Desequilibrios entre lo gráfico y lo simbólico. Efectos en la comprensión de la función cúbica[1]

Pedro Gómez y Cristina Carulla
"una empresa docente", Universidad de los Andes
pgomez@uniandes.edu.co • mcarulla@uniandes.edu.co

En este estudio se exploraron las concepciones de estudiantes universitarios sobre la función cúbica. El estudio se desarrolló dentro del marco de un proyecto de innovación curricular en precálculo que involucraba las calculadoras gráficas. El estudio se desarrolló en dos fases. En la primera, con base en una prueba que fue respondida en grupos por los estudiantes de un curso, se identificaron errores en la producción de gráficas de la función cúbica. Con base en estos errores se formuló una serie de conjeturas sobre las concepciones de los estudiantes. En una segunda fase, con un grupo diferente de estudiantes, se corroboraron estas conjeturas. Para ello se utilizó la misma prueba, pero además, se les pidió a los estudiantes que corrigieran una solución a la misma y que comentaran una serie de afirmaciones relacionadas con las conjeturas. Se encontró que una proporción importante de los estudiantes construyen una concepción de la función cúbica (con el cubo completado) en la que el dominio es un subconjunto propio de los números reales y para la que es posible que exista un par de asíntotas verticales. Se discuten algunas de las causas de este tipo de concepción, en particular la utilización de la tecnología.

Introducción

En este estudio quisimos explorar algunos aspectos de las concepciones de los estudiantes sobre las funciones cúbicas de la forma $f(x) = a(x-h)^3 + k$. Para hacerlo, observamos la actuación de un grupo de estudiantes cuando resolvían un problema que tenía que ver con gráficas de funciones cúbicas. Nuestro propósito era el de describir algunas características de las gráficas de hechas por los estudiantes y explorar, con base en esas gráficas, algunos aspectos de sus concepciones. El estudio se hizo en dos fases. Durante la primera fase, construimos un conjunto de categorías que nos permitieron caracterizar las gráficas de los estudiantes y formulamos una serie de conjeturas acerca de las posibles concepciones que se encontraban detrás de ese comportamiento. Durante la segunda fase, con un grupo diferente de estudiantes, pero con el mismo problema, confirmamos la caracterización que habíamos hecho previamente y pudimos contrastar las conjeturas propuestas. También formulamos una descripción parcial de las concepciones de los estudiantes para este tipo de función.

En lo que sigue, discutimos algunos aspectos conceptuales relacionados con la comprensión del concepto de función, en general, y de función cúbica, en particular. En seguida, describimos en detalle los instrumentos que utilizamos para recolectar, codificar y analizar la actuación de los estudiantes. Finalmente, presentamos los resultados que encontramos y sacamos algunas conclusiones.

1. El estudio que se reporta aquí fue apoyado en parte por la Fundación para el Avance de la Ciencia y la Tecnología del Banco de la República.

COMPRENSIÓN DE LA NOCIÓN DE FUNCIÓN

El problema de la comprensión del concepto de función ha llamado la atención recientemente (Harel & Dubinsky, 1992; Tall, 1991; Romberg et al., 1993; Leindhardt et al., 1990). En particular, Sierpinska (1992) ha producido una lista de actos de comprensión y de obstáculos epistemológicos relacionados con el concepto de función. Por ejemplo, un acto de comprensión relacionado con la representación de las funciones consiste en la discriminación entre los diferentes medios para representar las funciones y las funciones mismas. Un obstáculo epistemológico relacionado con la gráfica de una función consiste en pensar que la gráfica de las funciones es un modelo geométrico de la relación funcional. No tiene que ser exacta y puede tener parejas (x,y) tales que la función no esté definida para x.

La noción de *representante* (Schwarz & Dreyfus, 1995) ha tomado importancia en la medida en la que la tecnología se ha utilizado para la enseñanza del tema de funciones. Esta noción tiene que ver con el hecho de que una función dada puede tener múltiples *representantes* en un mismo sistema de representación. Por ejemplo, $f(x) = (x-2)^2+3$ y $f(x) = x^2-4x+7$ son dos representantes de la misma función. Igualmente, una función puede tener un número infinito de representantes en el sistema de representación gráfico, dependiendo del rango y de la escala que se utilice para los ejes.

