradas, determinar cuántas personas van en el tren). Esta forma espontánea de organizar la información permitió que la niña identificara que en el número de personas (columna derecha) “siempre se va sumando tres”. Tras explorar con su esquema de razonamiento qué ocurría con un número mayor, encontró una relación multiplicativa entre el número de personas y número de paradas (ver (b) en imagen central de la figura 8). Finalmente, y dada la obtención de una regla general, la niña intentó usar simbolismo algebraico para expresar que “multiplicaría ese 3 por esta *Z* y le sumaría siempre 1” y así lo representó de manera escrita en (c) (imagen de la izquierda de la figura 8). Esta última forma de razonar la relación entre las variables le permitió comprobar sus respuestas anteriores y extender su razonamiento a otros casos.

JUSTIFICACIÓN

Justificar permite convencerse a uno mismo o a otros de la veracidad de una afirmación matemática. En el contexto del pensamiento funcional, las justificaciones favorecen que los niños cuestionen las relaciones entre variable que ellos y otros han encontrado. Adicionalmente, justificar permite que los niños desarrollen conjeturas y puedan obtener reglas generales en la cual hay involucrada dos o más variables.

Lannin (2005) propuso cinco niveles de justificación en tareas de generalización: (a) no hay justificación, (b) apela a la autoridad externa, cuando hacen referencia a la veracidad de una expresión en función de lo que digan otras personas o materiales de referencia, (c) evidencia empírica, cuando la justificación se da mediante la verificación con casos particulares, (d) ejemplo genérico, que es una justificación deductiva que se plasma a través de un caso particular y (e) justificación deductiva, cuando se presenta un argumento deductivo que es independiente de casos particulares.

El problema de la hucha fue presentado a niños de 2º de primaria (7-8 años). Este problema señala que: “una abuela le regala a su nieto una hucha con 5 euros. Después de eso, todos los domingos, le da otro euro”. Los niños disponían de materiales manipulativos para explorar la relación entre cantidades. El siguiente extracto muestra la justificación de una niña al responder por un caso particular de domingos transcurridos.

Investigadora (I):	Después de 20 domingos, ¿cuánto dinero tendrás?
N (N):	Veinticinco euros
I:	¿Cómo lo sabes?
N:	Yo tenía 20 y ahora tengo cinco más y añadí veinte al cinco, lo que hace veinticinco.

Tal como aparece en la respuesta, esta niña justificó su respuesta con base en una evidencia empírica específica, encontrando una relación aditiva (añadí cinco) entre el número de domingos transcurridos y el dinero total.

IDEAS FINALES

Diferentes estudios en el contexto de investigación descrito anteriormente ponen de manifiesto la capacidad de los niños de educación primaria para abordar tareas de generalización en un contexto funcional. En este artículo destacamos que es importante y posible de fomentar el pensamiento algebraico desde los primeros cursos de educación primaria. A través de las prácticas descritas (generalización, representación, justificación y razonamiento), constituye una oportunidad significativa para enriquecer el diálogo en el aula de matemáticas.

El pensamiento algebraico necesita de tiempo para desarrollarse. Promover las prácticas del pensamiento algebraico en el aula permite dotar de significados las acciones matemáticas que realizan los niños. Se trata de una propuesta que va más allá de la introducción temprana de ciertos contenidos; favorece la creación de un clima de aula que promueve "la observación de patrones, relaciones y propiedades matemáticas y, de este modo, cultivar hábitos de pensamiento que atiendan a la estructura que subyace a las matemáticas" (Molina, 2009, p. 136).

Desde el punto de vista del docente, las prácticas presentadas suponen una oportunidad para introducir el pensamiento algebraico en el aula de educación primaria. No es necesario un cambio en el currículo ni en la programación prevista. Ya sería un logro integrar algunas de las prácticas presentadas con los niños.

Quien esté interesado en conocer más sobre nuestro trabajo, lo invitamos a visitar nuestra web www.pensamientoalgebraico.es. Entre otra informaci, están disponibles las actividades que llevamos a cabo en aulas de educación primaria de diferentes centros educativos.

Agradecimiento

Este trabajo se ha realizado en el proyecto con referencia EDU2016-75771-P, financiado por la Agencia Estatal de Investigación (AEI) de España y el Fondo Europeo de Desarrollo Regional (FEDER).

Referencias

Cañadas, M. C. y Castro, E. (2007). A proposal of categorisation for analysing inductive reasoning. *PNA, 1*(2), 67-78.

Kaput, J. (2008). What is algebra? What is the algebraic reasoning? En J. J. Kaput, D. W. Carraher y M. L. Blanton (Eds.), *Algebra in the early grades* (pp. 5-17). Nueva York, NY: Lawrence Erlbaum Associates.

Lannin, J. K. (2005) Generalization and justification: the challenge of introducing algebraic reasoning through patterning activities. *Mathematical Thinking and Learning, 7*(3), 231-258.

Mason, J. (1996). Expressing generality and roots of algebra. En N. Bernarz, C. Kieran y L. Lee (Eds.), *Approaches to algebra: Perspectives for research and teaching* (pp. 65-86). Dordrecht, Países Bajos: Springer.

Molina, M. (2009). Una propuesta de cambio curricular: integración del pensamiento algebraico en educación primaria. *PNA*, *3*(3), 135-156.

Pinto, E. y Cañadas, M. C. (2021) Generalizations of third and fifth graders within a functional approach to early algebra. *Mathematics Education Research Journal, 33*, 113-134. https://doi.org/10.1007/s13394-019-00300-2

Pólya, G. (1967). *La découverte des mathématiques*. París: DUNOD.