Se puede mirar la comprensión como un proceso que pasa por “estados”. Cada estado corresponde a un cierto conocimiento parcial (una *concepción*) que ha funcionado con la experiencia previa y que le permite al estudiante sentirse cómodo cuando resuelve tareas. Para un tipo dado de problemas, una concepción puede corresponder a una versión válida o inválida del conocimiento matemático que se encuentra en juego. Diremos que una concepción (válida o inválida) está *consolidada* siempre que el estudiante que la tiene se “sienta cómodo” cuando la pone en juego para resolver problemas. Como se explicará más adelante, esta sensación de “comodidad” se puede observar a través de la coherencia de las respuesta del estudiante a una serie de preguntas relacionadas. De otro lado, una concepción puede estar en un estado *no consolidado*. Cuando esto sucede, el conocimiento parcial no ha logrado establecerse y las respuestas del estudiante no siguen un patrón coherente.

COMPRENSIÓN DE LA FUNCIÓN CÚBICA

Existe muy poca investigación acerca de la comprensión de la función cúbica. Curran (1995) encontró que los estudiantes presentan conexiones entre su comprensión de la gráfica de la función cúbica y su comprensión de las gráficas de las funciones lineales y cuadráticas.

Nosotros tuvimos en cuenta una forma específica de la función cúbica: $f(x) = a(x-h)^3+k$. Lo hicimos de esta forma, porque el curso de precálculo en el que hicimos el estudio sigue una estrategia de enseñar traslaciones y dilataciones en la construcción de las gráficas de las funciones. La forma general de la función cúbica $f(x) = ax^3+bx^2+cx+d$ se introduce más tarde.

Estábamos interesados en explorar algunos aspectos de las concepciones de los estudiantes sobre la función cúbica. En particular, queríamos ver si era posible que los estudiantes desarrollaran concepciones consolidadas pero inválidas relacionadas con el dominio y el rango de la función. Este interés surgió de los resultados de la primera fase del estudio en la que se les pidió a los estudiantes que resolvieran un problema relacionado con familia de funciones cúbicas (el problema se presenta más adelante). Encontramos que muchos estudiantes dibujaron gráficas similares a las que se muestran en la tabla 1.

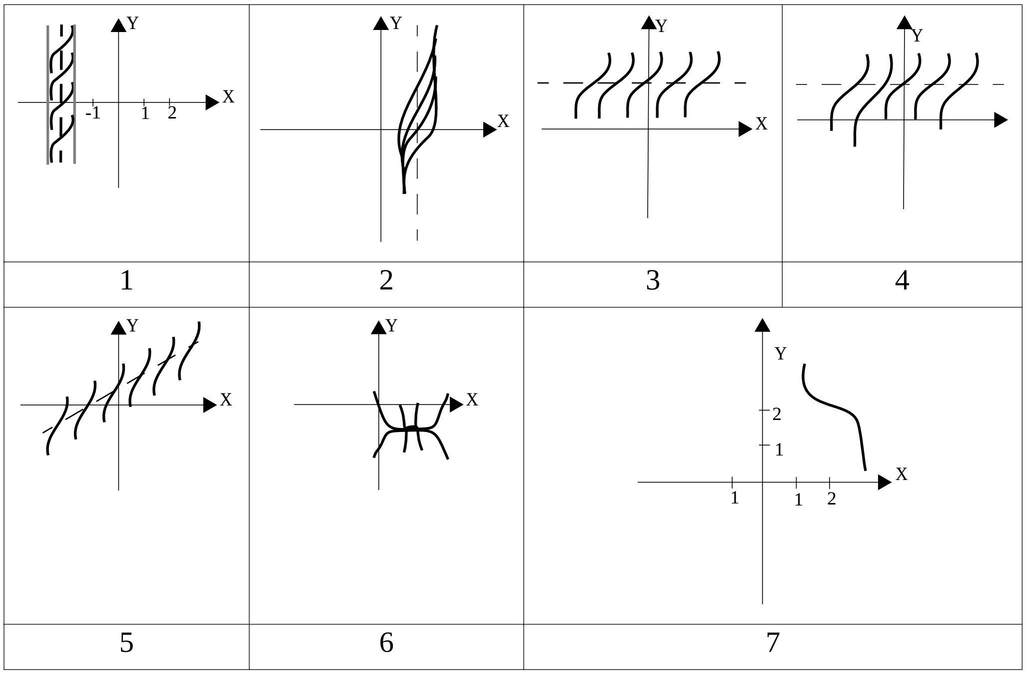


Tabla Nº 1. Tipos de gráficas producidas por los estudiantes

La proporción de respuestas de este tipo nos hizo pensar que ellas podrían ser una consecuencia de una concepción consolidada e inválida de la función cúbica, en cambio de ser simplemente consecuencia de errores de dibujo o de circunstancias específicas al problema que se estaba resolviendo. Esta concepción se puede expresar de la siguiente forma:

> *El dominio y el rango de la función cúbica es un subconjunto propio de los números reales y se puede mirar como un intervalo alrededor del punto de inflexión de la función.*

Pensamos que si un estudiante tenía este tipo de concepción, entonces él estaría de acuerdo con situaciones como las siguientes:

- Si el punto de inflexión de la función está sobre el eje Y o cercano a él, entonces la gráfica corta ese eje (Gráficas tipo 3, 4, 5, 6).
- Si el punto de inflexión de la gráfica no está cerca del eje Y, pero no está demasiado lejos, entonces la gráfica de la función tiene al eje Y como una de sus asíntotas (Gráfica tipo 2)
- Si el punto de inflexión se encuentra suficientemente alejado del eje Y, entonces la gráfica de la función tiene otras asíntotas (Gráfica tipo 1)
- Si el punto de inflexión de la función se encuentra suficientemente lejos del eje X, entonces no corta ese eje.

Para contrastar estas hipótesis decidimos trabajar con un grupo diferente de estudiantes y con el mismo problema. Esto se hizo en la segunda fase del estudio.

Contexto y recolección de información

El estudio se realizó con estudiantes de primer semestre de un curso de precálculo de la Universidad de los Andes, en Bogotá, Colombia. Este curso se dictó a partir de una innovación curricular que involucró la utilización de calculadoras gráficas (Gómez et al., 1996). El curso hace una introducción al estudio de las funciones con énfasis en la relación entre los sistemas de representación simbólico y gráfico y en la resolución de problemas. Una cuarta parte del curso se dedica a las funciones lineales, seguido por el estudio de las funciones cuadráticas, cúbicas, polinómicas, racionales y radicales. Se da especial atención al papel gráfico de los parámetros en las diferentes representaciones simbólicas de la función.

Se conocen algunos resultados de esta experiencia de innovación curricular (ver nuestro artículo *Innovación curricular en precálculo con calculadoras gráficas* en este volumen). Mesa y Gómez (1996) encontraron que no había diferencias en algunos aspectos de la comprensión de los estudiantes que tomaron el curso tradicional y aquellos que tomaron la innovación curricular. Gómez y Rico (1995) encontraron que los estudiantes de ese grupo participaron de manera más activa en la interacción social y en la construcción del discurso matemático, cambios que se pueden atribuir parcialmente a un comportamiento diferente de la profesora. Aunque ella cambió su comportamiento, Valero y Gómez (1996) encontraron que la profesora no cambió sus sistema de creencias. Carulla y Gómez (1996) encontraron que los profesores y los investigadores que participaron en esta innovación curricular sufrieron cambios significativos en sus visiones de las matemáticas, su aprendizaje y su enseñanza. Gómez (1997) encontró que los efectos de la utilización de la tecnología en el rendimiento depende de la manera como ella se integre al currículo.

El problema que se utilizó en el estudio es uno de los problemas que se resuelven normalmente dentro del curso cuando se trata las funciones cúbicas. Nosotros queríamos explorar si:

- los estudiantes de este nuevo grupo producían gráficas similares a las que encontramos con el primer grupo;
- esas gráficas era una consecuencia de una concepción consolidada pero inválida de la función cúbica.

Para realizar esta exploración, recolectamos y analizamos tres tipos diferentes de información:

- las respuestas de los estudiantes al problema;
- la manera como los estudiante corrigieron y comentaron una solución al problema que nosotros produjimos y que contenía la mayoría de los errores que correspondían a la concepción consolidada pero inválida;
- los comentarios de los estudiantes a una serie de afirmaciones relacionadas con la solución anterior y con las hipótesis presentadas anteriormente.

Los últimos dos instrumentos se diseñaron con el propósito de asegurarnos de que los errores que encontramos en las gráficas no eran una consecuencia de dificultades de dibujo y para inducir a los estudiantes a que pusieran en juego sus concepciones en diferentes circunstancias relacionadas con el mismo problema. El problema que se propuso a los estudiantes era el siguiente:

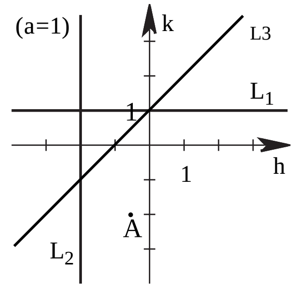
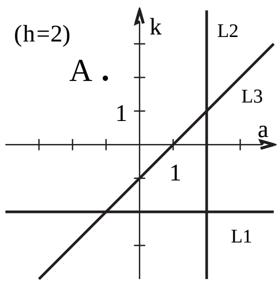
1)Su ponga que a = 1. la figura muestra el plano **h-k** en el que el punto (h,k) representa la función cúbica $y = (x - h)^3 + k$. Dibuje en diferentes planos cartesianos **x-y** las funciones o familias de funciones que corresponden a a) A; b) L_1; c) L_2; y d) L_3.	
2)Suponga que h = -2. La figura muestra el plano **a–k**, en el que le pinto (a, k) representa la función cúbica $y = a(x - 2)^3 + k$. Dibuje en diferentes planos cartesianos **x–y** las funciones o familias de funciones que corresponden a e) A; f) L_1; g) L_2 y h) L_3.	

Figura Nº 1.

El siguiente es un ejemplo de la solución al problema que produjimos para que los estudiantes lo corrigieran y del tipo de afirmaciones que les propusimos para que ellos comentaran.

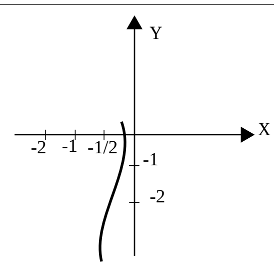
1) a. El punto A corresponde a la gráfica cuyo punto de inflexión es $(-1/2, -2)$. Su representación simbólica es $y = (x + 1/2)^3 - 2$.		La gráfica no corta el eje y.

Figura Nº 2.

A continuación presentamos el resto de las gráficas y de las afirmaciones que se propusieron a los estudiantes para que ellos las corrigieran y las comentaran.

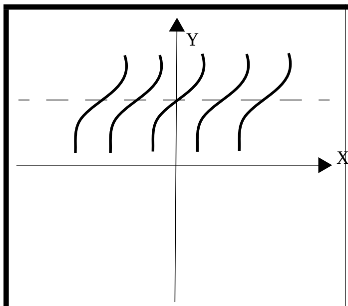
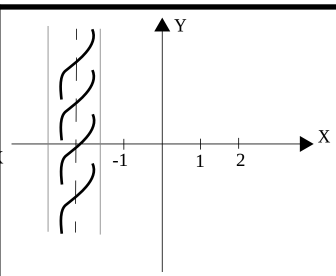
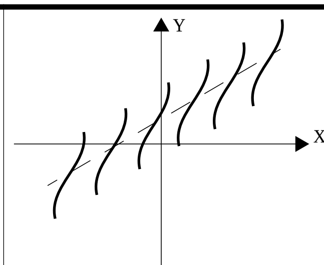
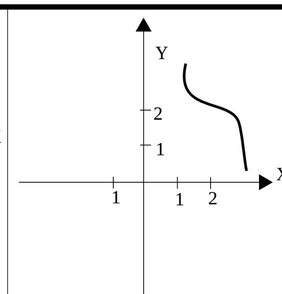
			
1) b.Las gráficas no cortan el eje x.	1) c. Las gráficas parecen tener dos asíntotas.	1) d. Algunas gráficas cortan el eje x y otras no.	2) e. La gráfica tiene un dominio y un rango restringido.

Figura Nº 3.

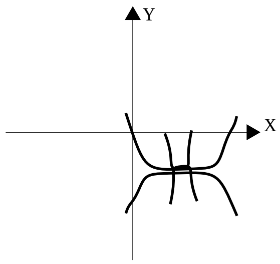
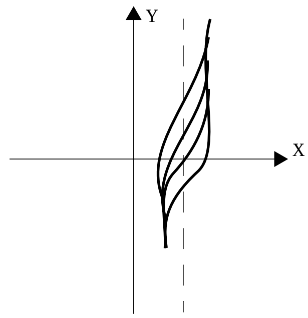
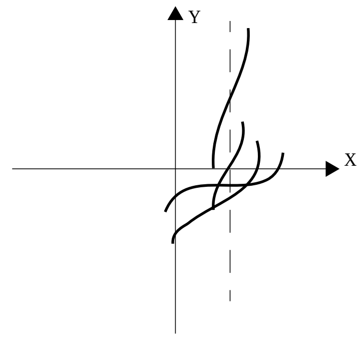
		
2) f. Algunas gráficas no cortan el eje y. El dominio es el mismo para todas las funciones.	2) g. para valores grandes de y, las gráficas se juntan.	2) h. Aquellas gráficas que tienen valores suficientemente grandes de k no cortan el eje x.

Figura Nº 3.

ANÁLISIS

Para efectos de la solución del problema los estudiantes se dividieron en dos grupos: se les pidió a 13 estudiantes que resolvieran el problema 1 y a 9 estudiantes se les pidió que resolvieran el problema 2. A todos los estudiantes se les pidió que corrigieran la solución propuesta y comentaran las afirmaciones correspondientes. Calculamos los siguientes porcentajes:

- el porcentaje de estudiantes que, habiendo producido una gráfica, dibujó una gráfica de alguno de los tipos esperados, como se describió en la tabla 1;
- para cada respuesta corregida, el porcentaje de estudiantes que la corrigieron como correcta;
- para cada afirmación comentada, el porcentaje de estudiantes que la aceptaron como válida.

Además, se hizo un análisis de los comentarios a las afirmaciones. El propósito de este análisis era el de explorar la coherencia de los comentarios de cada uno de los estudiantes a la serie de afirmaciones, y ser capaces de sacar conclusiones acerca de sus concepciones. Decidimos que una serie de respuestas era coherente si había máximo un comentario que fuera contradictorio con el resto de comentarios (desde el punto de vista de su validez).

RESULTADOS

La tabla 2 muestra el porcentaje de estudiantes que, habiendo producido una gráfica, dibujó una gráfica de alguno de los tipos esperados, como se describió en la tabla 1.

Tipo de gráfica	1	2	3	4	5	6	7
Porcentaje	79	100	8	75	78	88	46
Número total de respuestas	19	1	12	12	9	8	13

Porcentajes de tipos de gráficas

Todos los estudiantes aceptaron como correctas todas las respuestas que se presentaron en la solución propuesta. La tabla 3 muestra, para cada afirmación comentada, el porcentaje de estudiantes que la aceptaron como válida.

Afirmación	1.a	1.b	1.c	1.d	2.e	2.f	2.g	2.h
Porcentaje	32	54	57	38	56	75	11	75
Número total de respuestas	19	13	14	8	9	4	19	4

Tabla Nº 2. Porcentajes de comentarios

La tabla 4 muestra el porcentaje de estudiantes que presentaron una serie coherente (válida e inválida) de comentarios a las afirmaciones, junto con el porcentaje de estudiantes que propusieron una serie incoherente de comentarios. Hubo 9 estudiantes que dieron menos de 3 respuestas. La tabla muestra los resultados para los otros 10 estudiantes.

	Coherente inválida	Coherente válida	Incoherente
Porcentaje	40	50	10

Tabla Nº 3. Porcentajes de coherencia

Discusión

Los resultados muestran que los estudiantes del segundo grupo también dibujaron gráficas de los tipos que observamos en el primer grupo de estudiantes. Cuando se les pidió que corrigieran la solución previamente diseñada, todos los estudiantes aceptaron como correctas todas las respuestas inválidas de las que estaba compuesta esta solución. Sin embargo, cuando se les pidió que comentaran las afirmaciones que se les proponían, las reacciones de los estudiantes fueron diferentes. Hubo varias afirmaciones para las que muchos estudiantes no estuvieron de acuerdo. No obstante, ésta no fue una reacción por azar de parte de los estudiantes. Cuando se analizaron los comentarios de los estudiantes a la serie de afirmaciones, encontramos que los estudiantes se pueden catalogar en tres grupos: aquellos con una serie de respuestas coherente pero inválida, aquellos con repuestas coherentes y válidas, y aquellos con respuestas incoherentes. Un punto importante aquí es que el grupo que presentó respuestas coherentes e inválidas representa una proporción importante del grupo. Esto nos hace pensar que muchos estudiantes pueden desarrollar una concepción consolidada pero inválida de la función cúbica de la forma $f(x) = a(x-h)^3 + k$. Por otro lado, no pudimos sacar conclusiones con respecto a nuestra hipótesis sobre el rango de la función cúbica, dados los resultados que se obtuvieron a las preguntas 2g y 2h.

Conclusiones

Es posible que haya razones por las cuales los estudiantes desarrollan este tipo de concepción de la función cúbica. Desde el punto de vista matemático, ésta parece ser una situación natural. Dado que tradicionalmente los planos cartesianos se dibujan con la misma escala para ambos ejes y que la función cúbica crece rápidamente, la parte del dominio de la función que se puede “ver” en la gráfica es, en general, un subconjunto propio de los números reales. Además, al parecer, la mayoría de los libros de texto y de los profesores tienden a considerar funciones cúbicas para las cuales $a \geq 1$.

La instrucción y los libros de texto tampoco ayudan. Encontramos que el libro de texto que se utilizó en el curso no presenta gráficas en las que se pueda ver que el dominio es el conjunto de los números reales. Además, cuando revisamos el material de preparación de clase de uno de los profesores, encontramos gráficas que eran similares a las de los estudiantes.

Es muy posible que este problema exista también para las funciones cuadráticas. De hecho, cuando realizamos unas entrevistas informales con los estudiantes sobre este tema, una de ellos justificó el comportamiento "asintótico" de la función cúbica como siendo el mismo que presenta la función cuadrática. En este sentido, es posible afirmar que existe una conexión entre la comprensión de la función cuadrática y de la función cúbica. Sin embargo, aunque no tenemos datos para justificarlo, pensamos que esta conexión se rompe cuando las funciones cuadráticas y cúbicas se comparan con la función lineal, un hecho que no corroboraría los resultados obtenidos por Curran al respecto.

Es posible argüir que el problema que se les propuso a los estudiantes era sobre familias de funciones y no sobre el dominio de la función cúbica. Por consiguiente, se podría decir que los estudiantes estaban más preocupados por responder las preguntas y corregir las respuestas propuestas desde el punto de vista de lo que ellos consideraban que era relevante en el problema y que ésta sea la razón por la cual ellos corrigieron como correctas las repuestas propuestas. No obstante, este no fue el caso con las afirmaciones que ellos tenían que comentar. Esas afirmaciones se referían a las gráficas mismas y no hacían ningún tipo de conexión con el texto del problema.

Finalmente, la tecnología pudo haber jugado un papel. El problema de la "ventana" identificado por Schwarz y Dreyfus a partir de su concepto de "representante" puede inducir a los estudiantes a construir una concepción inválida. Esta es una situación un poco paradójica dado que las calculadoras gráficas y el software de computador le permite a los estudiantes cambiar fácilmente la escala y el rango de los ejes. No obstante, ésta puede ser evidencia de que los estudiantes no aprovechan estas ventajas de la tecnología.

Las dificultades de aprendizaje encontradas en este estudio no serían muy importantes si se pudieran interpretar como una consecuencia de problemas de dibujo relacionados con el contexto específico que se estaba considerando. Sin embargo, como hemos encontrado en otro estudio (ver Carulla y Gómez, 1997 y nuestro artículo *Calculadoras gráficas y precálculo. ¿El imperio de lo gráfico?* en este volumen), cuando se utiliza la tecnología, los estudiantes tienden a construir su comprensión basados principalmente en el sistema de representación gráfico. Esta puede ser la razón por la cual encontramos concepciones consolidadas e inválidas.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Carulla, C., Gómez, P. (1996). Graphic calculators and precalculus. Effects on curriculum design. In Puig, L., Gutiérrez, A. (Eds.). *Proceedings of the 20th PME Conference*. Valencia: Universidad de Valencia, pp. 1-161.

Carulla, C., Gómez, P. (1997). Graphic calculators and problem solving. Do they help?. In Pehkonen, E. (Ed.). *Proceedings of the PME 21 Conference*. Lahti: University of Helsinki.

Curran, J. E. (1995). An investigation into students' conceptual understanding of the graphical representation of polynomial functions. *PH. D. Thesis*. University of New Hampshire.

Gómez, P. (In press). Graphics calculators integration into curriculum. In *Proceedings of the tenth International Conference of Technology and Collegiate Mathematics*. Reading, MA: Addison Wesley.

Gómez, P., Mesa, V.M., Carulla, C., Gómez, C., Valero, P. (1996). *Situaciones problemáticas de precálculo. El estudio de funciones a través de la exploración con calculadoras gráficas*. México: una empresa docente y Grupo Editorial Iberoamérica.

Gómez, P., Rico, L. (1995). Social interaction and mathematical discourse in the classroom. In Meira, L., Carraher, D. (Eds.). *Proceedings of the 19th PME Conference*. Recife: Universidade Federal de Pernambuco, pp. I-205.

Harel, G., Dubinsky, E. (1992). *The concept of function. Aspects of epistemology and pedagogy (MAA Notes, Volume 25)*. Washington: Mathematical Association of America.

Leindhardt, G., Zaslavsky, O., Stein, M. (1990). Functions, graphs, and graphing: Tasks, learning, and teaching. *Review of educational research.* 60 (1), pp. 1-64.

Mesa, V.M., Gómez, P. (1996). Graphing calculators and Precalculus: an exploration of some aspects of students' understanding. In Puig, L., Gutiérrez, A. (Eds.). *Proceedings of the 20th PME Conference*. Valencia: Universidad de Valencia, pp. 3.391-3.399.

Romberg, T.A., Carpenter, T.P., Fennema, E. (1993). *Integrating research on the graphical representation of functions.* Hillsdale: Lawrence Erlbaum.

Schwarz, B., Dreyfus, T. (1995). New actions upon old objects: A new ontological perspective on functions. *Educational Studies in Mathematics*. 29 (3), pp. 259-291.

Sierpinska, A. (1992). On understanding the notion of function. In Dubinsky, E., Harel, G. *The concept of function. Aspects of epistemology and pedagogy (Notes, Volume 25)*. Washington: Mathematical Association of America.

Tall, D. (1991). *Advanced Mathematical Thinking*. Dordrecht: Kluwer.

Valero, P., Gómez, C. (1996). Precalculus and Graphic Calculators: The Influence on TeachersBeliefs.In Puig,L.,Gutiérrez,A.(Eds.).*Proceedings of the 20th PME Conference*. Valencia: Universidad de Valencia, pp. 4.363-4.370.